This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

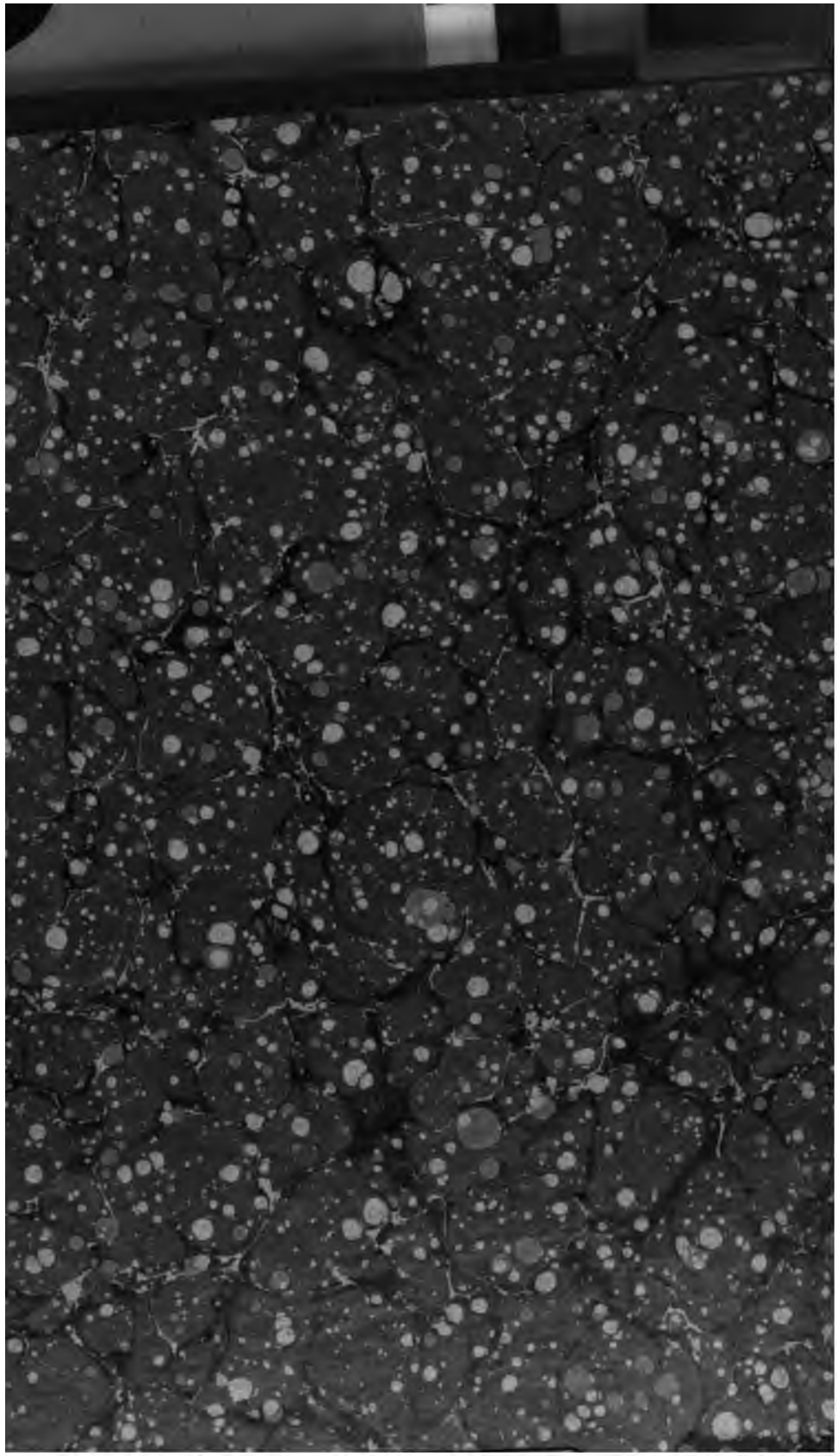
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

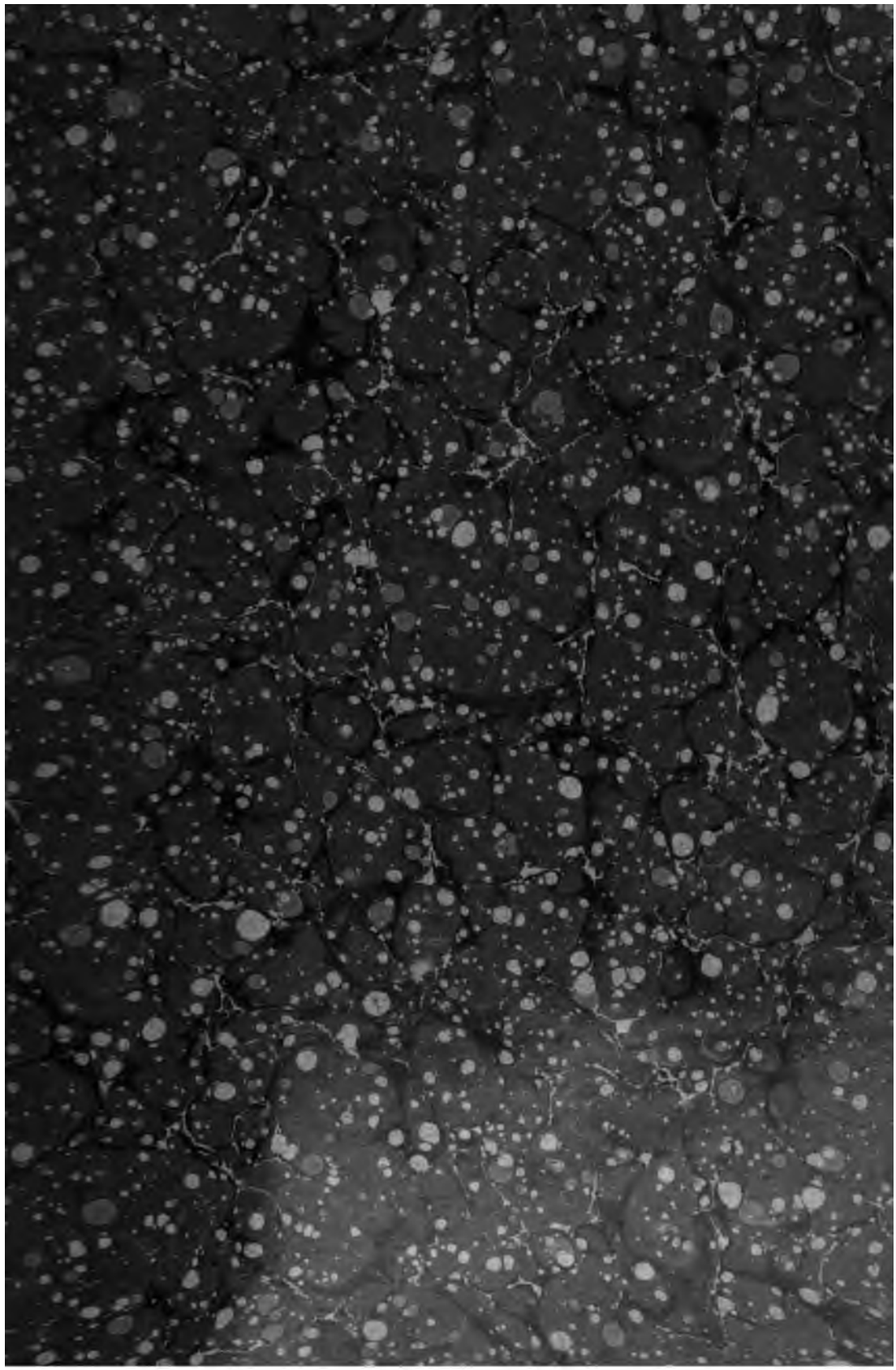
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

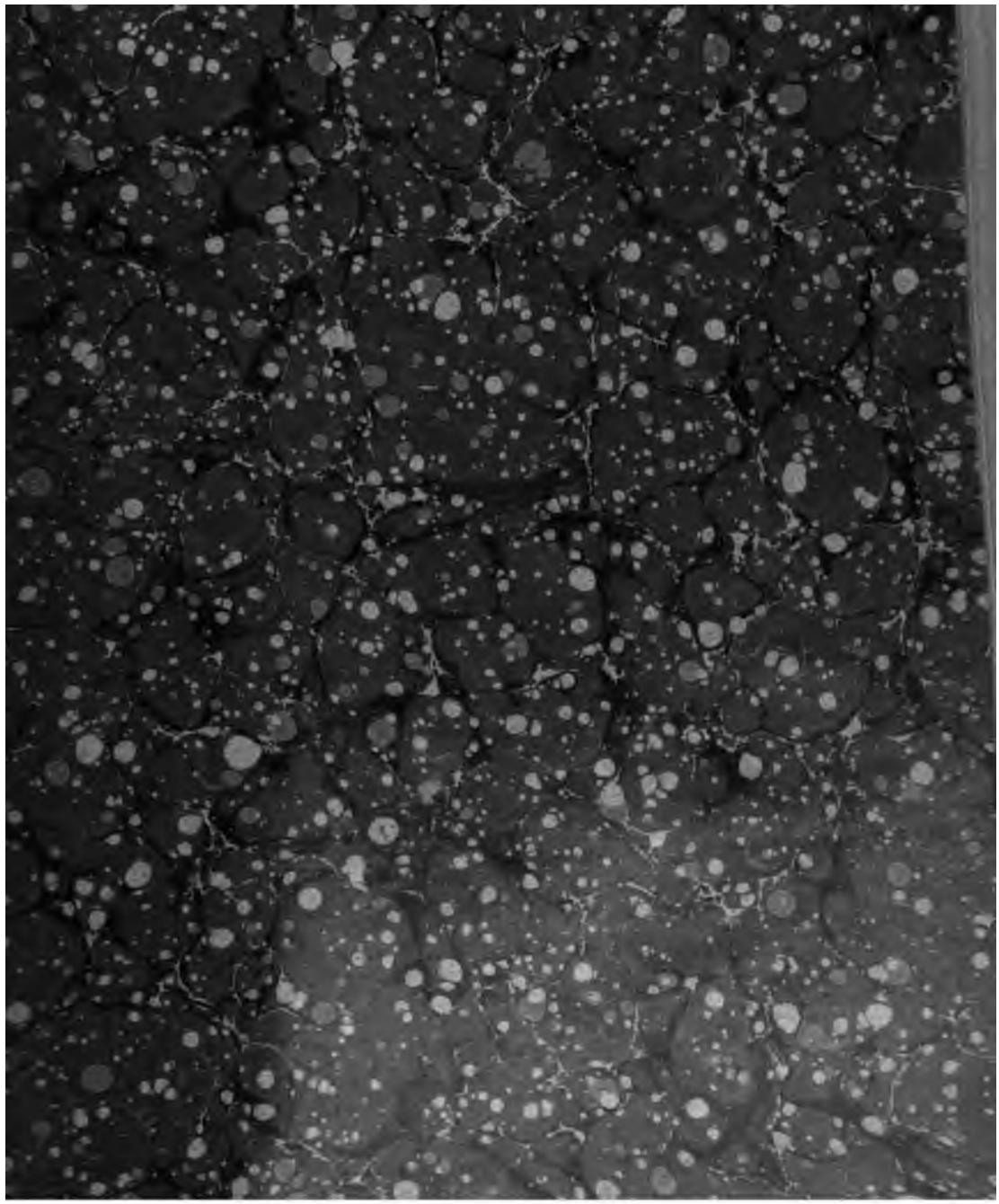
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 869





.26



10.J
N426

4661 12,645

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

VON

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

50. Band. 1. u. 2. (Doppel-) Heft.

Mit 10 Figuren im Text.

Ausgegeben am 9. August.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer.
I. Teil. Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 3.40; 2. [112 S.] 1899. ℳ 3.40; 3. [128 S.] 1899. ℳ 3.60; 4. [160 S.] 1899. ℳ 4.60; 5. [208 S.] 1900. ℳ 6.40; 6. [272 S.] 1901. ℳ 7.80; 7. [120 S.] 1901. ℳ 3.60.

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 2. [240 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [160 S.] ℳ 4.80; 5. [192 S.] 1904. ℳ 6.—
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 5.60.
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [192 S.] 1902. ℳ 5.40.
——— Heft: 2/3. [256 S.] 1903. ℳ 6.80.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [155 S.] 1902. ℳ 4.80; 3. [150 S.] 1903. ℳ 4.60.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [121 S.] 1903. ℳ 3.60.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [280 S.] 1904. ℳ 8.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie u. Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.
VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister**.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ca. ℳ 6.—

Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.
Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.
Rich. Lindt, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems".

Alexandroff, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow. **Aufgaben aus der niederen Geometrie.** Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 122 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 2.40.

Ahrens, Dr. W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 8.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungar. Naturwissenschaftl. Gesellschaft. Herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schaparakis, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XIX. Band. [XIV u. 492 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 8.—

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. ℳ 5.60; 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. ℳ 7.60; 3. Lfg. [S. 401—768.] 1903. n. ℳ 12.40; 4. (Schluß-)Lieferung. 1904. [U. d. Pr.]

Bruns, Dr. Heinrich, Professor der Astronomie an der Universität zu Leipzig. **Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens.** [IV u. 100 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 3.40, geb. ℳ 4.—

Cesaro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Königl. Universität zu Neapel, **Lehrbuch der algebraischen Analysis.** Deutsche Ausgabe von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Greifswald. gr. 8. 1904. [U. d. Pr.]

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Drach, Jules, à Lille, Histoire des Sciences Mathématiques en France au XIX^e siècle. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. gr. 8. 1904. [In Vorbereitung.]

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, **Vorlesungen über projektive Geometrie.** Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischmann in Göttingen. Mit einem Einführungswort von Felix Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 9.— In Leinw. geb. ℳ 9.—

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

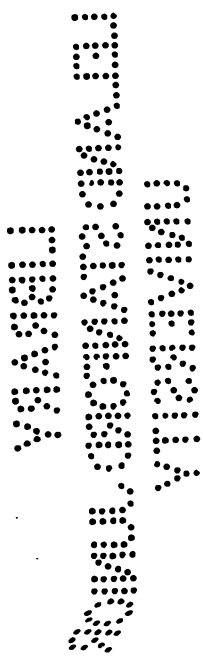
Walther v. Dyck
in München.

David Hilbert
in Göttingen.

59. Band.

Mit 70 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.



ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Inhalt des neunundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Bernstein, S., à Paris. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. (Mit 3 Figuren im Text) 20

Bes, K., à Tilbourg (Hollande). Décomposition de la forme ternaire du troisième degré 77

Carathéodory, C., in Göttingen. Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen. (Mit 2 Figuren im Text) 377

Caspar, Max, in Tübingen. Abzählungen bezüglich des Strahls im n-dimensionalen Raum 517

Dehn, M., in Münster i. W. Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie 84

Fricke, Robert, in Braunschweig. Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen. (Mit 53 Figuren im Text) 449

Hamel, Georg, in Karlsruhe. Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik 416

Hilbert, David, in Göttingen. Über das Dirichletsche Prinzip 161

Hurwitz, A., in Zürich. Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen 553

Kasner, Edward, of New York. A characteristic property of isothermal systems of curves 352

Levi-Civitá, T., a Padova. Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili 383

Lie, Sophus †. Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen. Aus dem Nachlasse herausgegeben von Fr. Engel in Greifswald 193

Liebmann, H., in Leipzig. Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie. (Mit 9 Figuren im Text) 110

Lindeberg, J. W., in Helsingfors. Zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen. (Mit 3 Figuren im Text) 321

——— Zur Theorie des relativen Extremums der einfachen Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen 332

Loewy, Alfred, in Freiburg i. Br. Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen 435

8 0397

Seite

Meyer, Eugen, in Charlottenburg. Über die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojektivitäten erzeugen . . . 398

Nielsen, Niels, à Copenhague. Sur une intégrale définie 89

———— Note sur les séries de fonctions bernoulliennes 103

———— Les séries de factorielles et les opérations fondamentales 355

Noether, M., in Erlangen. Luigi Cremona 1

Réthy, Moritz, in Budapest. Das Ostwaldsche Prinzip vom Energieumsatz in der Mechanik 554

Riesz, Friedrich, in Györ (Ungarn). Über einen Satz der Analysis Situs . . 409

Schoenflies, A., in Königsberg i. Pr. Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II. 129

Schur, Friedrich, in Karlsruhe. Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie . 314

Sonin, N., à St. Pétersbourg. Sur les fonctions cylindriques. (Extrait d'un Lettre adressée à M. Niels Nielsen, à Copenhague) 529

Wendt, Ernst, in Bremen. Hamiltonsche Gruppen 187

Zermelo, E., in Göttingen. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe) 514

Luigi Cremona.

Von

M. Noether in Erlangen.

Auf Luigi Cremona, dessen Hinscheiden wir im Sommer des vorigen Jahres zu beklagen hatten, geht nicht nur die in kräftiger Blüte stehende geometrische Schule Italiens zurück, vielmehr erkennen die Geometer aller Länder, nicht zum wenigsten die deutschen, ihn als einen ihrer geistigen Lehrer an. Es gibt kein zusammenfassendes rein-geometrisches Werk, das einen weiteren und tieferen Einfluß auf die Ausbildung und Handhabung der geometrischen Methoden ausgeübt hätte, als Cremonas Schriften über die ebenen Kurven und die Flächen — nur vergleichbar dem Einfluß der Salmonschen Kompendien auf die algebraisch-geometrische Entwickelung. Auch für die Gründung und Existenz dieser Annalen war, wie diese letztere Richtung, so die Stärke des rein-geometrischen Fortschritts eine der notwendigen Voraussetzungen. Wir folgen daher einerseits einem historischen und persönlichen Antriebe, andrerseits denken wir im Sinne des Begründers der Annalen, Alfred Clebsch, des fast gleichaltrigen Freundes Cremonas, zu handeln, wenn wir hier eine Würdigung der wissenschaftlichen Tätigkeit des italienischen Geometers zu geben versuchen.

Eine Lebensskizze sei in Kürze vorausgeschickt*). Luigi Cremona

*) Die benutzte Literatur beschränkt sich auf: G. Veronese, Commemorazione, gelesen in der Sitzung der R. Acc. dei Lincei vom 6. Dez. 1903 (Rendic. XII, 2° sem., fasc. 12) und auf die kürzeren Nachrufe von E. D'Ovidio (Atti d. R. Acc. delle Sc. di Torino, t. 38, vom 14. Juni 1903) und G. Celoria (Rendic. Istit. Lomb., t. 36, fasc. 14, 1903). Ferner konnten einige dankenswerte briefliche Mitteilungen der Herren G. Castelnuovo und G. Jung, wie auch ein im Jahre 1871 geführter Briefwechsel zwischen Cremona und dem Verf. benutzt werden. Verzeichnisse der Arbeiten Cremonas befinden sich in dem Catalogue of Scient. Papers der R. Soc. von London, und am Schlusse des Veroneseschen Nachrufs. An letzterer Stelle fehlen noch u. A. die Arbeiten: „Courbes gauches etc." (C. R. 1861 und Annali di Mat. IV), „Sulla trasformazione razionale etc." (Mem. Acc. Bologna, ser. 3, t. I, 1871), und einige Nachrufe, insbesondere der größere auf Beltrami (Rend. Acc. Lincei 1900).

wurde am 7. Dezember 1830 zu Pavia geboren, als Sohn eines städtischen Beamten. Er wuchs mit einem jüngeren Bruder, Tranquillo, auf, der ein geschätzter Maler wurde, aber lange vor ihm verstarb. Gegen Abschluß der Gymnasialzeit traf und begeisterte den Jüngling die Erhebung von 1848; er schloß sich im April dem studentischen Freiwilligenkorps an und nahm an der Verteidigung Venedigs als einer der Tapfersten teil, bis zur Übergabe — eine $1\frac{1}{2}$ jährige Periode, in der sich Körper und Geist stärkten und sein energischer reiner Charakter herausbildete. Zwar warf ihn zunächst eine schwere Erkrankung darnieder, aber es verblieb ihm bis an sein Ende die Liebe zum Vaterlande und die Arbeitsfreudigkeit für dessen Wohl. — Cremona bezog die Universität Pavia, wo noch A. Bordoni wirkte und bald darnach auch F. Brioschi als Lehrer auftrat; übernahm dort eine Repetitortätigkeit in angewandter Mathematik und legte 1853 das Bauingenieur-, 1855 das Mittelschul-Examen ab. Die Jahre 1856—60 waren der Lehrtätigkeit an Lyceal-Gymnasien gewidmet, in Pavia, Cremona, zuletzt in Mailand; und eine glückliche Ehe, aus der drei Kinder entsprossen sind, schuf ihm eine Häuslichkeit, in der sich sein wissens- und schaffensbedürftiger Geist ruhig entfalten konnte. Die allgemeinen Grundanschauungen der projektiven Geometrie waren durch Poncelet, Chasles und die deutschen Geometer festgelegt; nun forderte ein unübersehbares neues Gebiet die Durchforschung heraus. Schon hatte die in Italien neuerwachte intellektuelle Bewegung auch die höhere Geometrie aus Frankreich an einige Universitäten verpflanzt; und Cremona schloß sich dort als erster dieser Bewegung mit Erfolg an, indem er nach umfassendsten Studien die Theorie der Raumkurven 3^{ter} Ordnung förderte. So wurde er im Juni 1860 der erste Vertreter auf dem geometrischen Lehrstuhl der Universität Bologna, als ordentlicher Professor: neben den höheren synthetisch- und algebraisch-geometrischen Methoden hatte er auch die deskriptive*) Geometrie vorzutragen; und hier sollten bald seine epochemachendsten Forschungen entstehen. Diese Wirksamkeit brachte ihm 1866 die Professur für graphische Statik und höhere Geometrie an dem vier Jahre vorher gegründeten Istituto Tecnico Superiore in Mailand, wo er mit dem Leiter Brioschi und mit Casorati zusammen arbeiten und seine Forschertätigkeit weiter entfalten konnte.

Von 1873 an gehörte Cremona der erneuerten Universität und der Ingenieurschule in Rom an. Letztere Anstalt organisierte und leitete er, er gliederte sie zu wechselseitiger Beeinflussung der Universität an und las neben den Fachkollegien für den Verband gemeinsam die höhere

*) Hiervon zeugt nur eine unter dem Anagramm „Marco Uglieni" 1864 in Bologna erschienene kleine Schrift über einige Fragen der Zentralprojektion.

Geometrie. Aber immer mehr absorbierte ihn die pädagogische und organisierende Tätigkeit. Seine Lehrbücher, in ihrer praktischen Richtung und ihrer klaren und konziesen Sprache, drangen in alle Schulen und alle Länder. Langjähriges Mitglied, auch Chef des Consiglio Superiore für den Unterricht, seit 1879 Mitglied des Senats, in dem er seit 1897 das Amt des Vizepräsidenten bekleidete, ganz vorübergehend 1898 auch Unterrichtsminister — überall genoß er unbestrittenes Ansehen, ob er nun 1880/81 die Bibliothek Vittorio-Emanuele zu Rom trefflich organisierte, über schultechnische Fragen als höchste Autorität oder über andere Verwaltungsmaterien referierte. Vor allem verdanken ihm die Mittelschulen seines Landes, denen er seine höchsten Bestrebungen zuwandte, eine Hebung ihres ganzen Standes, wenn auch die Einführung der projektiven Geometrie und des graphischen Rechnens in die Programme der Instituti Tecnici sich nur wenige Jahre hielt. Die Leitung der Annali hatte Cremona mit Brioschi von 1866 bis 1877 geführt, von da an war er innerhalb einer größeren Redaktion daran beteiligt. Der Schwerpunkt seiner Lehrertätigkeit lag aber nicht im Kathedervortrag: hier hatte er mit dem Worte zu kämpfen; die ihm beim schriftlichen Ausdruck eigene gedrungene Eleganz war ihm im Vortrag ein unerreichbares Ziel, und so brachte er seine anregende Kraft am liebsten in seminaristischen Kolloquien zur Wirksamkeit. Wie beredt seine Feder werden konnte, davon zeugt, außer manchen Vorworten und Besprechungen, vor allem seine letzte Arbeit, ein Nachruf auf den fünf Jahre jüngeren Freund Beltrami (Rend. Acc. Linc. 1900), der warme Töne des Andenkens an den Menschen und Gelehrten findet. Es war Cremona, der nur das wahrhaft Wissenschaftliche achtete, gegeben, was ihm bei Andern als Verdienst erschien, bescheiden und neidlos, ja mit freudiger Bewunderung anzuerkennen. Dieser hochherzige Zug verband sich mit einem unerschütterlich starken Charakter; und sein fester Wille hielt ihn noch bis zur letzten Zeit in treuester strengster Pflichterfüllung, als der Körper längst von einer schweren schleichenden Krankheit befallen war. Er hatte nach und nach immer zurückgezogener gelebt, seit 1885 in zweiter glücklichster Ehe mit einer Deutschen; und in deren Armen verschied er am 10. Juni. —

Cremonas *wissenschaftliche* Betätigung mögen wir, da sie sich fast ausschließlich auf das geometrische Gebiet beschränkte, am besten wesentlich chronologisch verfolgen. Wir wenden uns zunächst zu den Jahren 1855—1861.

Anschließend an eine starke Erweiterung der Dupinschen Krümmungstheorie für Flächen, die schon 1832 von Bordoni vorgenommen worden war, behandelt der „Dottore in matematica“ im Jahr 1855 den speziellen Fall: das Verhalten einer Fläche gegenüber einer Schar von einfach

berührenden Kugeln („Sulle tangenti sfero-conjugate", Annali di Tortolini VI), späterhin (Annali di Mat. (1), III, Jan. 1861) allgemeiner gegenüber einer Schar von Flächen, für welche der Berührungspunkt je ein Nabelpunkt ist. Hierbei werden einige der Sätze über Krümmungskurven, welche nachher die Kugelgeometrie erschlossen hat, schon antizipiert. Nach einigen kleinen Noten verschiedener Richtung macht sich von 1858 an ein andrer geometrischer Geist geltend. In den ersten beiden Bänden der neuen Annali („Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura", 1858) veröffentlicht Cremona eine große Reihe originaler Theoreme über die *Raumkurven 3ter Ordnung;* und die Publikation findet ihre Fortsetzung — nach Behandlung der zwei Flächen 2ten Grades umschriebenen abwickelbaren Fläche 4ter Klasse (ibid. II) — in der Untersuchung ihres dualistischen Gebildes: der abwickelbaren Fläche 3ter Klasse ihrer Schmiegungsebenen („Intorno alle coniche inscritte etc.", ibid. Febr. 1859), und eine weitere Förderung und Zusammenfassung im Crelleschen Journal („Sur quelques propriétés des lignes gauches etc."; Bd. 58, von März 1860; Note sur les cubiques gauches", Bd. 60, von Juni 1861). Aber erst im April 1861, schon von Bologna aus, erfolgte eine Mitteilung der Beweise der erst-erhaltenen Resultate (Mém. de géométrie pure etc.", Nouv. Annales de Math. (2), I). Diese Arbeiten knüpfen zunächst durchaus an Chasles (Aperçu hist. und Liouv. J. 1857) an: an dessen Satz von der vereinigten Lage des Schnittpunkts dreier Schmiegungsebenen der Kurve mit der Ebene durch die drei zugehörigen Punkte und an das hierdurch bestimmte Nullsystem im Raume, wie es auch zu gleicher Zeit bei Schröter (Cr. J. 56) geschieht. Aber bald geht Cremona über Chasles hinaus, indem er eine Theorie von Paaren konjugierter Punkte bezüglich der kubischen Raumkurve (d. i. konjugiert bezüglich aller durch die Kurve gehenden Flächen 2ten Grades) und die reziproke Theorie entwickelt; an der Hand der Seydewitz-Chaslesschen Erzeugungen wird der Pascalsche Satz, der sich auf die Kegel über sechs festen Punkten, aber mit beweglichem Scheitel auf der Kurve bezieht, ergänzt: die Pascalschen Ebenen gehen durch eine vom Scheitel unabhängige Sehne der Kurve; Konstruktionen der Kurve aus allen Kombinationen von Punkt- und Sehnenbedingungen, Anzahlbestimmungen für die zweien Kurven gemeinsamen Sehnen (Cr. J. 60) werden gegeben. Eine Leistung anderer Art liegt in eingehenden metrischen Diskussionen, ausgezeichnet durch umfassende Fallunterscheidungen: auf die Untersuchung der Verteilung der Zentren einer Schar von Flächen 2ter Ordnung wird die analoge Aufgabe für die Kegelschnitte aufgenommen, die der abwickelbaren Fläche dritter Klasse eingeschrieben sind, und auf die schon bekannten Realitätsunterscheidungen der Asymptoten der Kurve zurückgeführt. In derselben Richtung wendet sich Cremona

noch den homozyklischen — den Reziproken der konfokalen — sphärischen Kegelschnitten zu (Nouv. Ann. XIX, 1860), dann dem Büschel von Flächen 2^{ter} Ordnung, das eine Kugel enthält, in einer an Resultaten reichen Arbeit („Coniche e superficie di 2^0 ordine congiunte", Annali III, Dez. 1860); und noch 1863 (Mem. Acc. Bologna III) wieder der kubischen Parabel mit neuen Sätzen über deren Paare von orthogonalen Schmiegungsebenen.

Deutlich zeigt sich in diesen Arbeiten ein allmählicher Übergang von der algebraischen zur synthetischen Behandlungsweise. Cremonas Hilfsmittel ist zunächst — und zwar erst ohne den Vorgang von Moebius zu kennen — die Parameterdarstellung der kubischen Kurve, in der kanonischen Form; und die metrischen Untersuchungen bedienen sich der Linien- und Ebenenkoordinaten. Aber schon die Aufsätze von 1858 neigen am Schluß etwas der synthetischen Richtung zu, und die Abhandlung im Crelleschen Journal 58 vom März 1860 kann — wenn sie auch anhangsweise wieder die Parameterdarstellung einführt, wie auch die vom April 1861 — als seine erste ganz synthetische Arbeit gelten. Von da an tritt bei Cremona die rein-geometrische Richtung, wie er sie mit Vorliebe bezeichnet, völlig in den Vordergrund.

Schon in der Theorie der kubischen Raumkurven hatte er Gelegenheit genommen, sich, nach dem allgemeinen Vorgange von Salmon (1852) und Cayley, mit der Erzeugung spezieller Regelflächen zu beschäftigen. Jetzt (Atti Ist. Lomb. II, Apr. 1861) nimmt er die Theorie der allgemeinen *Regelflächen 3^{ten} Grades* zum ersten Male als solche in Angriff, studiert deren Erzeugungen und Polareneigenschaften, und bald darauf (Cr. J. 60, Sept. 1861), veranlaßt durch einen Hinweis von Cayley, auch die Spezialisierung, bei welcher die einfache Leitgerade an die doppelte heranrückt. Bei diesem Studium war er auf die, auf nur einem Hyperboloid gelegene, *Raumkurve 4^{ter} Ordnung* gestoßen, welche schon 1849 von Salmon, 1856 von Steiner aufgefunden worden war und die Cremona als solche *2^{ter} Species* bezeichnet: er behandelt sie (Rend. Acc. Bologna und Annali IV, 1861) durch eine Konstruktion der Kurve mittels des Schnittes homologer Ebenen dreier projektiven Büschel von Ebenen und Ebenenpaaren. Auf den speziellen Fall, in welchem die vier stationären Schmiegungsebenen paarweise zusammenfallen, ausgezeichnet durch ein zuzuordnendes Nullsystem, ist Cremona später (Rend. Ist. Lomb. I, 1868) zurückgekommen, während er zunächst zu den Raumkurven auf dem Hyperboloid überhaupt (C. R. 52, Annali IV), dann (C. R. 54, 1862) zur abwickelbaren Fläche 5^{ter} Ordnung der Schmiegungsebenen einer andern, schon von Cayley behandelten Raumkurve 4^{ter} Ordnung übergeht: der mit stationärem Punkt, die ihm wiederum zu einem Nullsystem Anlaß gibt. —

Eine der geometrischen Richtungen Cremonas geht auf die *linearen Verwandtschaften* und besonders auf die *Beziehungen der Polarentheorie.* In dem fruchtbaren Jahre 1861 entstand nun, neben den räumlichen Betrachtungen, auch dasjenige Werk, welches diese Richtung am meisten charakterisiert und das für die Systematik der „Geometria pura" der Ebene eine Tat geworden ist: die *„Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane"*. Als Abhandlung wurde es noch im Dezember jenes Jahres der Akademie von Bologna eingereicht (deren Rendiconto 1861—62) und erschien in deren Memorie ((1), XII); die deutsche Buchübertragung durch M. Curtze (Greifswald 1865) hat noch die von Cremona 1864 (Annali VI) gegebenen Verbesserungen und Zusätze in sich aufgenommen.

Cremona liefert eine einheitliche geometrische Entwickelung und Darstellung des ganzen vorhandenen oder mit den damaligen Mitteln erforschbaren Stoffes aus der Theorie der allgemeinen ebenen algebraischen Kurven. Was ihm damals von Synthetischem vorlag, waren einige grundlegende Methoden, so die von Chasles und Jonquières über Erzeugung von Kurven, und die von Steiner 1848 gegebenen Polarensätze („Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven", Cr. J. 47). Das Ziel der Arbeit Cremonas, letztere Sätze zu beweisen, also das Steinersche Programm durchzuführen, ist erreicht worden.

Durchgangspunkt des Buches bilden metrische Definitionen des Doppelverhältnisses und der projektiven Beziehung, die Theorie der harmonischen Mittelpunkte r^{ten} Grades, bezüglich eines festen Pols, für ein System von n Punkten einer Geraden, die Involutionsgruppen von je n Punkten einer Geraden — alles nach Poncelet und Chasles und mit den von Jonquières kurz vorher (1859) gegebenen Verallgemeinerungen; wie bei diesen Geometern hergeleitet aus den Gleichungen für die Parameter der Abstände. Diese Gleichungen dienen, neben dem Kontinuitäts- und andern abzählenden Prinzipien, zur Ableitung der Schnittpunktsätze und der Sätze für Involution und Kurvenbüschel. Hier steht also Cremona wesentlich auf dem Boden seiner Vorgänger. Aber die Methoden werden leicht und sicher angewendet, und ein zerstreuter, noch kaum in den Elementen entwickelter Stoff wird in geordneter Ideenverarbeitung einfach und doch weitführend dargestellt. Schon der erste Teil enthält manches Originale, wie Untersuchungen über den Einfluß zusammenfallender Basispunkte bei der Kurvenerzeugung. Die geometrisch — abgesehen von dem Graßmannschen algebraischen Ausgangspunkt — großangelegte Polarentheorie, mit ihren Verzweigungen bis zu allen Eigenschaften auch der „gemischten" Polaren, der Steinerschen und Hesseschen Kurve und deren Hauptsingularitäten hin, mit ihrer umfassenden Anwendung auf die Theorie der Kurven dritter Ordnung, ist aufs Höchste lehrreich und für die Entwickelung der Geometrie anregend geworden.

Wenn Cremona sich in den Abzählungen, so in der Theorie der Indizes von Kurvensystemen, noch zu eng an Jonquières anschließt, so nimmt doch schon die deutsche Ausgabe die Chaslessche Charakteristikentheorie der Kegelschnittsysteme von 1864 auf. Er erkennt 1863 (Annali V) den Grund der Widersprüche der bisherigen Abzählungen in der Existenz von zerfallenden Kegelschnitten, die Richtigkeit seiner bisherigen bezüglichen Resultate aber darin begründet, daß sie nur Punkt-Gerade-Bedingungen betreffen. Diese speziellen Betrachtungen können als ein Vorläufer der Charakteristikentheorie gelten, deren Bedeutung Cremona als erster erkannte und der er auch dadurch eine besondere formale Wendung gab, daß er ein System von drei Bedingungen für Kegelschnitte zusammen durch eine lineare Funktion von drei Zahlen definierte. Bei den allgemeinen Anzahlbestimmungen Cremonas, die zum Teil komplizierte Probleme richtig erledigen, wird man sich erinnern, daß 1861 das Korrespondenzprinzip noch nicht in seiner allgemeinsten Form ausgesprochen war.

Auf dem heutigen Standpunkt fällt die algebraische Grundlage auf, die der Reinheit der Methode der synthetischen Geometrie nicht entspricht. Und ebenso vermißt man die Strenge, die man jetzt von den Definitionen und Beweisen, insbesondere der Schnittpunktsätze, sei es von algebraischem, sei es von geometrischem Standpunkte aus, zu fordern berechtigt ist. Aber Cremona, der selbst seit lange diese Ansicht geteilt, konnte sich zu einer zweiten Bearbeitung des Buches deshalb nicht entschließen, weil sie eben einer völligen Neugestaltung hätte gleichkommen müssen; und ein anderweitiger Ersatzversuch ist nicht gemacht worden. Immerhin wäre vor allem die heutige italienische Wissenschaft in der Lage, der Geometrie ein neues analoges Werk zu geben, das den großen Fortschritten seit 40 Jahren Rechnung tragen würde, auf sicheren Grundlagen, die ihm erst einen unvergänglichen Nutzen sicherten. Für Cremonas Werk bleibt die historische Bedeutung, daß es mit seinen Methoden und Auffassungen die Fühlung der reinen Geometrie mit der ganzen analytisch-geometrischen Entwicklung hergestellt hat, welche durch Plücker, Hesse und Clebsch, durch Salmon und Cayley hochgekommen war. —

Wie dieses Buch zu Beginn der Bologneser Zeit entstand, so reifte am Schlusse derselben das Werk heran, das die Polarentheorie von den Kurven zu den *Flächen* fortsetzte, die *„Preliminari di una teoria geometrica delle superficie“* (veröffentlicht in den Mem. Acc. Bologna VI, 1866 und VII, 1867; deutsch, mit starken Erweiterungen, übertragen durch M. Curtze, Berlin 1870): eine glückliche und erfolgreiche Ergänzung des ursprünglichen Plans, die an Systematik dem ersten Buche gleichkommt, an Originalität es noch übertrifft. Mit dem viel umfassenderen und sehr viel komplizierteren Stoff, an dem bisher hauptsächlich nur die ersten Algebraiker

Erfolge aufzuweisen hatten, wächst auch Cremonas Kraft, und seine geometrischen Methoden bearbeiten und bemeistern ihn in einer Weise, daß gerade diesem Werke zugleich der didaktische und der schöpferische Charakter aufgedrückt ist. Die prägnante und verständliche Schreibart ist beiden Büchern gemeinsam.

Cremonas Betrachtungen entbehren natürlich auch hier wieder der Reinheit und Strenge der Grundlagen; aber sie wirken auch in dem höheren Gebiete gerade dadurch anregend, daß sie sich im allgemeinen ohne Mühe in algebraische Form umsetzen lassen. Nur einige tief eindringende Forschungen lassen sich auf analytischem Wege schwerer verfolgen: so bezeugt das lehrreiche — aus Korrespondenz mit Cayley und Zeuthen angeregte, nur in der deutschen Ausgabe enthaltene — Kapitel, das die Singularitäten von abwickelbaren Flächen mittels der Polarentheorie untersucht, ein starkes intuitives Erfassen des Infinitesimalen; es hat auch bald weitere Fortschritte (Zeuthen, mit Hilfe der Korrespondenztheorie, Annali (2), III, 1869) hervorgerufen.

Eine weitere Förderung der allgemeinen Prinzipien der *Polarentheorie* der Flächen n^{ter} Ordnung hat Cremona in den ersten Abschnitten seiner großen Abhandlung über die Flächen 3^{ter} Ordnung („Mém. de géom. pure sur les surfaces du 3^e ordre", Crelle J. 68) gegeben, mit welcher er 1866 (zugleich mit R. Sturm) den Steiner-Preis der Berliner Akademie erwarb und welche voll in die deutsche Ausgabe der Preliminari aufgenommen ist. In den Vordergrund tritt hier die geometrische Untersuchung der, symmetrischen Determinanten entsprechenden Örter und ihre Anwendung auf die Flächensysteme: die Jacobische Fläche eines Systems, und die Hessesche und Steinersche Kernfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung: alles im Sinne des Steinerschen Programms von 1856, und in vielfacher Begegnung mit den bedeutendsten algebraischen Forschungen von Salmon und Clebsch.

Von Arbeiten, die wesentlich der Polarentheorie angehören, seien noch einige angeführt. Die Arbeit über die Steinersche Fläche (Cr. J. 63, Febr. 1864) erschließt von der Betrachtung eines Kegelschnittnetzes aus, wenn auch wesentlich an Schröter anschließend, neue Eigenschaften über das singuläre Tetraeder der Fläche. Die Note über die, schon von Steiner behandelte, dreispitzige Hypozykloide (ib. 64) leitet aus der Einordnung der Kurve unter die allgemeinen Kurven 3^{ter} Klasse Resultate ab; einige Noten aus derselben Zeit im Messenger of Math. (III) beziehen sich auf das vollständige Vierseit: den sog. 14-Punktkegelschnitt, und eine Umformung des Normalenproblems der Kegelschnitte mittels der quadratischen Transformation, welche Gerade in Gerade, die Punkte der Ebene in die dem Diagonaldreieck einbeschriebenen Kegelschnitte überführt. —

Inmitten der Entstehungszeiten der beiden Hauptwerke der projektiven Geometrie kam bei Cremona eine zweite Richtung der Verwandtschaftslehre zum Durchbruch: die der *rationalen Transformationen*. In dieser Richtung, die seiner Geistesart besonders entsprach, ist er über den Systematiker hinausgegangen und zum bahnbrechenden Forscher geworden: die allgemeinen eindeutigen und eindeutig umkehrbaren, algebraischen Transformationen zweier Ebenen ineinander tragen seinen Namen.

Cremonas Bestrebungen in diesen *Ebenentransformationen* gehen auf 1862 zurück. Er behandelt zuerst („Intorno alla trasformazione geometrica etc.", Rend. Acc. Bologna vom 27. März 1862) das in der Ebene Duale der eindeutigen quadratischen Punkttransformationen von Magnus, und zwar, wie für diese unmittelbar vorher (Turiner Ak.) Schiaparelli, die vermöge homographischer Umformung herzustellenden reellen Typen. Mit letzterem geht er hierbei durch die falsche Anschauung hindurch, hier die allgemeinsten ein-eindeutigen Transformationen der Ebene vor sich zu haben. Aber bald erkennt er aus der — auch schon von Magnus gemachten — Bemerkung, daß eine Fortsetzung von quadratischen Transformationen zu höheren führe, seinen Irrtum. Er erweist 1863 („Sulle trasformazioni geometriche etc.", Mem. Acc. Bologna, II) mittels Strahlen, die zwei räumliche Leitkurven treffen, also in Erweiterung der Steinerschen windschiefen Projektion, die geometrische Existenz von ein-eindeutigen Ebenentransformationen $n - n$, bei welcher den Geraden je Kurven irgend einer Ordnung n entsprechen — freilich zunächst nur an dem Fall der Kurven n^{ter} Ordnung mit gemeinsamem $(n-1)$-fachem Punkt, ein Fall, der später nach Jonquières benannt wurde, weil dieser ihn schon 1859 der Pariser Akademie vorgelegt hatte, wenn er ihn auch erst 1864 (Nouv. Ann. III) veröffentlichte. Und Cremona stellt auch schon allgemein die zwei arithmetischen Bedingungen, für Konstanten- und Schnittpunktanzahl, auf, denen irgend ein Kurvennetz n^{ter} Ordnung genügen muß, wenn es den Geraden entsprechen und zu einer ein-eindeutigen Transformation führen soll.

Die eigentlich grundlegende Arbeit für die ganze Theorie ist die am 15. Dez. 1864 der Akademie übergebene Arbeit (unter demselben Titel, Mem. V; in kurzem Auszuge schon im Sept. 1864 der in Bath tagenden British Assoc. übermittelt). Abgesehen davon daß die Frage, wie weit jene zwei Bedingungen auch geometrisch genügen, soweit gefördert ist, daß noch die Irreduktibilität einer allgemeinen Kurve des Netzes als notwendige Bedingung erkannt wird, werden die Grundbegriffe der Theorie selbst hier zum ersten Male eingeführt und erörtert: die Begriffe der Fundamental-Punkte und -Kurven („curve principale") der beiden Ebenen, ihr Zusammenhang mit der Jacobischen Kurve des Netzes der Trans-

formationskurven, die hierdurch entstehende Paarung der für jedes n endlich vielen Lösungssysteme der zwei arithmetischen Definitionsgleichungen. Das Studium der Jacobiana und des gegenseitigen Verhaltens der Fundamentalkurven in ihren Schnittpunkten führt Cremona sogar schon zur Beobachtung und zu einem Beweise des Satzes, daß die gepaarten Lösungssysteme bis auf die Anordnung übereinstimmen: ein induktiver Beweis, der später (diese Annalen IV) von Clebsch durch einen eleganteren ersetzt wurde. Als ein Fortschritt über die Cremonasche Theorie hinaus wäre nur die Erkenntnis anzuführen, daß sich die sämtlichen Transformationen als aus quadratischen zusammengesetzt ansehen lassen — ein Theorem, das, obwohl schon 1870 von deutscher und englischer Seite ausgesprochen, erst 1901 von den italienischen Geometern völlig sichergestellt wurde.

Wie übrigens die beiden Richtungen, in welche wir Cremonas Tätigkeit zerlegt haben, bei ihm nicht isoliert neben und nacheinander herlaufen, zeigte sich hier gerade darin, daß die eingehende Betrachtung der Jacobischen Kurve eines Netzes, die in die deutsche Ausgabe der „Introduzione" aufgenommen ist, durch die Ebenentransformationen angeregt erscheint. Auch in die „Preliminari" greift an einer Stelle die Theorie der rationalen Transformationen, die sich inzwischen unter den Händen von Cremona und Clebsch entwickelt hatte, ein: in dem schönen Beweis der Erhaltung der Geschlechtszahl bei sich eindeutig entsprechenden Kurven, mittels doppelter Bestimmung der Ordnung der Doppelkurve der Regelfläche, welche durch die entsprechende Punkte verbindenden Geraden erzeugt wird. Cremona dachte sich später eine noch engere Verbindung zwischen beiden Richtungen, ohne ihr aber näher zu treten: als im Juni 1871 von dem Verfasser dieses Aufsatzes auf die Zerlegung beliebiger Kurvensingularitäten mittels der Transformationen, etwa quadratischer, hingewiesen worden war, griff Cremona sogleich den Gedanken voll auf. „Sollte ich", bemerkte er brieflich schon unter unter dem 18. Juni, in deutscher Sprache, die er geläufig schrieb, „in Zukunft eine neue Ausgabe meiner geometrischen Werkchen über Kurven und Flächen bearbeiten, so werde ich mich bestreben, auf die Lehre der Transformationen und auf Ihr ··· Verfahren die Theorie der mehrfachen Punkte zu begründen; was so gewiß weit besser als anders gelingen wird." —

Der Gesichtspunkt der höheren Verwandtschaften führt Cremona über die Ebenentransformationen hinaus zu den eindeutigen *ebenen Abbildungen von Flächen*. Die erste Ausführung in dieser Richtung ist in der oben erwähnten Preisarbeit von 1866 über die Flächen dritter Ordnung enthalten.

Die Abbildung ist Cremona hierbei ein Mittel zur Behandlung der *Geometrie auf der Fläche dritter Ordnung*. Es erscheint unnötig, jetzt

im einzelnen zu berichten, wie diese Untersuchungsrichtung geometrisch und algebraisch sich entwickelt hat, da es in diesen Annalen bei Gelegenheit der Würdigung der Arbeiten von A. Clebsch durch den Verfasser bereits geschehen ist (Math. Ann. VII, S. 30—33). Nur sei daran erinnert, daß Cremona schon 1861 mit Chasles die Geometrie auf der Fläche 2^{ter} Ordnung aus deren projektiver Erzeugung studiert hatte. Jetzt, etwa um die Wende 1864/65, geht er, wie Clebsch, von der Graßmann-Steinerschen Erzeugung der allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung durch drei projektive Ebenenbündel aus, oder vielmehr von einer Verallgemeinerung: von der ein-eindeutigen Transformation des ganzen Raumes, welche durch drei projektive Ebenennetze bewirkt wird; hieraus studiert er das Geradensystem der Fläche nach allen Seiten, dann ihre Kurvensysteme. Genau zur Zeit, als diese Arbeit der Berliner Akademie eingereicht wurde, lag Clebschs dasselbe Thema mit denselben Mitteln behandelnder, nur algebraisch gehaltener Aufsatz von Oktober 1865 dem Crelleschen Journal vor (Cr. J. 65); und beide Arbeiten stimmen auch in den Spezialisierungen auf die Schnitte mit Flächen 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung und deren Beziehungen zu den Doppelsechsen von Geraden überein. Das Zusammentreffen wird genügend durch den beiderseitigen gleichen Ausgangspunkt erklärt: „Es macht mich sehr glücklich", schreibt Clebsch unter dem 21. Juli 1866 an Cremona, „mich mit Ihnen in diesen Untersuchungen zu begegnen, und ich werde mich freuen, Ihre Methoden kennen zu lernen; ein solches Zusammentreffen zeigt jedenfalls, daß man an der richtigen Stelle arbeitet". Für Cremonas Arbeit ist aber noch charakteristisch, einmal daß er auch die Beziehungen der speziellen Schnitte zur Polarentheorie hervorhebt, so der von Steiner angegebenen konjugierten Trieder, deren Ebenen einander je in Geraden der Fläche treffen und von denen u. a. nachgewiesen wird, daß die Scheitel jedes der 120 Paare korrespondierende Punkte der Hesseschen Fläche sind; sodann Realitätsuntersuchungen, auch mittels dieser Trieder.

Cremona geht hier in der Tat, wie er sich ausdrückt, in den Geist der mächtigen und lichtvollen Steinerschen Methoden ein; aber seine Grundlage ist eine noch allgemeinere, indem er die speziellen von Steiner gegebenen Erzeugungen einheitlich zusammenfaßt. Übrigens bleibt die Entwickelung der Geometrie einer Fläche aus als bekannt angenommener Erzeugung, ohne daß deren allgemeine Gültigkeit untersucht wird, sein wesentlicher Gesichtspunkt; und in dieser Richtung bewegen sich nun mehrere weitere Abbildungsarbeiten, parallel mit solchen von Clebsch.

In dem angeführten Briefe vom Juli 1866 hatte Clebsch ein aus der Abbildung auf ziemlich weitläufigem Wege analytisch erhaltenes Resultat über den algebraischen Charakter der Haupttangentenkurven (Raumkurven

4^{ter} Ordnung 2^{ter} Spezies) auf der *Steinerschen Fläche* angedeutet. Die Einfachheit des Resultats reizte Cremona, es auf geometrischem Wege aufzufinden, und schon im September konnte er die Abbildung der ebenen Schnitte der Fläche durch ein Kegelschnittsystem der Ebene und die der Haupttangentenkurven durch die dem „Polvierseit" des Systems einbeschriebenen Kegelschnitte melden (cf. die Note in Rend. Ist. Lomb. IV von Januar 1867). Seine früheren Betrachtungen über das vollständige Vierseit kamen ihm hier zu statten. Wiederum begegnete er sich mit Clebsch (Cr. J. 67); nur treibt er die Spezialisierungen der Fläche bei Koinzidenz der drei Doppelgeraden weiter, während er die windschiefen Flächen 3^{ter} Ordnung nicht als Spezialisierung behandelt. Bei den windschiefen Flächen n^{ter} Ordnung mit zwei vielfachen Leitgeraden hängt der algebraische Charakter der Haupttangentenkurven, den Cremona kurz darauf (Annali (2), I) aus Abbildung, aber analytisch, bestimmt, mit einem Lieschen Satz über einfach unendlich viele lineare Geradenkomplexe, denen diese Flächen angehören, zusammen (cf. diese Annalen V, S. 23, Anm.). Auch im Anschluß an Liesche Begriffe über Krümmungslinien zeigt Cremona (Mem. Acc. Bologna, I, 1870), wie diese Kurven für abbildbare Flächen nach der Abbildung konstruierbar sind.

Aus der Abbildungstätigkeit heraus sollte sich, ebenfalls noch in der Mailänder Zeit, die Erweiterung der Cremonaschen Ebenentransformationen, die *Theorie der ein-eindeutigen Raumtransformationen* entwickeln.

Sie führt zunächst wiederum auf die Preisarbeit von 1866 zurück, auf die dort betrachtete, oben erwähnte allgemeine Raumtransformation, welche zwei Räume einander so zuordnet, daß sie den Ebenen jedes Raumes im andern Flächen 3^{ter} Ordnung mit gemeinsamer Basiskurve 6^{ter} Ordnung vom Geschlecht 3 entsprechen läßt. Es ist eine Verallgemeinerung einer schon von Hesse und dann vielfach benutzten Verwandtschaft, welche auf drei symmetrisch-bilineare Gleichungen führt: der Zuordnung der Raumpunkte durch die Paare konjugierter Punkte bezüglich eines Bündels von Flächen 2^{ter} Ordnung. Aber 1866 verfolgte Cremona den allgemeinen Transformationsgedanken für den Raum nicht in dem Sinne weiter, in dem er es früher für die Ebene getan hatte; und auch dem etwaigen Zusammenhang seiner Abbildung der Steinerschen Fläche mit solchen Transformationen ging er nicht nach.

Inzwischen hatte nun Clebsch die Abbildungen auf neue Flächenarten ausgedehnt; und in Arbeiten des Verf. dieses Aufsatzes (diese Annalen II, 1869; die erste von III, 1870, „Über Flächen etc."), welche auf dem Boden der Cremonaschen Ebenentransformationen und der Clebschschen Abbildungen erwachsen sind, waren einerseits allgemein die bei Raum-

transformationen auftretenden Fundamentalgebilde untersucht worden, andrerseits waren, gerade zum Zwecke von ebenen Abbildungen mehrerer Flächen, als Hilfsmittel einige jener ein-eindeutigen 3-3-Raumtransformationen hervorgetreten, charakterisiert durch besonderes Zerfallen der Basiskurve 6^{ter} Ordnung; zugleich (III, p. 227) war die allgemeinere Verwendbarkeit dieses Hilfsmittels wenigstens angedeutet worden, und Cremona hatte letztere Arbeit in einem Kurs am Istit. Tecnico Superiore im Jahre 1870/71 behandelt. Im Dezember 1870 erschien zugleich eine Abhandlung von Cayley (Proc. London Math. Soc. III), in der der Begriff der allgemeinen ein-eindeutigen Raumtransformation, insbesondere derer durch drei bilineare Gleichungen, dargelegt und einige Fälle, insbesondere eine Transformation $2 - 3$, betrachtet waren, aber ohne die Abbildungen zum Ziel zu nehmen. Aus diesen Umständen sollte sich wieder ein Zusammentreffen eigenster Art entwickeln.

Es war der Gedanke des Zerfällens der Grundkurve der Transformation, der die Möglichkeit einer fruchtbringenden und umfassenden Anwendung dieser Theorie auf die Flächenabbildungen eingab, und zwar sowohl bei Cremona, als bei dem Verfasser dieser Würdigung. Während letzterer um die Wende des Jahres einen Aufsatz in dieser Richtung ausarbeitete („Über die eindeutigen Raumtransformationen", diese Annalen III, erschienen in den ersten Tagen des Mai 1871), ging auch Cremona, anschließend an seinen Kurs, in ganz demselben Sinne vor. Zunächst veröffentlicht er unter dem 9^{ten} und 23^{ten} März 1871 eine Note („Sulle superficie di quart' ordine, etc.", Rend. Ist. Lomb.) über einen speziellen Fall der bekannten Raumtransformation $2 - 2$, die im wesentlichen mit der durch reziproke Radien identisch ist: den interessanten Fall, daß Fundamentalpunkt und -Kegelschnitt zusammenrücken; und er verwendet diese Verwandtschaft, wie es übrigens gerade vorher mit dem allgemeinen Fall durch Geiser geschehen war (Cr. J. 70), zur ebenen Abbildung der Fläche 4^{ter} Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Anfang Mai aber übergibt er der Göttinger Societät eine Note („Über die Abbildung algebraischer Flächen", Gött. Nachr. vom 3. Mai 1871; mit Erweiterung des Schlusses abgedruckt in den Annalen IV, datiert vom 1. Juni), welche mit der genannten Annalenarbeit nicht nur in ihren Zielen und Mitteln, sondern auch in den Formulierungen völlig übereinstimmt: bis auf „minuti particolari" (cf. Cremonas Note vom 1. Juni in den Rend. Ist. Lomb.). Man sollte sich nicht darüber wundern — so etwa fährt Cremona fort —, wenn man die gegenseitige Abhängigkeit der Ausgangspunkte beachtet.

Aber wenn die beiden Arbeiten nach Zeit und Stoff: in der Charakterisierung des Transformationssystems, in der Aufstellung von Ausartungen und in deren Anwendungen im allgemeinen und im einzelnen zusammen-

fallen, abgesehen von der äußerlichen Form der mehr oder weniger geometrisch ausgesprochenen Methode, und abgesehen davon, daß Cremona die Schnittpunktsysteme der Fundamentalpunkte der Abbildungen nicht immer verfolgt, so geht Cremona nun darüber hinaus. Schon am Schluß der Göttinger Note wird eine ganze Reihe von neuen höheren Transformationen angedeutet, insbesondere von solchen $3-n$, nämlich 3^{ter} Ordnung mit einer Umkehrung der Ordnung $9 \geqq n > 3$; das leitende Prinzip entwickelt er in der Annalenausführung und in Noten vom 4. Mai und 1. Juni 1871 („Sulle trasformazioni razionali nello spazio", Rend. Ist. Lomb.; teilweise wiedergegeben in Annali V). Es besteht in einer Art von Umkehrung des früheren Prozesses, die Transformationen zu Abbildungen zu benutzen: aus einer bekannten ebenen Abbildung einer Fläche n^{ter} Ordnung wird eine Transformation n^{ter} Ordnung hergeleitet, nämlich ein dreifach unendliches System von Flächen n^{ter} Ordnung, dem jene Fläche angehört und dessen Flächen sich zu drei im allgemeinen in je einem beweglichen Punkte schneiden — ein „homaloidisches" System, dem die Ebenen des andern Raumes zugeordnet werden. Zur Herleitung genügt es nach Cremona, in der Ebene der Abbildung der gegebenen Fläche ein „homaloidisches" Netz von rationalen Curven anzunehmen, das, verbunden mit einer festen Kurve, die Abbildung von Schnitten der Fläche mit Flächen n^{ter} Ordnung vorstellt, welche dieselben vielfachen Linien und Punkte wie die gegebene Fläche enthalten. Freilich führt nicht jede abbildbare Fläche zu einer Raumtransformation; aber Cremona hat hier eine endlose Kette von neuen eindeutigen Transformationen und von Abbildungen hergestellt, bis zu kompliziertesten und singulärsten hin, die auf keine andere Weise vorauszusehen möglich gewesen wäre: in der Tat eine „unerschöpfliche Quelle" (diese Ann. IV).

Cremona hat selbst wiederholt aus dieser Quelle geschöpft. Er bearbeitet geometrisch und algebraisch die Transformation $2-4$ (Mem. Acc. Bologna (3), I, unter dem 4. Mai 1871), mit Abbildung einer speziellen Fläche 4^{ter} Ordnung, diesmal mit Untersuchung des Schnittpunktsystems; bald darauf (ibid. II, 1872) Abbildungen zweier Flächen mit Rückkehrkurven, Flächen, die er aus Transformation hervorgehen läßt. 1881 behandelt er, in den von ihm mit Beltrami herausgegebenen „Collectanea in Memoriam D. Chelini", die Fläche vierter Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt*); und noch 1884 untersucht er, im Anschluß an Entwickelungen Caporalis, seines Schülers, die reziproke Polare der allgemeinen Fläche dritter Ordnung aus der Abbildung letzterer Fläche (Transact. R. Soc. Edinburgh XXXII), und nach seinem Prinzip aufgestellte neue

*) cf. zur Ergänzung diese Annalen Bd. 33, p. 552.

Raumtransformationen 4—6 (R. Irish Acad. XXVIII) und 5—6 (Proc. London Math. Soc. XV). Erst ein geringer Teil des gewaltigen Stoffes ist in Angriff genommen; insbesondere bleibt häufig die Frage nach dem Grad der Allgemeinheit der abgebildeten Fläche noch zu erledigen.

Aus der Mailänder Zeit haben wir noch einiger Leistungen Cremonas zu gedenken. Für die *Regelflächen 4^ten Grades* liefert er mit Hilfe der Korrespondenztheorie eine Klassifikation, zugleich nach der Natur der Doppelkurve und der Enveloppe der Doppelebenen, wobei er den von Cayley gegebenen Arten acht neue zufügt (Mem. Acc. Bologna (2), VIII, 1868). Zwei Jahre später verknüpft er die Geradentheorie der Fläche 3^ter Ordnung mit *gruppentheoretischen* Untersuchungen. C. Jordan hatte (C. R. 1869) die Gruppe der Dreiteilung der ultraelliptischen Funktionen und den Übergang von ihrer Gleichung 40^ten Grades zu einer des 45^ten entwickelt, und war mittels einer Funktion von sechs Wurzeln der letzteren zu einer Resolvente 27^ten Grades gelangt, mit einer Gruppe, die derjenigen der Gleichung für die Geraden der Flächen 3^ter Ordnung isomorph ist. In dem umgekehrten Übergang von letzterer Gleichung zu einer solchen 40^ten Grades trafen nun beide Forscher zusammen (Jordan in C. R. Febr. 1870; Cremona in Rend. Ist. Lomb. III, März 1870). Mit Hilfe der früher behandelten konjugierten Trieder bildet Cremona aus den 45 dreifachen Tangentenebenen zwei Arten von Enneaedern, deren neun Ebenen je alle 27 Geraden umfassen; die hier in Frage kommenden Enneaeder der ersten Art sind wie die neun Wendepunkte einer Kurve 3^ter Ordnung zusammengesetzt, ihre Anzahl ist 40, und ihre Beziehungen sind genau dieselben, wie sie Clebsch in den Gött. Abh. von 1869 für die Gleichung 40^ten Grades der Dreiteilung entwickelt hat. —

Ein in Kooperation mit Brioschi und Casorati 1868/69 am Istituto Tecn. Sup. eingerichteter Kurs hat Cremona 1869 Anlaß zu einigen Noten aus der Theorie der *algebraischen Funktionen* gegeben. Cremonas Vorträge hatten den Zweck, in die algebraischen Teile der Theorie der Abelschen Funktionen von Clebsch-Gordan einzuführen, mit Verwertung des Ganges der „Introduzione". So entstand eine Darstellung der Einteilung der Integrale in Typen und des Abelschen Theorems (Mem. Acc. Bologna X), die etwas mehr geometrisch gehalten war als in jenem Buche; ferner eine Note über die Transformation der hyperelliptischen Kurven (Rend. Ist. Lomb. (2), II) und eine Note über die Anzahl der Moduln einer allgemeinen Kurvenklasse, die, wenn auch für $p = 5$ nicht zutreffend, für $p = 6$ sinnreich auf die Riemannsche Form oder auf die niedrigste Normalkurve mit 15 Moduln führt.

In der römischen Zeit, von 1873 an, hat die Forschertätigkeit Cremonas

keine neue Richtung eingeschlagen, wohl aber noch einige Früchte gebracht. Außer einigen schon erwähnten Transformationsarbeiten, und außer einer algebraischen Note von 1879 (Rend. Ist. Lomb. (2), XII) über Polyeder, die aus Schmiegungsebenen einer Raumkurve 3^{ter} Ordnung gebildet sind, ist besonders eine Untersuchung aus dem Jahre 1877 über das *Pascalsche Sechseck* („Teoremi stereometrici etc.", Atti. Acc. Linc. (3), I) mit der Fortsetzung über die Polarhexaeder der Fläche 3^{ter} Ordnung (diese Annalen XIII, vorgetragen auf der Münchener Naturforscherversammlung von 1877) hervorzuheben. Die Untersuchung ist durch eine Arbeit G. Veroneses, seines Schülers, angeregt, die Cremona im selben Bande der Atti mitgeteilt hatte. Von perspektiven Dreiecken ausgehend, hatte Veronese neue polare Konfigurationen innerhalb des Gebildes des Pascalschen Sechsecks gefunden und damit bekannte und neue Eigenschaften bewiesen. Durch eine räumliche Betrachtung, nämlich durch Projektion des Geradensystems einer Fläche 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt aus diesem auf eine Ebene, machte nun Cremona diese Eigenschaften intuitiv evident. Zwar hatte Cayley schon 1868 (Papers VI) die Projektion eines räumlichen Sechsseits benutzt; hier aber wurde das System der 15 nicht durch den Doppelpunkt gehenden Geraden, die je zu drei in 15 Ebenen liegen, verwendet und damit gerade das Wesentliche der Figur, während die unwesentlichen Schnittpunkte im Raume nur als scheinbare erschienen. Diese Seite der Frage ist weiterhin von Richmond (cf. diese Annalen LIII) unter Übergang zu ebenen Sechsräumen des vierdimensionalen Raumes verfolgt worden.

Wie Cremona weiter erkennt, genügte jede Figur von 15 Geraden, wie sie nach Ausschluß einer der 36 Doppelsechsen auf einer allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung liegt, zu demselben Zwecke; und diese Erkenntnis hat ihn zu einem interessanten Resultate geleitet, das in diesen Annalen XIII algebraisch ausgeführt wird: zu einem Zusammenhang zwischen der Geraden- und der Pentaedertheorie bei der allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung. Als „Kern" der räumlichen Figur tritt nämlich zunächst ein Sechsflach auf: die 15 Ebenen gruppieren sich in zehn Paare konjugierter Trieder, deren Scheitel in der Projektion die Steinerschen Punkte werden; und diese $2 \cdot 10$ Scheitel sind die Ecken des Sechsflachs. Bezieht man nun die Fläche auf dasselbe, so stellt sich ihre Gleichung als eine Summe von sechs Kuben dar; man hat also ein „Polsechsflach" vor sich, wie sie Reye 1873 (Cr. J. 78) als in vierfach unendlicher Zahl existierend für die Fläche nachgewiesen hat. Da nun nach Reye alle abwickelbaren Flächen 3^{ter} Klasse, welche je zweien solcher Polsechsflache einbeschrieben sind, fünf gemeinsame erzeugende Ebenen besitzen, so kommt man hier durch einfache Konstruktion aus zwei verschiedenen der 15-Systeme von

Geraden auf ein Pentaeder: das Pentaeder der allgemeinen Fläche 3^{ter} Ordnung. Hiermit war eine Frage gelöst, welche schon Clebsch sehr am Herzen gelegen hat (vgl. diese Annalen VII, S. 17). —

Die wiederholt hier berührten *pädagogischen Bestrebungen* Cremonas nehmen einen großen Teil seiner Tätigkeit ein. So zeugt ein Aufsatz (Atti Acc. Lincei III, 1876) über die Lieschen Beziehungen zwischen Linien- und Kugelgeometrie, mit vielen Anwendungen, von seinen, den Fortschritten der Wissenschaft zugewandten Vorträgen in Rom. Aus den Kursen heraus sind auch die Lehrbücher entstanden.

Zugleich mit dem Erscheinen von Culmanns Werk über die graphische Statik (1866) trat Cremona seine Professur für dieses Fach an; und ein für 1866/67 zusammengestellter lithographierter Kurs gibt schon von der Theorie des Culmannschen Trägheitsellipsoides für planare Trägheitsmomente und von den zugehörigen Polarbeziehungen mehr rein-geometrische Fassungen. Die projektiven Methoden haben ihm dann in einer Mailänder Gelegenheitsschrift von 1872, die seitdem wiederholt in verschiedenen Sprachen erschienen ist, „Le figure reciproche nella statica grafica", zu schönen und vielbenutzten graphischen Konstruktionen zur Bestimmung der Spannungen in Fachwerken Anlaß gegeben. Culmanns Seilpolygon und Kräftepolygon für ebene statische Probleme werden als Orthogonalprojektionen zweier Polyeder erhalten, die in Bezug auf ein Nullsystem reziprok sind; so zwar, daß die homologen Seiten der beiden ebenen Diagramme direkt ihre parallele Lage einnehmen, während bei einer früher von Maxwell gegebenen analogen Konstruktion, nur mit anderer Art der Reziprozität der Polyeder, noch eine Drehung eines der Polygone nötig war; und diese Konstruktion wird überhaupt und systematisch auf ebene Fachwerke mit zugehörigen reziproken Kräfteplänen ausgedehnt. Die Anwendbarkeit der Konstruktion beschränkt sich freilich auf ebene Fachwerke; und auch die rein-projektive Methode wird in der graphischen Statik neuerdings als unwesentlich erachtet. Zwei Jahre später gab Cremona auch ein Lehrbuch „Die Elemente des graphischen Kalkuls" (deutsch durch Curtze, Leipzig 1875) heraus, ein hübsches lehrreiches Werkchen, gedacht als Vorbereitung für die graphische Statik auf technischen Mittelschulen.

Aus Vorbereitung der Studierenden für die graphische Statik ist, wie vorher Reyes, so auch Cremonas Lehrbuch „Elemente der projektiven Geometrie" hervorgegangen (erste Auflage 1873; deutsch durch Trautvetter, Stuttgart 1882). Das Werk zeichnet sich durch einen einfachen Gang aus: aus den Projektivitätseigenschaften der Ebene, die zur Veranschaulichung zunächst durch Zentralprojektion aus dem Raume abgeleitet werden, aus den harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks

und aus der Dualität wird systematisch die Lehre von den Kegelschnitten gefolgert: Das Metrische, das Cremonas Geist wegen der Anwendungen nahe lag, wird, von vornherein und weiterhin, als Beispiel des Projektiven verfolgt, um das Interesse und das Verständnis für dieses zu fördern; nicht um jenes zu begründen. Dabei ist die Durchführung so glücklich, daß das Buch nicht nur den Technikern, sondern noch mehr für die Erziehung der Mathematiker selbst große Dienste geleistet hat. Eine Fortsetzung sollte bis zur analytischen Geometrie hingeleiten, ist aber nicht erschienen. Späterhin (Kurs 1898/99) dachte sich Cremona für die erste Einführung die synthetische und die analytisch-geometrische Richtung am besten in *einen* Lehrgang vereinigt, um möglichst leicht den Gesichtskreis zu erweitern; und aus diesem Bestreben sind auch G. Castelnuovos „Lezioni di Geometria analitica e proiettiva", vol. I, 1904, veranlaßt: diese Vereinigung und die Berücksichtigung der angewandten Mathematik waren bis zuletzt Gegenstand seiner Fürsorge. —

Bei einem Rückblick auf Cremonas Schaffen fällt äußerlich sein häufiges Zusammentreffen mit anderen Autoren auf. Es ist darauf zurückzuführen, daß Cremona ganz in seiner Zeit wurzelt und daß bislang unklare, in der Zeit reifgewordene Ideen sich leicht an verschiedenen Stellen plötzlich zu Theorien verdichten. Am häufigsten begegnete er Clebsch, der ebenfalls das offene Auge für die Probleme seiner Zeit hatte, und mit dem er überhaupt viele Vergleichspunkte darbietet. Die Freundschaft zwischen den Forschern beruhte in erster Linie auf der gegenseitigen Hochschätzung des systematischen Geistes des Einen, der analytischen Kraft in der Behandlung geometrischer Fragen des Andern, eine Teilnahme, die Beide ermutigte. Vor allem ist sie auf die Übereinstimmung in dem inneren Ideengehalt der beiderseitigen Methoden gegründet: sie entstand im Beginn der sechziger Jahre, als sich Beide mit den Problemen der Polarentheorie beschäftigten und sie hat sich nur noch vertieft, als sie 1866 in den Abbildungstheorien zusammengetroffen waren. „Wir leben glücklicherweise in einer Zeit, wo analytische und synthetische Geometrie aufgehört haben einander zu befeinden, und zufrieden sind voneinander zu lernen", schreibt Clebsch im Dez. 1863 und Cremona erwidert*) ebenso: „Ich bin voll überzeugt von der gegenseitigen Hilfe, die sich Analysis und Synthesis in der Geometrie leisten". Die von beiden Seiten her gekommenen Begriffsbildungen waren ihr gemeinsames Eigentum geworden; und während sie verschiedenen Ausgangspunkt hatten, stand doch ihre intuitive Erfassung der Probleme unter demselben Zeichen:

*) Nach dem o. c. Nachruf Veroneses.

Plücker. Endlich bildet auch die Art des Denkens einen gemeinsamen Grundzug: ganz entfernt von der Richtung auf Lösung bestimmter Einzelfragen oder auf abstrakte Prinzipienfragen ergingen sich beide Forscher in freier Schaffenstätigkeit und wurden *schöpferisch in der Methodik* ihrer Wissenschaft.

Wenn Cremona an der jetzt in Italien sich ausbreitenden Tendenz nach abstrakt-begrifflichen Untersuchungen keinen Anteil hatte, so ist seine generalisierende Kraft, der Geist der allgemeinen Auffassung, aus seinen Büchern und seinen Transformationsforschungen um so rascher und tiefer in die geometrische Richtung seines Landes eingedrungen; und die Arbeit des Forschers und Methodikers ist ein fester Bestandteil der Geschichte der reinen Geometrie überhaupt geworden.

Erlangen, März 1904.

Nachtrag.

Nach Fertigstellung des Druckes dieses Aufsatzes (Mai 1904) sind weitere Nachrufe auf Cremona erschienen von:

F. Enriques (Rend. Acc. Bologna, v. 13. März 1904);
E. Bertini (Proc. Lond. Math. Soc., (2), I, part 7);
G. Loria (Bibliotheca Math., (3), V, H. 2, mit genauem Verzeichnis der Arbeiten Cremonas);
R. Sturm (Arch. d. Math. u. Phys., (3), VIII, H. 1).

Hiernach, insbesondere nach dem eingehenden Berichte des Herrn Loria, sind in dem Aufsatze folgende Verbesserungen vorzunehmen:

S. 2, Z. 1—2: statt „städtischen Beamten" lies „niederen Beamteten"
„ 2, „ 14 füge hinzu: „1853 erhielt Cremona in Pavia auch den akademischen Grad eines Ingenieurdoktors".
„ 2, Anm.: die hier gemeinte Schrift ist eine im Giorn. di Mat. III (1865) erschienene Note.
„ 3, Z. 15: statt „1866" lies „1867".
„ 3, „ 31: „ „1885" „ „1887".
„ 15, „ 9: „ „Arten acht" lies „acht Arten vier".
„ 17, „ 12: „ „1866/67" lies „1867/68".
„ 18, „ 9: „ „Kurs 1898/99" lies „Kurse von 1888 an".

[20. Juli 1904.]

Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Par

S. BERNSTEIN à Paris.

Introduction.

Tous les géomètres et physiciens semblent aujourd'hui d'accord que le domaine d'application des mathématiques n'a d'autres limites que les limites de nos connaissances mêmes. Il serait pourtant bien téméraire d'affirmer que nous nous trouvons déjà en possession des symboles les mieux appropriés pour interpréter simplement les phénomènes de la nature. Il est au contraire beaucoup plus probable que bien des théories mathématiques aujourd'hui en estime ne seront admirées plus tard que comme des chefs d'oeuvre historiques, et d'autres théories aussi belles et aussi parfaites, mais d'une application plus large viendront les remplacer.

Parmi les théories modernes qui ont été le plus développées dans la deuxième moitié du XIX siècle, la théorie des fonctions analytiques occupe certainement la première place. Pourtant, son importance continue à s'accroitre de jour en jour. Cela tient principalement à deux choses. D'une part *les équations algébriques, fonctionnelles et différentielles ordinaires conduisent en général à des fonctions analytiques.* D'autre part *il existe des classes d'équations aux dérivées partielles dont toutes les solutions sont analytiques.*

De ce dernier fait résulte d'ailleurs un théorème fondamental de Weierstrass qui sert de pont entre la théorie des fonctions analytiques et la théorie générale des fonctions: à savoir, que toute fonction bornée et intégrable peut être considérée comme limite d'une suite de polynomes.

Le but principal de mon travail est de démontrer un théorème très général énoncé par M. Hilbert au Congrès International des Mathématiciens à Paris en 1900 au sujet de la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. Ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante. *Soit z une fonction de x et y dont les*

dérivées des trois premiers ordres sont finies et continues; si elle est une solution de l'équation $F\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$, *$F$ étant analytique, et si elle vérifie l'inégalité* $4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0$, *elle est analytique**). Il résulte en particulier de ce théorème que tous les problèmes réguliers du calcul des variations c'est à dire ceux auxquels on est en général conduit en géométrie, mécanique et physique ne sont susceptibles que de solutions analytiques.

On connait depuis Cauchy le lien étroit qui existe entre les fonctions *harmoniques* (vérifiant l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$) et les fonctions *analytiques*. Ce n'est qu'en 1890 que M. Picard a généralisé la propriété des fonctions harmoniques: notamment il a montré que *toutes les solutions dont les dérivées des deux premiers ordres sont finies et continues de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$, *où a, b, c sont des fonctions analytiques de x et y, sont elles mêmes analytiques.* En 1895 (Comptes Rendus t. 121) M. Picard a démontré un théorème analogue pour une classe spéciale d'équations linéaires d'ordre quelconque. Sous l'influence de M. Hilbert la méthode de M. Picard a été reprise par M. Lutkemeyer (Göttingen, Dissertation 1902) et M. Holmgren (Mathemat. Annalen 1903) qui établirent indépendemment l'un de l'autre le théorème que nous avons en vue dans le cas particulier, où $F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Déjà sous cette forme, le théorème de M. Hilbert est intéressant, car il montre, par exemple, que toutes les surfaces à courbure constante positive sont analytiques.

Dans mes modestes recherches je fus également inspiré par MM. Picard et Hilbert: par le premier pour les moyens, par le second pour le but. C'est en modifiant convenablement la méthode de M. Picard que je suis parvenu à résoudre complètement le problème posé par M. Hilbert. En exprimant ma profonde reconnaissance aux deux illustres maîtres, je tiens à remercier tout spécialement M. Hilbert de m'avoir personnellement recommandé ce sujet intéressant.

Je commencerai par exposer dans le premier chapitre la méthode de M. Picard et son application au cas de MM. Lutkemeyer et Holmgren. Je montrerai que sous sa forme primitive elle est inapplicable au cas général et j'indiquerai sommairement la nature des changements necessaires pour arriver au but. Dans le second chapitre j'étudie une nouvelle forme

---

*) On trouvera un résumé de ma démonstration dans une Note des Comptes Rendus, Novembre 1903.

de séries. Ce sont les résultats de cette étude qui nous permettront de vaincre les difficultés, indiquées dans le chapitre précédent. Dans le troisième chapitre je démontre le théorème de M. Hilbert pour

$$F = z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y}, \quad (z>0)$$

en entrant dans tous les détails de calcul. Dans le quatrième je donne la démonstration générale et je développe quelques considérations générales relatives à la *résolution du problème de Dirichlet.* Enfin, dans le dernier chapitre j'examine les équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi\left(xyz\frac{\partial z}{\partial x}\right);$$

j'établis, en particulier, que *la première admet des solutions (autant de fois dérivables qu'on le veut) non analytiques par rapport à x et y, tandisque toutes les solutions de la seconde sont analytiques par rapport à x, mais peuvent ne pas être analytiques par rapport à y.*

Chapitre I.

Méthode de M. Picard.

1. La méthode des approximations successives de M. Picard*) appliquée aux équations aux dérivées partielles quoique connue par tous les spécialistes ne fait pourtant pas encore partie de l'enseignement; c'est pourquoi je ne crois pas inutile de la rappeller ici sous la forme qui semble se prêter le mieux aux généralisations que j'ai en vue.

Soit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz, \tag{1}$$

une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, où a, b, c sont des fonctions analytiques de x et y. Je suppose que z est une solution admettant des dérivées des deux premiers ordres par rapport à x et y, finies et continues dans une certaine région S comprenant l'origine O à son intérieur. On sait que cette solution est complètement déterminée**) par l'ensemble de valeurs qu'elle prend sur une circonférence C de rayon R suffisamment petit située à l'intérieur de S. Si donc par une méthode quelconque nous trouvons une solution $u(xy)$ admettant des dérivées finies et continues des deux premiers ordres et prenant sur C les mêmes valeurs que z, on aura identiquement $u = z$.

*) Voir surtout: «Journal de l'École Polytechnique» 1890 et «Acta Mathematica» 1902.

**) Em. Picard «Traité d'Analyse» t. II. Ch. I, § 3.

Etudions de plus près les conséquences que comporte pour z l'hypothèse d'avoir ses dérivées des deux premiers ordres finies et continues.

Evidemment,

$$(2) \qquad z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}\varphi_1 x^2 + \varphi_2 xy + \frac{1}{2}\varphi_3 y^2$$

où z_0, p_0, q_0 sont des constantes et φ_1, φ_2, φ_3 des fonctions de x et y qui à l'intérieur de S sont inférieures en valeur absolue à un nombre fixe M qui est la limite supérieure des dérivées de z à l'intérieur de S. De même

$$(3) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \psi_1 x + \psi_2 y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \pi_1 x + \pi_2 y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \chi_1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \chi_2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \chi_3$$

où ψ, π et χ sont des fonctions de x et y inférieures en valeur absolue à M à l'intérieur de la région S.

En posant $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$, il vient

$$z = z_0 + \varrho (p_0 \cos\theta + q_0 \sin\theta) + \varrho^2 \Phi_0(\varrho, \theta),$$
$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \varrho \Phi_1(\varrho, \theta), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \varrho \Phi_2(\varrho, \theta),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi_3(\varrho, \theta), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi_4(\varrho, \theta), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \Phi_5(\varrho, \theta)$$

où les Φ sont des fonctions périodiques par rapport à θ qui pour toute valeur réelle de θ et pour ϱ positif et inférieur à un nombre fixe R' sont inférieures en valeur absolue à $2M$.

En remarquant que $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} y + \frac{\partial z}{\partial y} x$ on déduit des équations (4)

$$(5) \qquad \frac{\partial \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta} = -\Phi_1 \sin\theta + \Phi_2 \cos\theta < 4M.$$

Et ensuite à cause de $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2 - \frac{\partial z}{\partial x} x - \frac{\partial z}{\partial y} y$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \Phi_0(\varrho, \theta)}{\partial \theta^2} = \Phi_3 \sin^2\theta - 2\Phi_4 \sin\theta\cos\theta + \Phi_5 \cos^2\theta - \Phi_1 \cos\theta - \Phi_2 \sin\theta < 10M.$$

D'où il résulte que sur la circonférence C de rayon $R < R'$, $\Phi_0(\varrho, \theta)$ est développable en série trigonométrique et on a

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta$$

avec les inégalités:

$$(7) \qquad |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + |d_n| < 82M < N, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 200M^2 + 4 < N.$$

En effet, on a d'abord

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_0 d\theta \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_0 \cos n\theta\, d\theta = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\cos n\theta\, d\theta,$$

$$d_n = -\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\theta^2}\sin n\theta\, d\theta.$$

D'où

$$|c_0| < 2M, \quad |c_n| < \frac{20M}{n^2} \quad \text{et} \quad |d_n| < \frac{20M}{n^2}.$$

Cela suffit pour établir la première des inégalités (7). Pour avoir la seconde nous nous servirons d'une identité fondamentale*) qui est applicable à toute fonction $f(\theta)$ bornée et intégrable:

$$\int_0^{2\pi}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}f(\theta)\,d\theta\right]^2$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\, d\theta\right]^2+\left[\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\, d\theta\right]^2\right\}.$$

Donc, comme $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$ est bornée et intégrable, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{c_n^2n^4+d_n^2n^4\} < 2(10M)^2.$$

Si $|c_n n| \geqq c_n^2 n^4$, on a $|c_n| \leqq \frac{1}{n^3}$. Il en résulte que dans tous les cas

$$\sum_1^{\infty} n\{|c_n|+|d_n|\} < 200M^2+4.$$

Les inégalités (7) sont donc établies.

On en déduit immédiatement en tenant compte des formules (4) que sur C

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta + \beta_n \sin n\theta. \tag{8}$$

Avec les conditions

$$|\alpha_0 - z_0| + \sum_1^{\infty}|\alpha_n| + |\beta_n| < 2MR + NR^2 < LR,$$

$$\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_2^{\infty}\frac{n}{R}\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < NR < LR.$$

*) Voir, par exemple, M. Hurwitz «Sur les applications géométriques etc.» Annales de l'École Normale 1902.

Ce sont là des propriétés fondamentales de la fonction z que nous nous proposions d'établir.

2. Ceci posé, considérons avec M. Picard le système d'équations suivant:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=0,\\
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=a\frac{\partial u_0}{\partial x}+b\frac{\partial u_0}{\partial y}+cu_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+cu_{n-1}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Déterminons d'abord u_0 par la condition que $u_0 = z$ sur la circonférence C. Portons ensuite la valeur de la fonction u_0 ainsi trouvée dans la seconde équation. Cette équation détermine à son tour u_1 par la condition que sur C $u_1 = z$. Et ainsi de suite. On obtient ainsi une succession infinie de fonctions bien déterminées $u_0 u_1 u_2 \cdots u_n$. Je dis que si n croissant indéfiniment, u_n tend uniformément vers une fonction u et les dérivées de u_n des deux premiers ordres par rapport à x et y vers les dérivées respectives de u, u vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu \tag{1}$$

en prenant sur la circonférence C les mêmes valeurs que z. En effet, on devrait avoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}-cu=\zeta_n$$

où ζ_n peut devenir inférieur à tout nombre donné d'avance. Comme le premier membre est déterminé pour un couple de valeurs x et y, il est identiquement nul. On reconnait aussi en répétant le même raisonnement classique que $u = z$ sur C. Je rappelle ce que j'ai dit au début que si le rayon R du cercle C est assez petit, u et z se confondent aussi à l'intérieur de C. Je ne reviendrai plus sur ce point en admettant une fois pour toutes que R a été choisi assez petit pour qu'une solution donnée par ses valeurs sur C soit déterminée sans ambiguité. D'autre part je puis écrire évidemment

$$u_n = u_0 + (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1}).$$

Donc, pour que u_n tende uniformément vers une fonction u, il faut et il suffit que la série

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots \tag{11}$$

où $v_n = u_n - u_{n-1}$ converge uniformément.

Nous voulons démontrer d'après M. Picard non seulement que cette série converge ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, mais qu'elle représente en outre une fonction analytique.

Du système d'équations (10) on déduit immédiatement en retranchant chaque équation de la suivante un nouveau système

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0,\\
&\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + cv_{n-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

qui détermine directement $u_0 v_1 v_2 \cdots v_n$ en supposant que sur C $u_0 = s$ et $v_n = 0$.

C'est la résolution du système d'équations (12) que nous substituons finalement à l'équation (1). On voit que sauf la première équation de ce système qui est une équation de Laplace toutes les autres sont de la forme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(xy). \tag{13}$$

Nous devons donc chercher d'abord la solution de l'équation (13) qui s'annulle sur C.

Mais il nous faut avant établir quelques propositions préliminaires.

3. Lemme. *Soit $F(xy)$ une fonction analytique des variables complexes x et y régulière tant que $|x+yi| \leqq R$ et $|x-yi| \leqq R$. Si on pose $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on a*

$$F(xy) = F(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta$$

avec

$$A_n(\rho) = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{pn}\rho^{2p} \quad \text{et} \quad B_n(\rho) = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{pn}\rho^{2p},$$

la série

$$N = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{pn}| + |\beta_{pn}|]$$

étant convergente.

En effet, si nous considérons $F(xy)$ comme fonction de $s_1 = x + yi$ et $s_2 = x - yi$, on a

$$F(xy) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} b_{pq} s_1^p s_2^q,$$

ce développement étant absolument convergent tant que $|z_1| \leqq R$, $|z_2| \leqq R$. Or

$$z_1^p z_2^q = \rho^{p+q}[\cos(p-q)\theta + i \sin(p-q)\theta].$$

En posant $p - q = \pm n$ suivant que $p > q$ ou $q > p$, on obtient bien

$$F(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho) \cos n\theta + B_n(\rho) \sin n\theta$$

avec

$$A_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{pn} \rho^{2p} \quad \text{et} \quad B_n = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{pn} \rho^{2p}.$$

De plus on voit que $\alpha_{lk} = b_{l,l+k} + b_{l+k,l}$ et $\beta_{lk} = i[b_{l+k,l} - b_{l,l+k}]$. Donc la série

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{pn}| + |\beta_{pn}|] \leqq 2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q} |b_{pq}|$$

est convergente. C. q. f. d.

Nous appellerons $N = [F(xy)]_R$ *norme de* $F(xy)$ *ou du développement trigonométrique correspondant relative à* R. Plus tard nous généraliserons cette définition.

Réciproque. *Si on a un développement trigonométrique*

$$\Phi(\rho\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho) \cos n\theta + B_n(\rho) \sin n\theta,$$

où

$$A_n(\rho) = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{pn} \rho^{2p}, \qquad B_n(\rho) = \rho^n \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{pn} \rho^{2p}$$

et que sa norme N *soit finie, en posant* $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $\Phi(\rho\theta)$ *devient une fonction analytique de* x *et* y $F(xy)$ *régulière tantque* $|x+yi| < R$ *et* $|x-yi| < R$.

En effet, en posant comme nous venons de le faire $x + yi = z_1$, $x - yi = z_2$, on constate que

$$\Phi(\rho\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{pq} z_1^p z_2^q$$

où

$$b_{l,l+k} = \frac{\alpha_{lk} + i\beta_{lk}}{2}, \quad b_{l+k,l} = \frac{\alpha_{lk} - i\beta_{lk}}{2}.$$

De sorte que la serie

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} R^{p+q} |b_{pq}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} R^{n+2p}[|\alpha_{pn}| + |\beta_{pn}|] = N$$

converge et par conséquent $\Phi(\rho\theta) = F(xy)$ est une fonction analytique de x, y régulière pour $|x+yi| < R$ et $|x-yi| < R$. C. q. f. d.

Il est évident que la norme d'une somme de deux fonctions est au plus égale à la somme des normes de ces mêmes fonctions. D'après nos notations cela s'écrit

$$(14)' \qquad [f(xy)+\varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R + [\varphi(xy)]_R.$$

Pareillement

$$(14)'' \qquad [f(xy)\cdot\varphi(xy)]_R \leqq [f(xy)]_R \cdot [\varphi(xy)]_R.$$

En effet, soit

$$f(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho)\cos n\theta + B_n(\rho)\sin n\theta$$

$$\varphi(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\rho)\cos n\theta + D_n(\rho)\sin n\theta$$

(après avoir posé, bien entendu, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$).

Puisque le produit $f\cdot\varphi$ est une somme de termes analogues à

$$A_p(\rho)D_q(\rho)\cos p\theta \sin q\theta = \frac{A_pD_q}{2}[\sin(p+q)\theta + \sin(q-p)\theta]$$

et que

$$\left[\frac{A_p(\rho)D_q(\rho)}{2}\left(\sin(p+q)\theta+\sin(q-p)\theta\right)\right]_R \leqq \overset{+}{A}_p(R)\cdot\overset{+}{D}_q(R)$$

où $\overset{+}{A}_p(R)$ et $\overset{+}{D}_q(R)$ sont respectivement les séries qu'on obtient en remplaçant dans $A_p(\rho)$ et $D_q(\rho)$ tous les coefficients par leurs modules et ρ par R, on déduit à l'aide de l'inégalité (14)' l'inégalité (14)''.

En combinant les deux inégalités (14)' et (14)'' on arrive immédiatement à l'inégalité générale

$$(14) \quad [F(f_1(xy), f_2(xy)\cdots f_n(xy))]_R \leqq \overset{+}{F}([f_1(xy)]_R[f_2(xy)]_R\cdots[f_n(xy)]_R)$$

où F désigne un développement de Taylor quelconque suivant les puissances de $f_1 f_2\cdots f_n$ et $\overset{+}{F}$ est le même développement, lorsqu'on y remplace tous les coefficients par leurs modules.

4. Ceci posé, reprenons l'équation (13), où nous supposerons que $F(xy)$ admet une norme finie $[F(xy)]_R$ et par conséquent est analytique à l'intérieur du cercle C de rayon R. Un calcul facile montre que si on fait le changement de variables $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ et qu'on cherche à mettre $v(xy)$ sous la forme

$$v(xy) = v(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = C_0(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\rho)\cos n\theta + D_n(\rho)\sin n\theta$$

on a pour déterminer $C(\varrho)$ et $D(\varrho)$ les équations:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dC_n}{d\varrho}-\frac{n^2}{\varrho^2}C_n=A_n(\varrho),\\ &\frac{d^2D_n}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dD_n}{d\varrho}-\frac{n^2}{\varrho^2}D_n=B_n(\varrho) \end{aligned} \tag{15}$$

si

$$F(xy)=A_0(\varrho)+\sum_1^\infty A_n(\varrho)\cos n\theta+B_n(\varrho)\sin n\theta.$$

Si on veut que $v(xy)$ soit régulière pour $x=0$, $y=0$ et qu'elle s'annulle sur la circonférence C, il faut prendre pour $C_n(\varrho)$ et $D_n(\varrho)$ les solutions des équations (15) régulières à l'origine et s'annullant pour $\varrho=R$. On est ainsi amené aux formules:

$$C_0(\varrho)=\int_R^\varrho\frac{d\varrho}{\varrho}\int_0^\varrho\varrho A_0\,d\varrho,$$

$$2nC_n(\varrho)=\varrho^n\int_R^\varrho\frac{A_n}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho-\frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho A_n\varrho^{n+1}d\varrho+\frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R A_n\varrho^{n+1}d\varrho, \tag{16}$$

$$2nD_n(\varrho)=\varrho^n\int_R^\varrho\frac{B_n}{\varrho^{n-1}}\,d\varrho-\frac{1}{\varrho^n}\int_0^\varrho B_n\varrho^{n+1}d\varrho+\frac{\varrho^n}{R^{2n}}\int_0^R B_n\varrho^{n+1}d\varrho.$$

Je rappelle que

$$A_n=\varrho^n\sum_{p=0}^\infty\alpha_{pn}\varrho^{2p},\qquad B_n=\varrho^n\sum_{p=0}^\infty\beta_{pn}\varrho^{2p}.$$

On voit immédiatement qu'on a de même*)

$$\begin{aligned} C_n(\varrho)&=\varrho^n\sum_{p=0}^\infty\gamma_{pn}\varrho^{2p}=\frac{\varrho^n}{R^{n-2}}\sum_{p=0}^\infty\left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}}-1\right)\frac{\alpha_{pn}}{(2p+2)(2p+2n+2)},\\ D_n(\varrho)&=\varrho^n\sum_{p=0}^\infty\delta_{pn}\varrho^{2p}=\frac{\varrho^n}{R^{n-2}}\sum_{p=0}^\infty\left(\frac{\varrho^{2p+2}}{R^{2p+2}}-1\right)\frac{\beta_{pn}}{(2p+2)(2p+2n+2)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Les formules (17) subsistent pour $n=0$.

On vérifie facilement en désignant comme tout à l'heure par $\overset{+}{A}(R)$, $\overset{+}{B}(R)$ etc. les séries respectives qu'on obtient en remplaçant dans $A(\varrho)$ et $B(\varrho)$ tous les coefficients par leurs modules et ϱ par R, que

*) Voir Em. Picard «Sur la généralisation du problème de Dirichlet» Acta Mathematica 1902.

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\overset{+}{C}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2}\overset{+}{A}_n(R), \qquad \frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2}\overset{+}{A}_n(R),\\ &\overset{+}{D}_n(R) < \frac{R^2}{2n+2}\overset{+}{B}_n(R), \qquad \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho} < \frac{R}{2}\overset{+}{B}_n(R). \end{aligned}$$

Ces inégalités sont fondamentales. Plus tard en généralisant la notion de norme nous trouverons des inégalités plus précises. Pour le moment les inégalités (18) nous suffisent.

D'abord, il en résulte immédiatement que

$$(19)\qquad [v(xy)]_R = \overset{+}{C}_0(R) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\overset{+}{C}_n(R) + \overset{+}{D}_n(R)\right\} < R^2[F(xy)]_R.$$

Ensuite on démontre facilement que

$$(19^{bis})\qquad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_R < 2R[F(xy)]_R, \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_R < 2R[F(xy)]_R.$$

En effet,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\varrho}.$$

Or

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \varrho}\cos\theta\right]_R < \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho}\right\} < R[F(xy)]_R$$

et

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\varrho}\right]_R < \sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\frac{\overset{+}{C}_n(R)}{R} + \frac{\overset{+}{D}_n(R)}{R}\right\} < \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{d\overset{+}{C}_n(R)}{d\varrho} + \frac{d\overset{+}{D}_n(R)}{d\varrho}\right\} < R[F(xy)]_R.$$

On a donc bien

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_R < 2R[F(xy)]_R.$$

Un calcul absolument identique nous conduirait à la seconde des inégalités (19^{bis}).

5. Ces préliminaires un peu longs étant établis, nous avons tous les éléments nécessaires pour démontrer que la série (11) converge uniformément et représente une fonction analytique à l'intérieur du cercle C de rayon R, pourvu que R soit assez petit.

En effet, reportons nous au système (12). Puisque $u_0 = z$ sur C, on a évidemment à cause de la formule (8)

$$u_0 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n[\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta].$$

Des inégalités (9) nous tirons facilement

$$[u_0(xy)]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial x}\right]_R < P, \quad \left[\frac{\partial u_0}{\partial y}\right]_R < P$$

où P est un nombre fixe. En appliquant les inégalités (14)′ et (14)″ et en désignant par Q un nombre supérieur à $[a(xy)]_R$, $[b(xy)]_R$, $[c(xy)]_R$ normes des fonctions $a(xy)$, $b(xy)$, $c(xy)$ qui figurent dans l'équation (1), on a

$$\left[a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0\right]_R < 3PQ.$$

Au moyen des inégalités (19) et (19bis) on déduit ainsi d'abord

$$[v_1]_R < 3PQ\cdot R^2 \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R < 3PQ\cdot 2R \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R < 3PQ\cdot 2R.$$

(Nous supposerons $R<1$.)

De sorte que

$$\left[a\frac{\partial v_1}{\partial x} + b\frac{\partial v_1}{\partial y} + cv_1\right]_R < 3PQ\cdot 6QR.$$

Donc successivement

$$[v_2]_R < P\cdot(6QR)^2 \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R < P\cdot(6QR)^2 \quad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R < P\cdot(6QR)^2,$$

$$[v_3]_R < P\cdot(6QR)^3 \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial x}\right]_R < P\cdot(6QR)^3 \quad \left[\frac{\partial v_3}{\partial y}\right]_R < P\cdot(6QR)^3,$$

. . . . . .

$$[v_n]_R < P\cdot(6QR)^n \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R < P\cdot(6QR)^n \quad \left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R < P\cdot(6QR)^n.$$

. . . . . .

Il suffit par conséquent de supposer $R < \frac{1}{6Q}$ pour que *la série* $u = u_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$ *soit non seulement uniformément convergente sur le cercle C et à son intérieur, mais ait une norme finie et par conséquent (d'après le lemme réciproque du* § 3) *soit analytique.* On voit directement que les séries

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x} + \cdots \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \cdots$$

convergent uniformément; mais il suffit de constater que la série de fonctions analytiques $u = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$ converge absolument et uniformément pour $|x+yi| = R$ et $|x-yi| = R$, pour pouvoir affirmer que toutes les séries dérivées d'ordre fini convergent uniformément pour $|x+yi| < R$, $|x-yi| < R$. Il est ainsi établi que u est une solution de l'équation (1) qui se confond avec z.

6. Nous pouvons tout de suite généraliser le théorème de M. Picard et obtenir les résultats de MM. Lutkemeyer et Holmgren.

Théorème de MM. Lutkemeyer et Holmgren. *Toutes les solutions de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{20}$$

$\left(f \text{ est une fonction analytique de } xyz\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, *dont les dérivées des deux premiers ordres sont finies et continues, sont analytiques.*

Grâce aux modifications que j'ai introduites dans l'exposition de la méthode de M. Picard (en particulier, aux inégalités (9)) je puis ne pas supposer, comme le font MM. Lutkemeyer et Holmgren, l'existence des dérivées troisièmes.

A l'équation (20) nous substituons le système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=f(00z_0p_0q_0)=A,\\
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f\left(xyu_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}=f\left(xyu_{n-1}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{21}$$

z_0, p_0, q_0 sont les valeurs à l'origine d'une solution z de (20) et de ses dérivées premières, $u_0, u_1, \cdots, u_n$ devront comme auparavant se confondre avec z sur une certaine circonférence C de rayon R suffisamment petit (j'admettrai ici ce que je démontrerai plus loin d'une façon générale que pour R assez petit l'équation (20) ne peut avoir plus d'une solution prenant une succession donnée de valeurs sur C et ayant des dérivées finies et continues des deux premiers ordres). Mettons de nouveau u sous la forme $u=u_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots$ avec $v_n=u_n-u_{n-1}$. Il s'agit de voir que $u=z$ est analytique.

Le système (21) se remplace comme précedemment par

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=A,\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=f\left(xyu_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-A,\\
&\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=f\left(xyu_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)-f\left(xyu_0\,\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=f\left(xyu_{n-1}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)-f\left(xyu_{n-2}\,\frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right).\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{22}$$

On aura d'abord en vertu des inégalités (9) et de la remarque que $A\frac{x^2+y^2-R^2}{4}$ est la solution de l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=A$ (A est une constante) qui s'annulle sur C

$$(23)\qquad \begin{aligned} &[u_0-z_0]_R < AR^2+LR<\lambda,\\ &\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right]_R<AR+LR<\lambda,\\ &\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0\right]_R<AR+LR<\lambda. \end{aligned}$$

En prenant R assez petit on peut rendre λ aussi petit qu'on veut. Or

$$f\left(xyu_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-f(00z_0p_0q_0)=P_0\cdot x+P_1\cdot y+P_2\cdot(u_0-z_0)+P_3\cdot\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right)+P_4\cdot\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0\right)$$

où les P sont des fonctions analytiques de $x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}$ qu'on peut supposer telles que, si dans chacun de leurs développements de Taylor suivant les puissances de $x, y, u_0-z_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0, \frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0$ on remplace tous les coefficients par leurs modules et $x=y=u_0-z_0=\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0=\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0$ par un certain nombre positif R', on obtient une somme inférieure à un nombre fixe Q.

D'une façon générale

$$f\left(xyu_n\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)-f\left(xyu_{n-1}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)=P_2v_n+P_3\frac{\partial v_n}{\partial x}+P_4\frac{\partial v_n}{\partial y}$$

où les P sont des fonctions de $x, y, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_n}{\partial y}, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}$ telles que, si dans chacun de leurs développements de Taylor suivant les puissances de $x, y, u_n-z_0, \frac{\partial u_n}{\partial x}-p_0, \frac{\partial u_n}{\partial y}-q_0, u_{n-1}-z_0, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}-p_0, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}-q_0$, on remplace toutes les variables par le nombre R' et tous les coefficients par leurs modules, on obtient une somme inférieure à Q. Supposons qu'on connaisse u_n et ses dérivées en fonction de x et y et qu'on sache que la *norme* de chacune des différences $u_n-z_0, \frac{\partial u_n}{\partial x}-p_0, \frac{\partial u_n}{\partial y}-q_0$ est inférieure à R'.

Il résulte alors de l'inégalité (14) que la *norme* de P_i (qui se réduit à une fonction de x et y) est inférieure à Q. La démonstration s'achève maintenant sans difficultés.

D'abord en vertu des inégalités (23)

$$\left[f\left(xyu_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)-f(00z_0p_0q_0)\right]_R<2QR+3Q\lambda=L_1.$$

Et à cause de (19) et (19^{bis}), en supposant $R<1$:

$$[v_1]_R<2RL_1,\quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R<2RL_1,\quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R<2RL_1.$$

D'où

$$\left[f\left(xyu_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)-f\left(xyu_0\frac{\partial u_0}{\partial x}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]_R<6QRL_1.$$

Et successivement

$$[v_2]_R<2RL_1\cdot 6QR,\qquad \left[\frac{\partial v_2}{\partial x}\right]_R<2RL_1\cdot 6QR,\qquad \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R<2RL_1\cdot 6QR,$$

. . . . . .

$$[v_n]_R<2RL_1\cdot(6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R<2RL_1\cdot(6QR)^{n-1},\ \left[\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]_R<2RL_1\cdot(6QR)^{n-1}.$$

Il est essentiel toutefois de supposer toujours

$$[u_0-z_0]_R+[v_1]_R+[v_2]_R+\cdots+[v_n]_R<R',$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right]_R+\left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_R+\cdots+\left[\frac{\partial v_n}{\partial x}\right]_R<R',$$
$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0\right]_R+\left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_R+\cdots+\left[\frac{\partial v_n}{\partial y}\right]_R<R'$$

ou bien en supposant $R<\frac{1}{6Q}$, d'avoir

$$\lambda+\frac{2RL_1}{1-6QR}<R'.$$

Mais cette inégalité est évidemment réalisée, pourvu que R soit assez petit.

Donc $u=u_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots$ *est analytique et représente la solution cherchée de l'equation* (20).

Tel est le résultat de MM. Lutkemeyer et Holmgren.

7. En jetant un coup d'oeil en arrière nous voyons qu'il nous a fallu ajouter seulement quelques remarques à la démonstration de M. Picard pour arriver à ce dernier résultat. La portée de la méthode de M. Picard s'arrête-t-elle là? On pourrait le croire au premier abord. Considérons, en effet, l'équation simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Sans que j'insiste pour le moment sur les détails de calcul, on voit, qu'en appliquant la méthode des approximations successives, *dans le second membre interviennent toujours les dérivées secondes.* Or si on se reporte aux formules (17) qui résolvent les équations (15), on reconnait que *les dérivées secondes pour* $\rho=R$ *se présentent en général sous forme de séries divergentes.* En réalité ceci prouve seulement que *la forme sous laquelle*

M. Picard mettait sa solution n'est plus applicable en général. Cela ne présente d'ailleurs rien d'étonnant. C'est une simple conséquence de ce fait, qu'en général, *un développement de Taylor est mal approprié pour l'étude des fonctions de variables réelles.* Ainsi, la méthode de M. Picard sous sa forme primitive démontre non seulement que la solution trouvée est analytique à l'intérieur du *cercle reel C*, mais en se reportant au § 3, elle prouve que *cette solution est régulière tant que* $|x+yi|<R$ *et* $|x-yi|<R$. En d'autres termes, *la méthode de M. Picard qui est une véritable méthode de résolution du problème de Dirichlet, doit faire nécessairement défaut, si les singularités imaginaires de la fonction à déterminer sont plus approchées du centre O que les singularités réelles.* Cette difficulté ne se présentait pas dans les cas étudiés jusqu'à présent. Mais on conçoit a priori qu'elle doit se présenter dans le cas général.

On peut, en effet, diviser les fonctions analytiques à deux variables en trois catégories différentes au point de vue de la relation entre leurs singularités réelles et imaginaires.

1° Si on pose $x+yi=z_1$, $x-yi=z_2$ les cercles de convergence à l'origine par rapport aux variables z_1 et z_2 passent nécessairement par un point singulier de la fonction qui correspond à x et y réels (les rayons de convergence sont donc tous les deux égaux à $R=\sqrt{x^2+y^2}$). Telles sont, par exemple, toutes *les fonctions harmoniques.*

2° Pour les fonctions de cette catégorie il est toujours possible de choisir l'origine assez près d'une singularité réelle (x, y) pour que, comme dans le cas précédent, les rayons de convergence par rapport à z_1 et z_2 soient égaux à $R=\sqrt{x^2+y^2}$. Telles sont, par exemple, toutes les fonctions vérifiant l'équation linéaire (1) où a, b, c sont des fonctions de la première catégorie, et aussi celles des solutions de l'équation (20), dont les singularités réelles ne sont jamais des infinis ni pour la fonction, ni pour ses dérivées des deux premiers ordres.

3° Fonctions quelconques. Leurs singularités réelles restent en général en dehors des cercles de convergence.

Pour rendre cette distinction intuitive j'indiquerai rapidement son équivalent dans le cas d'une seule variable. A la première catégorie correspondent de telles fonctions $F(x)$ qu'en prenant un point quelconque O sur l'axe des x réels, le point singulier de la fonction qui lui est le plus approché est réel. Telle serait, par exemple, $F(x)=\frac{1}{1-x}$. Le développement de Taylor est dans ce cas très commode, car il peut représenter la fonction dans tout un intervalle entre deux points singuliers. Aux fonctions de la deuxième catégorie correspondent les fonctions d'une variable dont les points singuliers réels peuvent être atteints par des cercles de

convergence de rayon assez petit. Par exemple $\frac{1}{(x^2+1)(x-2)}$. *Le développement de Taylor n'est plus valable tout le long d'un segment réel où la fonction est régulière. Un nombre limité de tels développements est nécessaire.* Enfin le dernier cas est celui où la fonction admet des points singuliers réels qui ne peuvent être atteints par aucun cercle de convergence. *Une infinité de développements de Taylor serait dans ce cas nécessaire pour représenter une fonction dans un intervalle où elle est régulière.* (Il suffit que la région de régularité de la fonction admette un point anguleux sur l'axe des x.) On voit ainsi l'inconvenient que présente le développement de Taylor. Dans le chapitre suivant *nous introduisons précisément de nouvelles séries plus spécialement appropriées à l'étude des fonctions analytiques de variables réelles.* Parmi les applications de ces nouvelles séries, la plus importante est la démonstration du théorème de M. Hilbert.

Chapitre II.

Séries normales.

8. Les séries que nous voulons introduire à la place des séries de Taylor sont les séries doublement ascendantes $\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{pq}x^p(R-x)^q$. Nous dirons qu'une telle série est *normale*, si elle converge absolument et uniformément pour $0 \leqq x \leqq R$.

Nous démontrerons d'abord un théorème fondamental:

Théorème. *Toute fonction $f(x)$ holomorphe à l'intérieur d'un contour S comprenant le segment 0 1 est développable en série normale sur ce segment.*

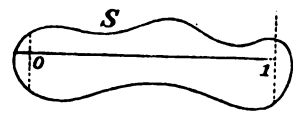


fig. 1.

En effet, on a d'après le théorème de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Il suffit par conséquent de démontrer notre théorème pour une fraction simple $\frac{A}{z-x}$, où A est une constante (par rapport à x) et z l'affixe d'un point sur le contour S. Il est évident que si z est situé à gauche de la perpendiculaire à 0 1 en 0 ou à droite de celle en 1, $\frac{A}{z-x}$ admettra comme développement normal soit la série de Taylor en 1, soit celle en 0. Nous pouvons donc ne considérer que le cas, où $z = a + bi$, avec $|b| + 0$ et $1 \geqq a \geqq 0$. On a

$$\frac{1}{a+bi-x} = \frac{a-x-bi}{x^2-2ax+a^2+b^2}.$$

Le numérateur étant fini, il n'influe pas sur la convergence de la fraction. Or:

$$\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}=\frac{1}{1+a^2+b^2-[2ax+1-x^2]}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a^2+b^2+1}\left(\frac{2ax+1-x^2}{a^2+b^2+1}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-x)^n(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\cdots\right].$$

En désignant par

$$P_n(x)=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1)^{n+1}}\left[1+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{2ax}{a^2+b^2+1}+\cdots+\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{k!}\left(\frac{2ax}{a^2+b^2+1}\right)^k+\cdots\right]$$

$$=\frac{(1+x)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}},$$

on reconnait que tous les termes de $P_n(x)$ sont positifs pour $0\leqq x\leqq 1$ et de plus

$$(24)\qquad |(1-x)^n\cdot P_n(x)|\leqq\frac{(1-x^2)^n}{(a^2+b^2+1-2ax)^{n+1}}<\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{1+b^2}\right)^n.$$

Donc

$$\frac{1}{x^2-2ax+a^2+b^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\cdot P_n(x)$$

se présente sous forme d'une série doublement ascendante

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}A_{pq}x^p(1-x)^q$$

absolument et uniformément convergente lorsque $0\leqq x\leqq 1$. La démonstration s'achève sans difficulté.

9. On voit que, si on ne fait aucune restriction, une fonction analytique est susceptible d'une infinité de développements normaux sur un segment déterminé. Pour se rendre compte de l'ordre d'indétermination de ces développements, posons $x=u$, $1-x=v$. Notre série devient

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}A_{pq}x^p(1-x)^q=\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty}A_{pq}u^pv^q=F(uv)$$

$F(uv)$ est une fonction analytique de u et v régulière tant que $|u|+|v|\leqq 1$ qui pour $u+v=1$ se réduit à $f(x)$. Pour avoir un développement formel déterminé il suffirait donc d'assujettir $F(uv)$ à vérifier une équation déterminée aux dérivées partielles du premier ordre. Nous n'allons pas

nous attacher à ce problème, car dans la question qui nous occupe il est avantageux de laisser subsister l'indétermination. Je n'indiquerai que l'exemple suivant. Soit $f(x)$ une série de polynomes

$$f(x) = A_0 + A_1 G_1(x) + A_2 G_2(x) + \cdots + A_n G_n(x) + \cdots$$

où A_n sont des constantes et

$$G_n(x) = n^n \left[\left(\frac{x}{n}\right)^n + \left(\frac{x}{n-1}\right)^{n-1}(1-x) + \left(\frac{x}{n-2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1-x}{n}\right)^n\right].$$

Si cette série de polynomes converge absolument pour $0 \leqq x \leqq 1$, elle est évidemment normale, puisque tous les termes de $G_n(x)$ sont positifs. Je dis qu'une série de ce genre admettra comme région de convergence une ellipse E ayant les points 0 et 1 pour foyers. En effet, supposons que $f(x)$ converge en un point $M(x)$ tel que $OM + M1 = 2a$. Soit $\alpha = \frac{OM}{2a}$. Un calcul facile montre que

$$n^n \left|\left(\frac{x}{n-k}\right)^{n-k}\left(\frac{1-x}{k}\right)^k\right| = (2a)^n \left|\left(\frac{n\alpha}{n-k}\right)^{n-k}\left(\frac{n(1-\alpha)}{k}\right)^k\right| \leqq (2a)^n.$$

(L'égalité ayant lieu lorsque $\alpha = 1 - \frac{k}{n}$.)

On en conclut que pour n assez grand $|A_n| < \frac{1}{(2a-\varepsilon)^n}$, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut et par conséquent *la série converge à l'intérieur de l'ellipse* E. Ce développement a l'inconvenient de tous les développements qui ne sont pas des séries de puissances, que *le produit de deux polynomes générateurs $G(x)$ n'est pas un polynome générateur.* Au contraire, *si nous laissons le développement normal sous sa forme générale, toutes les opérations d'addition, multiplication, dérivation et intégration nous conduiront formellement à des développements de même nature.*

10. La démonstration du théorème 8 nous indique un groupement de termes qu'il sera utile de conserver dans la suite. On posera

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} A_{pq} x^p (1-x)^q = \sum_{0}^{\infty} P_n \cdot (1-x)^n$$

où P_n est une série de Taylor ordonnée suivant les puissances de x. Il est clair que si $f(x)$ est normal, $P_n(x)$ aura un rayon de convergence au moins égal à 1, et lorsque x tend vers 1, $P_n(1-x)^n$ tendra vers 0 pour $n > 0$. De plus les mêmes conclusions subsistent, si on remplace P_n par $\overset{+}{P}_n$ dont tous les coefficients sont respectivement égaux aux modules des coefficients de P_n. Ceci posé, chacun des termes tels que $\overset{+}{P}_n(x)\cdot(1-x)^n$ *aura un maximum absolu M_n lorsque x varie depuis* 0 *jusqu'à* 1. En général,

la valeur de x correspondant à ce maximum variera avec n. En prenant par conséquent la série

$$M = M_0 + M_1 + \cdots + M_n + \cdots$$

nous obtenons dans le cas où elle converge une sorte de limite supérieure de notre série $f(x)$; nous l'appellerons *norme réelle**) *de* $f(x)$. Si nous considérons l'ensemble des développements normaux dont $f(x)$ est susceptible, il définira un ensemble de nombres positifs qui sont les normes réelles correspondantes. Cet ensemble aura une limite inférieure (qui en général ne sera pas atteinte); nous l'appellerons *norme réelle inférieure de* $f(x)$ sur le segment 0 1 et nous la désignerons par $[f(x)]_{10}$. Si le segment 0 1 est remplacé par $0R$ tout ce qui précède subsiste évidemment et la norme réelle inférieure de $f(x)$ sur $0R$ sera désignée par $[f(x)]_{R0}$. En particulier, si $f(x)$ est développable en série de Taylor à coefficients positifs, convergente pour $x = R$, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$, on aura simplement (d'après les notations du § 3)

$$[f(x)]_{R0} = \overset{+}{f}(R) = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \cdots + a_n R^n + \cdots.$$

Mais si les termes n'étaient pas positifs, la série de Taylor définirait en général une norme bien supérieure à la norme inférieure; et si le rayon de convergence était inférieur à R, elle ne définirait même plus de norme de $f(x)$. Soit, par exemple

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2},$$

on a

$$[f(x)]_{10} < \frac{1}{b^2}\left[1 + \frac{1}{1+b^2} + \cdots \left(\frac{1}{1+b^2}\right)^n + \cdots\right] = \frac{1+b^2}{b^4}$$

avec

$$|b| \neq 0 \quad \text{et} \quad 1 \geqq a \geqq 0.$$

Ainsi b peut devenir aussi petit qu'on veut, *le développement de Taylor va diverger et pourtant* $f(x)$ *aura une norme finie.*

Ce qui caractérise cet exemple particulier, c'est que *la norme* (qui, nous le rappelons, est toujours le résultat de sommation d'une série convergente à termes positifs) *se présente sous forme d'une série dont les termes sont inférieurs à ceux d'une progression géométrique.* En reprenant le raisonnement du § 8 on voit que *la même circonstance se présentera pour toute fonction analytique régulière dans une région S comprenant à son intérieur le segment* 0 1.

Nous sommes ainsi conduits à introduire une nouvelle notion. Soit comme tout à l'heure

---

*) Dans la Note citée des Comptes Rendus j'emploie l'expression «valeur maximale» au lieu de «norme». J'ai cru devoir adopter ici cette dénomination un peu arbitraire pour éviter les confusions que pouvait faire naître la première.

$$M = M_0 + M_1 + \cdots + M_n + \cdots$$

une norme réelle de $f(x)$ sur OR; si la série

$$N = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \cdots$$

converge, nous dirons que N *est une norme de* $f(x)$ *à l'intérieur du contour fermé* (fig. 2) Γ_{ORr} qui est formé par les deux tangentes menées du point R au cercle C de rayon r, ayant le centre en O, et la partie gauche du cercle C. Nous définirons comme auparavant *la norme inférieure dans l'aire limitée par* Γ_{ORr} et nous la désignerons par $[f(x)]_{Rr}$.

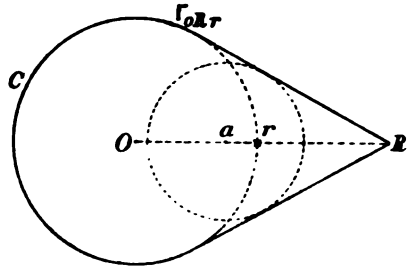


fig. 2.

Ceci posé nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. *Si une série normale sur le segment* OR $f(x)$ *admet une norme finie* N *à l'intérieur du contour* Γ_{ORr}, *elle est uniformément et absolument convergente à l'intérieur et sur le contour* Γ_{ORr} *lui même.*

Soit

$$f(x) = \sum_0^\infty P_n \cdot (R-x)^n,$$

avec

$$P_n = a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nk}x^k + \cdots$$

et

$$M_n \geqq (R-x)^n \cdot (|a_{n0}| + |a_{n1}|x + \cdots + |a_{nk}|x^k + \cdots)$$

si

$$0 \leqq x \leqq R.$$

Donc si, $|x| = r$, x pouvant être imaginaire

$$|R-x|^n[|a_{n0}| + |a_{n1}x| + \cdots + |a_{nk}x^k| + \cdots] \leqq M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n.$$

D'autre part soit $0 < a < R$. Lorsque x est situé sur un cercle de rayon $r_1 = r\left(\frac{a}{R}\right)$ ayant le centre en a, on a aussi

$$|R-x|^n \sum_{k=0}^\infty |a_{nk}x^k| < (R-a+r_1)^n \sum_{k=0}^\infty |a_{nk}|\,(r_1+a)^k$$

$$= \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n (R-a-r_1)^n \sum_{k=0}^\infty |a_{nk}|\,(r_1+a)^k$$

$$< \left(\frac{R-a+r_1}{R-a-r_1}\right)^n M_n = \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n M_n.$$

Pour $a = R$ la même inégalité a certainement lieu puisque $f(x)$ est normale. Donc la convergence absolue et uniforme de $f(x)$ est assurée

sur tous les cercles homothétiques au cercle C par rapport au point R et ayant leur centre sur le segment OR. Il en résulte que $f(x)$ converge absolument et uniformément sur l'enveloppe de ces cercles qui n'est autre que Γ_{ORr} et a fortiori à son intérieur. C. q. f. d.

Corollaire. *Une fonction $f(x)$ admettant une norme finie à l'intérieur d'un contour Γ_{ORr} est analytique à l'intérieur de ce contour.*

En effet, d'après le théorème précédent, la série

$$f(x) = \sum_0^\infty P_n(R-x)^n$$

converge absolument et uniformément sur Γ_{ORr}; or $P_n(R-x)^n$ étant une fonction analytique et régulière à l'intérieur de Γ_{ORr}, il résulte d'un théorème connu de la théorie des fonctions, que $f(x)$ doit être elle même analytique à l'intérieur de Γ_{ORr}.

11. Théorème. *Si $f_1(x)$ admet une norme égale à N_1, $f_2(x)$ une norme égale à N_2 à l'intérieur de Γ_{ORr}, leur somme $f_1(x) + f_2(x) = F(x)$ admet à l'intérieur de Γ_{ORr} une norme au plus égale à $N_1 + N_2$.*

En effet, soit

$$f_1(x) = \sum_0^\infty P_n^{(1)}(R-x)^n,$$

$$f_2(x) = \sum_0^\infty P_n^{(2)}(R-x)^n,$$

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_0^\infty (P_n^{(1)} + P_n^{(2)})(R-x)^n = \sum_0^\infty Q_n(R-x)^n.$$

Si

$$M_n \leqq \overset{+}{Q}_n(x)\cdot(R-x)^n, \quad M_n^{(1)} \leqq \overset{+}{P}_n^{(1)}(x)\cdot(R-x)^n, \quad M_n^{(2)} \leqq \overset{+}{P}_n^{(2)}(x)\cdot(R-x)^n.$$

(Le symbole + audessus d'une fonction développable un série de Taylor désignant comme toujours dans ce travail la série des modules.) On a

$$M_n \leqq M_n^{(1)} + M_n^{(2)}.$$

D'où

$$M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + M_n\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n + \cdots \leqq M_0^{(1)} + M_0^{(2)} + (M_1^{(1)} + M_1^{(2)})\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots$$
$$= N_1 + N_2.$$

On peut exprimer le même fait en remplaçant les normes par leurs limites inférieures. On a ainsi

$$[f_1(x) + f_2(x)]_{Rr} \leqq [f_1(x)]_{Rr} + [f_2(x)]_{Rr}.$$

Cette formule se généralise immédiatement:

$$(25)' \quad [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)+\cdots]_{Rr} \leqq [f_1(x)]_{Rr}+[f_2(x)]_{Rr}+\cdots+[f_n(x)]_{Rr}+\cdots.$$

Théorème. *Si $f_1(x)$ admet une norme N_1, $f_2(x)$ une norme N_2 à l'intérieur de Γ_{ORr}, leur produit $\Phi(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$ admet à l'intérieur de Γ_{ORr} une norme au plus égale à N_1N_2.*

En conservant les notations du théorème précédent on a évidemment

$$\Phi(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[P_0^{(1)}P_n^{(2)}+P_1^{(1)}P_{n-1}^{(2)}+\cdots+P_n^{(1)}P_0^{(2)}](R-x)^n.$$

D'où:

$$\text{Norme de } \Phi(x) \leqq \sum_{n=0}^{\infty}[M_0^{(1)}M_n^{(2)}+M_1^{(1)}M_{n-1}^{(2)}+\cdots+M_n^{(1)}M_0^{(2)}]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^n=N_1N_2.$$

En remplaçant les normes par leurs limites inférieures on peut énoncer notre théorème en écrivant

$$[f_1(x)\cdot f_2(x)]_{Rr} \leqq [f_1(x)_{Rr}\cdot[f_2(x)]_{Rr}.$$

Et d'une façon générale:

$$(25)'' \qquad [f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)]_{Rr} \leqq [f_1(x)]_{Rr}\cdot[f_2(x)_{Rr}\cdots[f_n(x)]_{Rr}.$$

En combinant les inégalités (25)′ et (25)″ on a évidemment

$$(25) \quad [F(\varphi_1(x),\varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x))]_{Rr} \leqq \overset{+}{F}([\varphi_1(x)]_{Rr},[\varphi_2(x)]_{Rr}\cdots[\varphi_n(x)])_{Rr}.$$

F étant une fonction analytique des n variables $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$ développable en série de Taylor tant que $|\varphi_1| \leqq [\varphi_1(x)]_{Rr}$, $|\varphi_2| \leqq [\varphi_2(x)]_{Rr}$ etc.

Les deux théorèmes suivants nous seront encore nécessaires.

12. Théorème. *Soit $I(x)=x^p\int_0^x F(x)\,x^q\,dx$, où $F(x)$ admet une norme finie à l'intérieur de Γ_{ORr}, p et q sont des nombres entiers vérifiant les inégalités $q \geqq 0$, $p+q+1 \geqq 0$. Dans ces conditions $I(x)$ admet une norme finie à l'intérieur de Γ_{ORr} et on a:*

$$[I(x)]_{Rr} < \frac{R+r}{2r}\cdot\frac{R^{p+q+1}}{q+1}\,[F(x)]_{Rr}.$$

En effet, soit

$$F(x)=P_0(x)+P_1(x)\cdot(R-x)+\cdots+P_n(x)\cdot(R-x)^n+\cdots$$

et M_n le maximum pour $0 \leqq x \leqq R$ de $\overset{+}{P}_n(x)\cdot(R-x)^n$. On a en intégrant par parties

$$x^p\int_0^x P_n\cdot(R-x)^n\cdot x^q\,dx = Q_n^{(n)}\cdot(R-x)^n+Q_n^{(n-1)}\cdot(R-x)^{n-1}+\cdots+Q_n^{(1)}$$

$Q_n^{(k)}$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de x. Il est clair que si nous remplaçons P_n par $\overset{+}{P}_n$, $Q_n^{(k)}$ sera rémplacé par $q_n^{(k)}$ dont tous les coefficients sont positifs et au moins égaux aux coefficients respectifs de $\overset{+}{Q}_n^{(k)}$. Or pour x compris entre 0 et R

$$x^p \int_0^x \overset{+}{P}_n \cdot (R-x)^n \cdot x^q dx \leqq M_n \frac{R^{p+q+1}}{q+1}.$$

Donc $I(x)$ est normal et en groupant les termes on peut écrire

$$\begin{aligned} I(x) = \; & Q_0^{(0)} + Q_1^{(0)} + Q_2^{(0)} + \cdots + Q_n^{(0)} + \cdots \\ & + (R-x)[Q_1^{(1)} + Q_2^{(1)} + \cdots + Q_n^{(1)} + \cdots] \\ & + \qquad (R-x)^2[Q_2^{(2)} + \cdots + Q_n^{(2)} + \cdots] \\ & + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ & + \qquad\qquad\qquad\qquad (R-x)^n[Q_n^{(n)} + \cdots] \\ & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

On voit que si

$$S_k = \overset{+}{Q}_k^{(k)} + \overset{+}{Q}_{k+1}^{(k)} + \cdots + \overset{+}{Q}_n^{(k)} + \cdots$$

on a en désignant par L_k le maximum de $S_k(R-x)^k$ pour $0 \leqq x \leqq 1$

$$L_k \leqq \frac{R^{p+q+1}}{q+1}[M_k + M_{k+1} + \cdots].$$

Par conséquent, en désignant par L la norme correspondante de $I(x)$ à l'intérieur de Γ_{ORr}, on a

$$\begin{aligned} L &\leqq L_0 + L_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + L_k\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^k + \cdots \\ &\leqq \frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{[M_0 + M_1 + M_2 + \cdots] + [M_1 + M_2 + \cdots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + [M_2 + \cdots]\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2 + \cdots\right\} \\ &= \frac{R^{p+q+1}}{q+1}\left\{M_0 + M_1\left[1 + \frac{R+r}{R-r}\right] + M_2\left[1 + \frac{R+r}{R-r} + \left(\frac{R+r}{R-r}\right)^2\right] + \cdots\right\} \\ &< \frac{R^{p+q+1}}{q+1} \cdot \frac{R+r}{2r}\left\{M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + M_k\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^k + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Or

$$M = M_0 + M_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + M_k\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^k + \cdots$$

est précisément la norme correspondante de $F(x)$ à l'intérieur de Γ_{ORr}.

On a donc nécessairement ainsi que nous l'avons affirmé

$$[I(x)]_{Rr} < \frac{R+r}{2r} \cdot \frac{R^{p+q+1}}{q+1}[F(x)]_{Rr}. \tag{26}$$

Théorème. *Soit* $g(x) = x^p \int_x^R F(x) x^q dx$, $F(x)$ *ayant la même signification que dans la proposition précédente; si* p *et* q *sont des nombres entiers satisfaisant aux inégalités* $p \geqq 0$, $p+q+1 \geqq 0$, *on a:*

$$[g(x)]_{Rr} \leqq \frac{R+r}{R-r} \cdot \frac{R^{p+q+1}}{|q+1|} [F(x)]_{Rr} \tag{27}$$

pour $q \neq -1$, *et*

$$[g(x)]_{Rr} \leqq \frac{R+r}{R-r} \cdot \frac{R^p}{pe} [F(x)]_{Rr} \tag{27bis}$$

pour $q = -1$.

En effet, en intégrant terme à terme:

$$x^p \int_x^R P_n (R-x)^n x^q dx = x^p \cdot T_{n+1}(x) \cdot (R-x)^{n+1}$$

$T_{n+1}(x)$ étant une série ordonnée suivant les puissances de x. Je dis que si P_n est remplacé par $\overset{+}{P}_n$, T_{n+1} sera remplacé par une série t_{n+1} à coefficients positifs. Pour le voir il suffit de constater qu'on a

$$\alpha_k = (n+k+q+1)\beta_{k+q} - R(k+q+1)\beta_{k+q+1},$$

en posant

$$\overset{+}{P}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \quad \text{et} \quad t_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k.$$

Car à cause de cette relation les coefficients de t_{n+1} ne peuvent présenter plus d'une variation de signe; or une variation unique ne peut avoir lieu, puisqu'elle exigerait que t_{n+1} ait une racine positive à l'intérieur de son cercle de convergence. De sorte que

$$\overset{+}{T}_{n+1}(x) \overset{\cdot}{\leqq} t_{n+1}(x).$$

Or pour x compris entre 0 et R

$$x^p \int_x^R \overset{+}{P}_n \cdot (R-x)^n x^q dx \leqq \frac{R^{p+q+1}}{|q+1|} M_n$$

si $q \neq -1$, et

$$x^p \int_x^R \overset{+}{P}_n \cdot (R-x)^n \frac{dx}{x} \leqq x^p \log \frac{R}{x} \cdot M_n \leqq \frac{R^p}{pe} M_n.$$

Le reste du raisonnement étant identique dans les deux cas, je me bornerai à l'examen du premier.

On voit facilement d'après ce qui précède que

$$N_{n+1} = \text{Maximum de } x^p \overset{+}{T}_{n+1}(R-x)^{n+1} \leqq \frac{R^{p+q+1}}{|q+1|} M_n.$$

Donc

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + N_k\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^k + \cdots \\ &\leqq \frac{R^{p+q+1}}{|q+1|}\left[M_0\left(\frac{R+r}{R-r}\right) + \cdots + M_{k-1}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^k + \cdots\right] \\ &= \frac{R^{p+q+1}}{|q+1|} \cdot \frac{R+r}{R-r} \cdot M. \end{aligned}$$

En remplaçant les normes N et M par leurs limites inférieures, on retrouve les formules annoncées.

13. Avant d'aborder la principale application que nous avons à faire de cette théorie et qui nécessitera l'introduction de développements analogues à deux variables il est peut être utile que j'indique une application plus simple.

Je me propose de démontrer que si, x étant à l'intérieur d'un contour Γ_{abr} et $|y|<R$, les normes de $f(xy)$ développée en série normale en x sur le segment ab sont inférieures à M, la solution de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ qui s'annulle en b est analytique. Il est clair que la méthode des majorantes de Cauchy ne s'applique pas à ce cas (auquel on pourra probablement ramener tous ceux où la méthode classique conduit à des séries divergentes). Il faut recourir à la méthode des approximations successives de M. Picard. On a successivement

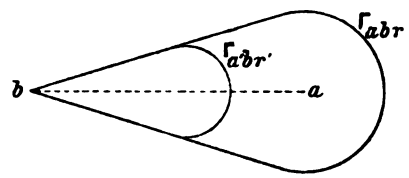


fig. 8.

$$y_0 = \int_b^x f(x0)\,dx,$$

$$y_1 = \int_b^x f(xy_0)\,dx,$$

. . . . . .

$$y_n = \int_b^x f(xy_{n-1})\,dx.$$

. . . . . .

En posant

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \cdots$$

on voit que y est analytique. En effet, il est d'abord évident que si au

contour Γ_{abr} je substitue un contour intérieur homothétique $\Gamma_{a'b'r'}$ par rapport à b la norme de $f(xy)$ ne pourra que diminuer. En posant

$$\frac{r}{a-b} = \frac{r'}{a'-b} = \lambda$$

on a d'après (27), en désignant par $[y_0]_{\Gamma_{a'b'r'}}$ la norme inférieure à l'intérieur de $\Gamma_{a'b'r'}$ de y_0

$$[y_0]_{\Gamma_{a'b'r'}} < \frac{1+\lambda}{1-\lambda}(a'-b)M.$$

Et successivement

$$[y_1 - y_0]_{\Gamma_{a'b'r'}} < \left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(a'-b)\cdot M\right]^2,$$

. . . . . .

$$[y_n - y_{n-1}]_{\Gamma_{a'b'r'}} < \left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(a'-b)\cdot M\right]^{n+1}.$$

. . . . . .

D'où, en posant

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda}(a'-b)M = k,$$

$[y_0]_{\Gamma_{a'b'r'}} < \frac{k}{1-k}$, pourvu que $a'-b$ soit assez petit pour que $\frac{k}{1-k}$ soit inférieur à R. Donc d'après le théorème 10 *y est analytique.*

La même méthode pourra être appliquée toutes les fois que sera applicable la méthode des approximations successives. Si on se souvient de ce qui a été dit à la fin du chapitre précédent, on ne s'étonnera pas que dans la plupart des cas usuels, les démonstrations du caractère analytique des fonctions d'une seule variable réussissent par l'emploi de la série de Taylor. Je ne ferai que mentionner une application importante qu'on pourrait faire des séries normales à une variable: ce serait de *transformer directement une série divergente de Taylor en une série normale.* Le problème parait difficile, mais puisque nous savons qu'il peut en général être résolu indirectement (théorème 8), en le particularisant convenablement on obtiendra certainement des résultats intéressants. Cette question étant complètement en dehors de notre sujet, nous passerons immédiatement aux fonctions de deux variables*).

---

*) Considérons par exemple la série

$$S = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \cdots + (-1)^k a_k x^k + \cdots.$$

On peut la mettre sous la forme

$$S = (1-x)^n [A_0 - A_1 x + \cdots],$$

où

$$A_k = a_k - n a_{k-1} + \cdots + (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} a_0.$$

Si $|A_k| < M \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$, la norme de S sera inférieure à M. (La notion

14. Soit ϱ et θ les coordonnées polaires d'un point réel M dans le plan des variables réelles x et y. Dans la suite les quatre grandeurs ϱ, θ, x, y pourront devenir complexes; nous les supposerons seulement toujours reliées par les relations:

$$x = \varrho \cos \theta, \qquad y = \varrho \sin \theta.$$

Ceci posé, considérons la série trigonométrique

$$S_{\varrho,\theta} = A_0 + \sum_1^\infty A_n(\varrho) \cos n\theta + B_n(\varrho) \sin n\theta$$

$A_n(\varrho)$ et $B_n(\varrho)$ sont elles mêmes des séries normales par rapport à ϱ sur un segment réel OR de la forme spéciale suivante:

$$A_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty \alpha_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q = \varrho^n \sum_{q=0}^\infty P_q^{(n)} \cdot (R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$B_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty \beta_{pq}^{(n)} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q = \varrho^n \sum_{q=0}^\infty Q_q^{(n)} \cdot (R^2 - \varrho^2)^q$$

où $\alpha_{pq}^{(n)}$, $\beta_{pq}^{(n)}$ sont des constantes quelconques, $P_q^{(n)}$ et $Q_q^{(n)}$ des séries de Taylor procédant suivant les puissances de ϱ^2. On voit d'abord que $S_{\varrho,\theta}$ peut formellement être identifiée à une série où ne figurent que les puissances entières et positives de x et y, puisque

$$\varrho^n \cos n\theta = \frac{(x+iy)^n + (x-iy)^n}{2},$$

$$\varrho^n \sin n\theta = \frac{(x+iy)^n - (x-iy)^n}{2},$$

$$\varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Je dirai que $S_{\varrho,\theta}$ *est une série normale des deux variables* x *et* y *ou* ϱ *et* θ *à l'intérieur du cercle* C *de rayon* R *tracé dans le plan des variables réelles et ayant le centre en* O, *s'il est possible de fixer un nombre positif* r *tel que la série*

---

de norme est un peu modifiée.) Ceci aura lieu pour la plus part des séries usuelles de rayon de convergence égal à 1. Dans le cas où ce rayon est inférieur à 1 ou même nul, il faudra répéter successivement la même opération en faisant croitre n indéfiniment de la sorte que dans la série normale qu'on obtient

$$\sum_p^\infty \sum_q^\infty A_{pq} x^p (R - x)^q,$$

le rapport $\frac{q}{p}$ croisse indéfiniment.

$$\sum = [A_0]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n]_{Rr} + [B_n]_{Rr}$$

soit convergente.

Il est clair que dans ces conditions la série $S_{\varrho,\theta}$ converge absolument et uniformément lorsque le point M se trouve sur la circonférence C ou à son intérieur (pour qu'il en soit ainsi il suffirait même que $r = 0$). Je pourrai en outre écrire $S_{\varrho,\theta} = F(xy)$ et $\Sigma = [F(xy)]_{Rr}$, ce qui exprimera que Σ *est la norme inférieure de* $F(xy)$ *à l'intérieur* du contour Γ_{ORr} (situé dans le plan de la variable complexe ϱ).

15. Théorème. *Si une série* $F(xy) = S_{\varrho,\theta}$ *est normale à l'intérieur d'un cercle* C *tracé dans le plan des variables réelles, elle est analytique à l'intérieur de ce cercle.*

En effet, il est évident d'abord que chacune des séries A_n et B_n peut être en vertu du théorème 10 transformée en série de Taylor de la forme $\varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} a_p \varrho^{2p}$ qui converge pour $|\varrho| \leqq r$. De sorte que en vertu du théorème 3, $F(xy)$ est analytique à l'intérieur du cercle C' de rayon r. Mais, si nous prenons un point quelconque $M(R' < R, \theta_0)$ intérieur à C, en vertu du même théorème 10, A_n et B_n pourront être développées en série de Taylor suivant les puissances de $\varrho - R'$ avec un rayon de convergence au moins égal à $r\,\frac{R-R'}{R}$. On en conclut qu'en faisant croitre R' successivement on obtient le prolongement analytique de $F(xy)$ pour tout point intérieur à C. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Le raisonnement que nous venons de faire montre qu'il faudrait en général répéter une infinité de fois l'opération de prolongement analytique pour atteindre la périphérie même du cercle C. Pourtant à cause de la convergence uniforme du développement normal de $F(xy)$ qui a lieu sur la circonférence C tout aussi bien qu'à son intérieur, ce développement représente bien encore sur la circonférence C la limite vers la quelle tend $F(xy)$ lorsque M s'en approche indéfiniment.

Réciproquement:

Si une fonction $F(xy)$ *est analytique et régulière à l'intérieur d'une région* S *tracée dans le plan des variables réelles, elle est développable en série normale à l'intérieur d'un cercle quelconque* C *entièrement intérieur à* S.

En effet, soit R le rayon d'un cercle C intérieur à S, et soit O son centre. On a évidemment

$$F(xy) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta$$

avec:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\varrho\cos\theta,\ \varrho\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta.$$

De sorte que A_n et B_n sont des fonctions analytiques de ϱ régulières tant que la variable *complexe* ϱ est à l'intérieur d'une certaine région comprenant le segment OR. Il en résulte que A_n et B_n sont développables en séries normales sur le segment OR. En reprenant le calcul du § 8, on verrait facilement que A_n et B_n admettent en outre des normes finies à l'intérieur d'une certaine région Γ_{ORr} correspondant à r suffisamment petit et que la série de ces normes est convergente. Ce qui prouve précisément, en tenant compte de ce que $A_n(\varrho)$ et $B_n(\varrho)$ ont manifestement la forme spéciale exigée par la définition du § 14 que $F(xy)$ est normale à l'intérieur de C.

Ces deux propositions fondamentales qui sont analogues à celles du § 3 *ont l'avantage d'être entièrement indépendantes de la considération des singularités imaginaires.*

Il nous reste encore à démontrer le théorème suivant.

16. Théorème. *Si* $F(v_1 v_2 \cdots v_m)$ *est une fonction analytique de* m *variables* $v_1 v_2 \cdots v_m$ *qui sont des fonctions de* x, y *susceptibles de développements normaux à l'intérieur d'un cercle* C, *on a*

$$[F(v_1 v_2 \cdots v_m)]_{Rr} \leqq \overset{+}{F}([v_1]_{Rr}[v_2]_{Rr}\cdots[v_m]_{Rr}). \tag{28}$$

Le théorème sera évidemment démontré, si nous le vérifions dans les deux cas particuliers:

$$F(v_1 v_2) = v_1 + v_2 \quad \text{et} \quad \Phi(v_1 v_2) = v_1 \cdot v_2.$$

Or c'est une conséquence immédiate de l'inégalité (25)′ que

$$[v_1 + v_2]_{Rr} \leqq [v_1]_{Rr} + [v_2]_{Rr}.$$

D'autre part, soit

$$v_1 = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)}\cos n\theta + B_n^{(1)}\sin n\theta,$$

$$v_2 = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)}\cos n\theta + B_n^{(2)}\sin n\theta.$$

On a en effectuant la multiplication et en groupant les termes comme on en a le droit

$$v_1 v_2 = \left[A_0^{(1)} A_0^{(2)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{(1)} A_n^{(2)} + B_n^{(1)} B_n^{(2)}) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n+m=k} (A_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_n^{(1)} B_m^{(2)}) \right.$$

$$\left. + \sum_{n-m=k} (A_n^{(1)} A_m^{(2)} + A_m^{(1)} A_n^{(2)} + B_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_m^{(1)} B_n^{(2)}) \right] \cos k\theta$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n+m=k} (A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)}) \right.$$

$$\left. + \sum_{n-m=k} (A_m^{(1)} B_n^{(2)} - A_n^{(1)} B_m^{(2)} + B_n^{(1)} A_m^{(2)} - B_m^{(1)} A_n^{(2)}) \right] \sin k\theta.$$

D'où en tenant compte des inégalités (25)′ et (25)″

$$[v_1 v_2]_{Rr} \leqq \left\{ [A_0^{(1)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(1)}]_{Rr} + [B_n^{(1)}]_{Rr} \right\}$$

$$\cdot \left\{ [A_0^{(2)}]_{Rr} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(2)}]_{Rr} + [B_n^{(2)}]_{Rr} \right\} = [v_1]_{Rr} [v_2]_{Rr}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

On voit que l'inégalité (28) est tout à fait analogue à l'inégalité (14).

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour résoudre le problème que nous nous sommes posé au début.

Chapitre III.

Etude de l'équation $z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

17. L'équation

$$F = z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{29}$$

est une des plus simples qu'on puisse imaginer n'entrant pas dans le type étudié par MM. Lutkemeyer et Holmgren. Je tâcherai d'expliquer de mon mieux ma méthode sur cet exemple particulier qui comme on le verra ne se distingue du cas général que par l'absence de certaines complications secondaires. En se reportant à l'introduction, on voit immédiatement qu'actuellement le théorème de M. Hilbert peut s'énoncer ainsi:

Toute solution z de l'équation $F = z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, positive dans une région S et admettant des dérivées finies et continues des trois premiers ordres, est analytique dans cette région.

Nous suivrons la même marche qu'au chapitre I. Pour fixer les idées je suppose l'origine O à l'intérieur de S et je me propose d'étudier la solution z autour de l'origine. D'abord je dis que sans restreindre la généralité je puis poser la valeur z_0 de z à l'origine égale à 1. En effet, s'il en était autrement, il suffirait de faire le changement de variables et de fonction défini par les formules:

$$z' = \frac{z}{z_0}, \quad y' = y\sqrt{z_0}, \quad x' = x.$$

Si la condition fondamentale $z_0 > 0$ est remplie, à la région S dans le plan des xy correspondra une région S' dans le plan des $x'y'$ comprenant l'origine à son intérieur, dans laquelle z' sera positive, admettra des dérivées finies et continues des trois premiers ordres et verifiera l'équation

$$z' \frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2} = 0.$$

Si z' est analytique, inutile de dire que z le sera aussi. Notre restriction est donc légitime.

Soit M une limite supérieure des dérivées des trois premiers ordres de z à l'intérieur de S; p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 les valeurs respectives à l'origine de $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ de sorte que, à cause de la relation (29), on a

$$r_0 + t_0 = 0.$$

D'autre part, étudions comme au chapitre I les conséquences qui résultent de ce que z a des dérivées finies et continues des trois premiers ordres. On a évidemment

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \frac{1}{3!}(f_0 x^3 + 3 f_1 x^2 y + 3 f_2 x y^2 + f_3 y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + r_0 x + s_0 y + \frac{1}{2}(\varphi_0 x^2 + 2\varphi_1 xy + \varphi_2 y^2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + s_0 x + t_0 y + \frac{1}{2}(\psi_0 x^2 + 2\psi_1 xy + \psi_2 y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \chi_0 x + \chi_1 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s_0 + \theta_0 x + \theta_1 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \eta_0 x + \eta_1 y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \pi_0, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \pi_1, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \pi_2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \pi_3$$

où tous les $f, \varphi, \psi, \chi, \theta, \eta, \pi$ sont des fonctions de x et y inférieures en valeur absolue à M à l'intérieur de la région S.

Posons

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta.$$

Il vient:

$$z = z_0 + (p_0\cos\theta + q_0\sin\theta) + \frac{\varrho^2}{2}[r_0\cos^2\theta + 2s_0\cos\theta\sin\theta + t_0\sin^2\theta] + \varrho^3\Phi_0(\varrho\theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p_0 + \varrho(r_0\cos\theta + s_0\sin\theta) + \varrho^2\Phi_1(\varrho\theta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q_0 + \varrho(s_0\cos\theta + t_0\sin\theta) + \varrho^2\Phi_2(\varrho\theta),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r_0 + \varrho\Phi_3(\varrho\theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s_0 + \varrho\Phi_4(\varrho\theta), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t_0 + \varrho\Phi_5(\varrho\theta),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \Phi_6(\varrho\theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \Phi_7(\varrho\theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \Phi_8(\varrho\theta), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \Phi_9(\varrho\theta)$$

où tous les $\Phi(\varrho\theta)$ sont inférieurs en valeur absolue à $2M$ à l'intérieur d'un cercle C' de rayon $R' < 1$ ayant le centre à l'origine et situé dans la région S. En tenant compte des identités

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}y + \frac{\partial z}{\partial y}x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}y^2 - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}x^2 - \frac{\partial z}{\partial x}x - \frac{\partial z}{\partial y}y,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial\theta^3} = -\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}y^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}xy^2 - 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}x^2y + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}x^3 + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}xy$$
$$+ 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(y^2 - x^2) - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}xy + \frac{\partial z}{\partial x}y - \frac{\partial z}{\partial y}x$$

on a successivement

$$\frac{\partial\Phi_0(\varrho\theta)}{\partial\theta} = -\Phi_1\sin\theta + \Phi_2\cos\theta < 4M,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_0(\varrho\theta)}{\partial\theta^2} = \Phi_3\sin^2\theta - 2\Phi_4\sin\theta\cos\theta + \Phi_5\cos^2\theta - \Phi_1\cos\theta - \Phi_2\sin\theta < 10M,$$

$$\frac{\partial^3\Phi_0(\varrho\theta)}{\partial\theta^3} = -\Phi_6\sin^3\theta + 3\Phi_7\sin^2\theta\cos\theta - 3\Phi_8\sin\theta\cos^2\theta + \Phi_9\cos^3\theta$$
$$+ 3\Phi_3\sin\theta\cos\theta + 3\Phi_4(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 3\Phi_5\cos\theta\sin\theta + \Phi_1\sin\theta$$
$$- \Phi_2\cos\theta < 24M.$$

D'où il résulte que sur une circonférence C de rayon $R < R'$ Φ_0 est développable en série trigonométrique:

$$\Phi_0 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta$$

avec les inégalités:

$$|c_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|c_n| + |d_n| < 82M < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\{|c_n| + |d_n|\} < 200M^2 + 4 < N,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{|c_n| + |d_n|\} < 1152M^2 + 4 < N.$$

Les deux premières inégalités ont pu être établies (§ 1) dans l'hypothèse seulement de la continuité des dérivées des deux premiers ordres, a fortiori elles out lieu actuellement; quant à la troisième on l'établit d'une façon analogue.

En effet,

$$c_n = -\frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\sin n\theta\,d\theta, \qquad d_n = \frac{1}{n^3\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\cos n\theta\,d\theta.$$

Or, puisque $\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}$ est une fonction bornée et intégrable, on a l'identité

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\,d\theta\right]^2$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\cos n\theta\,d\theta\right]^2+\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial\theta^3}\sin n\theta\,d\theta\right]^2\right\}.$$

De sorte que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^6 + d_n^2 n^6 < 2(24M)^2.$$

Si $|c_n n^2| > c_n^2 n^6$, on a $|c_n| \leqq \frac{1}{n^4}$. Par conséquent, dans tous les cas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\{|c_n| + |d_n|\} < 1152M^2 + 4.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Par conséquent sur le cercle C de rayon R

$$z = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta \tag{30}$$

avec les inégalités

$$\begin{aligned}
&|\alpha_0 - z_0| + \sum_1^{\infty}|\alpha_n| + |\beta_n| < LR,\\
&\left|\frac{\alpha_1}{R} - p_0\right| + \sum_2^{\infty} n\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR,\\
&\left|\frac{\beta_1}{R} - q_0\right| + \sum_2^{\infty} n\{|\alpha_n| + |\beta_n\} < LR,\\
&\left|\frac{4\alpha_2}{R^2} - (r_0 - t_0)\right| + \sum_3^{\infty} n^2\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR.\\
&\left|\frac{4\beta_2}{R^2} - 2s_0\right| + \sum_3^{\infty} n^2\{|\alpha_n| + |\beta_n|\} < LR,
\end{aligned} \tag{31}$$

L est un nombre fixe qui ne dépend que de M.

18. En procédant comme dans le chapitre I, nous avons à déterminer par la méthode des approximations successives une solution u de l'équation $F = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ qui sur le cercle C se confond avec φ. Nous arrivons ainsi à remplacer l'équation (29) par le système

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = (1-u_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = (1-u_{n-1})\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou encore

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = (1-u_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},$$

$$(32)\quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = (1-u_1)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (1-u_0)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = (1-u_0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - v_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} = (1-u_{n-2})\frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} - v_{n-1}\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

u_0 est la fonction harmonique qui sur le cercle C se confond avec φ; v_n se calcule de proche en proche, si on pose d'une façon générale $v_n = u_n - u_{n-1}$ et $v_n = 0$ sur le cercle C. *La série*

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

dans le cas où elle converge uniformément ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, représente la solution cherchée de l'équation (29).

D'abord u_0 est immédiatement donné par la formule

$$u_0 = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{R}\right)[\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta].$$

Et puisqu'on en déduit

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)\varrho^{n-2}}{R^n}[\alpha_n \cos(n-2)\theta + \beta_n \sin(n-2)\theta]$$

on a en vertu des inégalités (31)

$$(33)\qquad [u_0-1]_{Rr} < LR, \quad \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]_{Rr} < 2M + LR < Q.$$

Je rappelle que le symbole $[\ ]_{Rr}$ signifie la norme inférieure à l'intérieur du contour Γ_{ORr}, r étant un nombre positif inférieur ou égal à R. Si nous supposions, ce qui est permis jusqu'à présent, mais ce qui ne le sera plus après, que $r = R$, nous retomberions dans la méthode primitive de M. Picard. *Il sera essentiel que* $r < R$. Pour fixer les idées nous poserons une fois pour toutes

$$r = \frac{R}{2}. \tag{34}$$

19. Nous devons faire maintenant une petite digression pour appliquer à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F(xy) \tag{35}$$

les résultats de l'étude que nous avons faite sur les séries normales.

Supposons $F(xy)$ développé en série normale

$$F(xy) = A_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varrho) \cos n\theta + B_n(\varrho) \sin n\theta.$$

Comme toujours $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \sin\theta$; les $A(\varrho)$ et $B(\varrho)$ sont des séries normales de la variable ϱ sur le segment OR de la forme

$$A_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$B_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} b_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

De plus,

$$[F(xy)]_{Rr} = [A_n(\varrho)]_{Rr} + \sum_{1}^{\infty} [A_n(\varrho)]_{Rr} + [B_n(\varrho)]_{Rr} < P$$

P étant un certain nombre positif.

Je me propose de développer en série normale la fonction $v(xy)$ définie par l'équation (35) et s'annullant sur le cercle C de rayon R. En répétant le calcul de M. Picard, on est conduit, en posant a priori

$$v_0 = C_0(\varrho) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varrho) \cos n\theta + D_n(\varrho) \sin n\theta$$

aux équations

$$\frac{d^2 C_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dC_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} C_n = A_n(\varrho),$$

$$\frac{d^2 D_n}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{dD_n}{d\varrho} - \frac{n^2}{\varrho^2} D_n = B_n(\varrho)$$

dont la solution cherchée est donnée par les formules

$$C_0(\varrho) = \int_R^\varrho \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho,$$

$$2nC_n(\varrho) = \varrho^n \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{1}{\varrho^{n-1}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^n}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho.$$

Une double différentiation nous conduit successivement à

$$\frac{dC_0}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho, \quad \frac{d^2C_0}{d\varrho^2} = A_0 - \frac{1}{\varrho^2} \int_0^\varrho \varrho A_0 d\varrho,$$

$$2\frac{dC_n}{d\varrho} = \varrho^{n-1} \int_R^\varrho \frac{A_n d\varrho}{\varrho^{n-1}} + \frac{1}{\varrho^{n+1}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{\varrho^{n-1}}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho,$$

$$2\frac{d^2C_n}{d\varrho^2} = (n-1)\varrho^{n-2} \int_R^\varrho \frac{A_n}{\varrho^{n-1}} d\varrho - \frac{n+1}{\varrho^{n+2}} \int_0^\varrho A_n \varrho^{n+1} d\varrho + \frac{(n-1)\varrho^{n-2}}{R^{2n}} \int_0^R A_n \varrho^{n+1} d\varrho + 2A_n.$$

On aurait des formules identiques pour D_n. On en déduit premièrement que C_n et D_n ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres sont des séries normales de la forme

$$C_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty c_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q,$$

$$D_n(\varrho) = \varrho^n \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty d_{pq} \varrho^{2p} (R^2 - \varrho^2)^q.$$

De plus, en vertu des formules (26) et (27)

$$[C_0(\varrho)]_{Rr} < R^2 \frac{(R+r)^2}{4r(R-r)} [A_0(\varrho)]_{Rr} = \frac{9}{4} R^2 [A_0(\varrho)]_{Rr} < \lambda R^2 [A_0]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_0}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{R(R+r)}{4r} [A_0]_{Rr} = \frac{3}{4} R [A_0]_{Rr} < \lambda R [A_0]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_0}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < [A_0]_{Rr} + \frac{R+r}{4r} [A_0]_{Rr} = \frac{7}{4} [A_0]_{Rr} < \lambda [A_0]_{Rr}$$

λ étant un nombre fixe indépendant de R. Pareillement, en rappelant expressement que $r = \frac{R}{2}$.

$$[C_n]_{Rr} < \frac{R^2}{2n} \left[\frac{R+r}{(R-r)|n-2|} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right] [A_n]_{Rr} < \frac{\lambda R^2}{n^2} [A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_n}{d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{R}{2} \left[\frac{R+r}{(R-r)|n-2|} + \frac{R+r}{2(n+2)r} + \frac{1}{n+2}\right] [A_n]_{Rr} < \frac{\lambda R}{n} [A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{d^2C_n}{d\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{1}{2} \left[\frac{n-1}{|n-2|} \cdot \frac{R+r}{R-r} + \frac{n+1}{2(n+2)} \cdot \frac{R+r}{r} + \frac{n-1}{n+2} + 2\right] [A_n]_{Rr} < \lambda [A_n]_{Rr}.$$

Inutile de dire que nos inégalités restent encore vraies pour $n = 2$ en vertu de (27^{bis}).

Egalement, on vérifiera les inégalités:

$$\left[\frac{dC_0}{\varrho\, d\varrho}\right]_{Rr} < \lambda R[A_0]_{Rr},$$

$$\left[\frac{C_n}{\varrho}\right]_{Rr} < \frac{\lambda R}{n^2}[A_n]_{Rr}, \qquad \left[\frac{C_n}{\varrho^2}\right]_{Rr} < \frac{\lambda}{n^2}[A_n]_{Rr},$$

$$\left[\frac{dC_n}{\varrho\, d\varrho}\right]_{Rr} < \frac{\lambda}{n}[A_n]_{Rr}.$$

Pour $n = 1$ il s'introduirait des pôles du premier ordre, mais si nous remarquons que dans la suite des calculs les parties polaires se détruisent, nous pouvons conserver ces inégalités qui dans ce cas ne seraient exactes que si le résidu était nul. On en déduit

$$[v]_{Rr} < \lambda R^2[F(xy)]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda R^2[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\right]_{Rr} < \lambda R^2[F]_{Rr},$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda R[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\varrho\, \partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda R[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho\, \partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda R[F]_{Rr},$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\right]_{Rr} < \lambda[F]_{Rr}.$$

Et en faisant abstraction des parties polaires, qu'on peut supposer nulles

$$\left[\frac{\partial v}{\varrho\, \partial \varrho}\right]_{Rr} < \lambda[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\varrho^2 \partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\varrho\, \partial \varrho\, \partial \theta}\right]_{Rr} < \lambda[F]_{Rr},$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\varrho^2 \partial \theta^2}\right]_{Rr} < \lambda[F]_{Rr}.$$

Or on a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\varrho\, \partial \theta}\sin\theta, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\varrho\, \partial \theta}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 v}{\varrho\, \partial \varrho\, \partial \theta}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 v}{\varrho^2 \partial \theta^2}\sin^2\theta + \frac{\partial v}{\varrho\, \partial \varrho}\sin^2\theta$$

$$+ 2\frac{\partial v}{\varrho^2 \partial \theta}\cos\theta\sin\theta \quad \text{etc.}$$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister, il est clair que les dérivées de $v(xy)$ par rapport à x et y sont régulières à l'origine. Nous pouvons donc considérer comme évident (ce qui d'ailleurs se vérifie sans difficulté) que les parties irrégulières en ϱ se détruisent. On a par conséquent, sans aucune restriction, *les inégalites fondamentales:*

$$[v]_{Rr} < hR^2[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{Rr} < hR[F]_{Rr},$$

(36) $$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr}, \quad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h[F]_{Rr},$$

$$\left(h = 7\lambda, \quad r = \frac{R}{2}.\right)$$

Ainsi, tandisque les dérivées secondes de $v(xy)$ admettent des développements en série de Taylor en général divergents pour $\rho = R$ (voir les formules 17), *leurs développements normaux ont des normes inférieures à une certaine limite qu'on peut assigner d'avance.* L'inspection des formules (17) peut en quelque sorte faire prévoir ce fait.

En effet, l'une de ces formules était:

$$C_n = \frac{\rho^n}{R^{n-2}} \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{\rho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1\right] \frac{\alpha_{pn}}{(2p+2)(2p+2n+2)}.$$

Si on y suppose tous les α positifs, en passant à la série des modules de C_n, on ne profite pas de la différence $\frac{\rho^{2p+2}}{R^{2p+2}} - 1$ qui fait tendre C_n vers 0 lorsque $\rho = R$. Au contraire, si on met $\rho - R$ en facteur, les coefficients de $\frac{C_n}{\rho - R}$ sont tous positifs. C'est cette remarque qui m'a suggéré l'idée d'introduire les séries normales.

20. Appliquons les résultats obtenus au système d'équations (32). On a d'abord à cause des inégalités (33)

$$\left[(u_0 - 1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right]_{Rr} < LQR = L_0.$$

Par conséquent l'équation

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = (u_0 - 1)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}$$

donne en vertu de (36)

$$[v_1]_{Rr} < hL_0R^2, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]_{Rr} < hL_0.$$

D'où

$$\left[(1-u_0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - v_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right]_{Rr} < LR \cdot hL_0 + (Q + hL_0)hL_0R^2 = L_1.$$

De sorte que

$$[v_2]_{Rr} < hL_1R^2, \quad \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right]_{Rr} < hL_1.$$

Et successivement

$$\left[(1-u_1)\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - v_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right]_{Rr} < (LR + hL_0R^2)hL_1 + (Q + hL_0 + hL_1)hL_1R^2 = L_2,$$

. . . . . .

$$\left[(1-u_{n-1})\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} - v_n\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right]_{Rr} < (LR + hL_0R^2 + hL_1R^2 + \cdots + hL_{n-2}R^2)hL_{n-1}$$
$$+ (Q + hL_0 + \cdots + hL_{n-1})hL_{n-1}R^2 = L_n.$$

. . . . . .

Ainsi d'une façon générale

$$L_n = hRL_{n-1}[L + R(Q + 2hL_0 + 2hL_1 + \cdots + 2hL_{n-2} + hL_{n-1})].$$

Je dis qu'il suffit de supposer

$$Rh[L+h(Q+4hL_0)]<\tfrac{1}{2}$$

pour que

$$L_n<\tfrac{1}{2^n}L_0.$$

En effet,

$$L_1=L_0hR[L+R(Q+hL_0)]<\tfrac{1}{2}L_0,$$

$$L_2<\tfrac{1}{2}L_0hR\Big[L+R\Big(Q+2hL_0+\tfrac{1}{2}hL_0\Big)\Big]<\tfrac{1}{4}L_0,$$

. . . . . .

$$L_n<\tfrac{1}{2^{n-1}}L_0hR\Big[L+R\Big(Q+2hL_0+hL_0+\tfrac{h}{2}L_0+\cdots+\tfrac{hL_0}{2^{n-3}}+\tfrac{hL_0}{2^{n-1}}\Big)\Big]<\tfrac{1}{2^n}L_0.$$

Or on peut toujours prendre R assez petit pour que

$$Rh[L+R(Q+4hL_0)]<\tfrac{1}{2}.$$

Dans ces conditions, on a visiblement:

$$[u_0-1]_{Rr}+[v_1]_{Rr}+\cdots+[v_n]_{Rr}+\cdots<LR+2hL_0R^2,$$

$$\Big[\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}\Big]_{Rr}+\Big[\frac{\partial^2v_1}{\partial x^2}\Big]_{Rr}+\cdots+\Big[\frac{\partial^2v_n}{\partial x^2}\Big]_{Rr}+\cdots<Q+2hL_0.$$

Il en résulte que la fonction

$$u=u_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots$$

est normale à l'intérieur du cercle C de rayon R.

Elle est donc analytique à l'intérieur de ce cercle.

D'ailleurs elle représente évidemment une solution u de l'équation

$$u\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

qui sur le cercle C prend les mêmes valeurs que z.

21. Il ne nous reste plus qu'à démontrer que, pourvu que R soit assez petit, les deux solutions z et u se confondent à l'intérieur de C.

En effet, par hypothèse

$$z\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,\qquad u\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

Retranchons membre à membre et posons $z=u+t$. Il vient

$$z\frac{\partial^2t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2t}{\partial y^2}+t\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0.$$

C'est une équation linéaire en t du type elliptique, puisque $z>0$. t admettant ainsi que z et u des dérivées des deux premiers ordres finies

et continues, on est assuré qu'il est possible de prendre le cercle C assez petit pour que t ne puisse s'annuller sur son contour sans être nul à l'intérieur. *Donc $z = u$ à l'intérieur de C.* Nous reviendrons d'ailleurs dans le chapitre suivant sur ce lemme relatif aux équations linéaires dont nous venons de nous servir. Ainsi nous avons démontré le théorème:

Théorème. *Toute solution z de l'équation*

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

positive et admettant des dérivées finies et continues des trois premiers ordres, est analytique.

Chapitre IV.

Théorème général. Problème de Dirichlet.

22. Nous nous proposons, enfin, de démontrer le théorème de M. Hilbert dans toute sa généralité.

Théorème. *Soit z une solution de l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right)=0.$$

Si, F étant analytique, z a dans une certaine région S ses dérivées des trois premiers ordres finies et continues et que de plus elle vérifie l'inégalité:

$$4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}\cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}-\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}\right)^2<0, \tag{37}$$

elle est analytique.

Je dis d'abord qu'on peut se borner à ne considérer que l'équation de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) \tag{38}$$

f étant holomorphe dans le voisinage d'un système de valeurs:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r_0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s_0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t_0,\ \frac{\partial z}{\partial x}=p_0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q_0,\ z=z_0,\ x=y=0,$$

et les valeurs initiales $f'_{r_0}, f'_{s_0}, f'_{t_0}$ étant nulles.

En effet, soit z une solution de l'équation

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x'\partial y'}, \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}, \cdots, z, x', y'\right)=0.$$

Soit $z_0, p_0', q_0', r_0', s_0', t_0'$ les valeurs de z et ses dérivées par rapport à x', y' pour $x'=y'=0$.

On aura donc dans le voisinage de ces valeurs

$$F = bx' + cy' + d(z - z_0') + e\left(\frac{\partial z}{\partial x'} - p_0'\right) + f\left(\frac{\partial z}{\partial y'} - q_0'\right) + g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - r_0'\right)$$
$$+ 2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} - s_0'\right) + i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - t_0'\right) + kx'^2 + lx'y' + \cdots.$$

Et puisque

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}} = g + b_1 x' + c_1 y' + \cdots,$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y'}} = 2h + b_2 x' + c_2 y' + \cdots,$$
$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2}} = i + b_3 x' + c_3 y' + \cdots$$

on a à cause de l'inégalité fondamentale (37)

$$gi - h^2 > 0.$$

Cela posé, supposons (x, y) et (x', y') reliés par les formules

$$x = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} x' + \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}}\, y', \quad y = \frac{1}{\sqrt{g}} x'.$$

Il en résulte

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{-h}{\sqrt{g(ig - h^2)}} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y'} = \sqrt{\frac{g}{ig - h^2}} \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = \frac{h^2}{g(ig - h^2)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2h}{g\sqrt{ig - h^2}} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = \frac{-h}{ig - h^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{ig - h^2}} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{g}{ig - h^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

D'où

$$g\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - r_0'\right) + 2h\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} - s_0'\right) + i\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} - t_0'\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r_0 - t_0.$$

Et par conséquent

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2}, \cdots, z, x', y'\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots, z, x, y\right) = 0$$

f ne contenant plus de termes linéaires en

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - s_0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - t_0.$$

Le changement de variables indiqué étant évidemment légitime pourvu que $g > 0$ *et* $ig - h^2 > 0$, nous pouvons donc sans restreindre la généralité du théorème nous borner à le démontrer pour l'équation (38).

Or on peut appliquer à cette équation la méthode des approximations successives. On a le système

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}=f(r_0 s_0 t_0 p_0 q_0 z_0 00)=A,\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=f\Big(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y},\cdots,z\ x\ y\Big)-A,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}=f\Big(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2},\cdots,x,y\Big)-f\Big(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial x^2},\cdots,x,y\Big)\cdot\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{39}
$$

On déterminera successivement u_0, $v_1=u_1-u_0$, $v_2=u_2-u_1$ etc., en imposant à u_0 de se confondre avec la solution z de l'équation (38) sur une circonférence C de rayon $R(R<R')$ suffisamment petit; tandisque sur la même circonférence $v_n=0$. Dans ces conditions, on voit sans peine que, si la serie

$$u=u_0+v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots$$

converge uniformément ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres sur C et à son intérieur, elle représente une solution de l'équation (38) qui prend sur C les mêmes valeurs que z.

Occupons nous donc de la détermination successive de u_0, v_1 etc.

23. Soit, comme dans le chapitre précédent et en conservant les notations,

$$z=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta$$

les inégalités (31) pouvant être évidemment maintenues. On aura

$$u_0=\frac{A}{4}(\rho^2-R^2)+\alpha_0+\sum_{1}^{\infty}\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n[\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta]$$

On en déduit immédiatement en vertu des inégalités (31)

$$
\begin{aligned}
&[u_0-z_0]_{Rr}<\tfrac{3A}{4}R^2+LR<H\cdot R,\\
&\Big[\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\Big]_{Rr}<\frac{A}{2}R+LR<H\cdot R,\\
&\Big[\frac{\partial u_0}{\partial y}-q_0\Big]_{Rr}<\frac{A}{2}R+LR<H\cdot R,\\
&\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0\Big]_{Rr}<\Big|\frac{A}{2}+\frac{2\alpha_2}{R^2}-r_0\Big|+\sum_{3}^{\infty}\frac{n(n-1)}{R^2}\{|\alpha_n|+|\beta_n|\}<H\cdot R,\\
&\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}-s_0\Big]_{Rr}<H\cdot R,\\
&\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}-t_0\Big]_{Rr}<H\cdot R.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Considérons maintenant l'une quelconque des différences:

$$\delta_n = f\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}, \cdots, u_n, x, y\right) - f\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y}, \cdots, u_{n-1}, x, y\right)$$

où pour $n > 0$

$$x_{n-1} = x, \quad y_{n-1} = y,$$

et pour $n = 0$

$$x_{n-1} = y_{n-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} = r_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} = s_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} = t_0 \text{ etc.}$$

On a évidemment

$$\delta_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} A_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} B_n + \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} C_n + \frac{\partial v_n}{\partial x} D_n + \frac{\partial v_n}{\partial y} E_n + v_n F_n + (x_n - x_{n-1}) G_n + (y_n - y_{n-1}) H_n$$

avec

$$A_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial y^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}, \cdots, y_{n-1} + \theta(y_n - y_{n-1})\right)$$

$$B_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial u \partial y}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y}, \cdots\right) \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$C_n = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} + \theta \frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2}, \cdots\right)$$

etc.

D'autre part A_n, B_n etc. sont développables en séries de Taylor suivant les puissances de

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} - r_0, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} - s_0, \quad \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x \partial y} - s_0 \text{ etc.}$$

symmétriques par rapport aux indices n et $n-1$. Il en résulte, en tenant compte du théorème 16 et en supposant quelque soit n,

$$\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - r_0\right]_{Rr} < \alpha, \quad \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} - s_0\right]_{Rr} < \alpha \text{ etc.}$$

que

$$[A_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, R', R'),$$

$$[B_n]_{Rr} < \overset{+}{f}'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, R', R')$$

etc.

où $\overset{+}{f}$ est la série des modules de f. Cela étant, on peut se donner un nombre ε aussi petit qu'on veut et un nombre fixe P (lorsque f est donné) tels qu'on ait

$$(41) \quad \begin{array}{l} [A_n]_{Rr} < \varepsilon, \quad [B_n]_{Rr} < \varepsilon, \quad [C_n]_{Rr} < \varepsilon, \\ [D_n]_{Rr} < P, \quad [E_n]_{Rr} < P, \quad [F_n]_{Rr} < P, \quad [G_n]_{Rr} < P, \quad [H_n]_{Rr} < P, \end{array}$$

pourvu que α et R' soient assez petits Car nous avons supposé essentiellement qu'à l'origine

$$f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} = f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 0.$$

Par conséquent, si on parvient à vérifier les inégalités (41), on a

$$[\delta_0]_{Rr} = \left[f\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y}, \cdots x, y\right) - f(r_0, s_0, t_0, \cdots, 0, 0)\right]_{Rr}$$
$$< 3(P+\varepsilon)HR + 2PR = \mu.$$

Et en vertu des inégalités (36)

$$[v_1]_{Rr} < hR^2\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]_{Rr} < hR\mu, \quad \left[\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]_{Rr} < hR\mu,$$
$$\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right]_{Rr} < h\mu, \quad \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right]_{Rr} < h\mu.$$

D'où successivement, en posant $3h(\varepsilon + PR) = k$

$$[\delta_1]_{Rr} < k\mu, \qquad \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right]_{Rr} < k\mu h, \quad \text{etc.}$$
$$[\delta_2]_{Rr} < k^2\mu, \qquad \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}\right]_{Rr} < k^2\mu h, \quad \cdots$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$[\delta_n]_{Rr} < k^n\mu, \qquad \left[\frac{\partial^2 v_{n+1}}{\partial x^2}\right]_{Rr} < k^n\mu h. \quad \cdots$$

Pour que notre calcul soit légitime il suffit manifestement qu'on ait

$$k < 1 \quad \text{et} \quad HR + h\mu(1 + k + k^2 + \cdots + k^n) < HR + \frac{h\mu}{1-k} < \alpha.$$

Or il est facile de faire qu'il en soit ainsi. En effet, on peut évidemment choisir deux nombres ε_0 et R_0 assez petits, pour que, si $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $R < R_0$, on ait $k < \frac{1}{2}$; cela étant, il ne restera plus qu'à imposer à R (outre les inégalités $R < R'$ et $R < R_0$), l'inégalité

$$R\{H + 2h[2P + 3H(\varepsilon + P)]\} < \alpha.$$

Notre calcul est donc bien légitime pourvu que le rayon R du cercle C soit assez petit. Dans ces conditions on a

$$[u]_{Rr} \leqq [u_0]_{Rr} + [v_1]_{Rr} + \cdots + [v_n]_{Rr} + \cdots < |z_0| + \alpha.$$

Et par conséquent, *la série*

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

est normale et représente une fonction analytique à l'intérieur du cercle C. Sans faire appel à d'autres considérations, notre calcul lui-même prouve

que les séries dérivées des deux premiers ordres de u convergent uniformément sur C et à son intérieur. *La fonction analytique u est donc une solution de l'équation* (38) *qui sur le cercle C prend les mêmes valeurs que z.*

24. *Reste à démontrer que $z = u$ à l'interieur de C.*
On le fera de la façon suivante. Par hypothèse,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \cdots, z, x, y\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots, u, x, y\right) = 0.$$

En retranchant membre à membre et posant $z - u = t$, il vient

$$(42) \quad A(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + B(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C(xy)\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + D\frac{\partial t}{\partial x} + E\frac{\partial t}{\partial y} + Ft = 0$$

avec

$$A(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}, \cdots, u + \theta t, x, y\right),$$

$$B(xy) = -f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \cdots, x, y\right),$$

$$C(xy) = 1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \cdots\right)$$

etc.

où $0 < \theta < 1$. On a ainsi une équation linéaire en t. Je dis qu'à l'intérieur d'un cercle C de rayon R assez petit cette équation appartient au *type elliptique.*

En effet, pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit que

$$4\left(1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right)\left(1 - f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right) - \left(f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0$$

lorsqu'on remplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ par } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{ par } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} \text{ etc.}$$

(θ étant compris entre 0 et 1.)

Il suffit donc, que

$$(43) \qquad \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}\right| + \left|f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \cdot f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial y_2}}\right| + \frac{1}{4}\left(f'_{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}\right)^2 < 1.$$

Or, si on se rappelle qu'à l'origine

$$f'_{r_0} = f'_{s_0} = f'_{t_0} = 0,$$

on verra que l'inégalité (43) est nécessairement verifiée, du moment que:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}-r_0\right|<\beta,\quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y}-s_0\right|<\beta,\quad \left|\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}-t_0\right|<\beta,$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}+\theta\frac{\partial t}{\partial x}-p_0\right|<\beta,\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial y}+\theta\frac{\partial t}{\partial y}-q_0\right|<\beta,\qquad |u+\theta t-z_0|<\beta,$$

$$|x|<\beta,\qquad |y|<\beta$$

β étant un nombre suffisamment petit.

Mais à cause de la continuité de z, on peut bien prendre le rayon R du cercle C où z et u se confondent assez petit pour que

$$|z-z_0|<\frac{\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial z}{\partial x}-p_0\right|<\frac{\beta}{3},\cdots,\left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-r_0\right|<\frac{\beta}{3}.$$

D'autre part, en vertu du raisonnement du § précédent, on peut aussi choisir R assez petit, pour que la solution u obtenue par la méthode des approximations successives satisfasse aux inégalités

$$|u_0-z_0|<\frac{\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial x}-p_0\right|<\frac{\beta}{3},\cdots,\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0\right|<\frac{\beta}{3}.$$

Et par suite

$$|t|<\frac{2\beta}{3},\quad \left|\frac{\partial t}{\partial x}\right|<\frac{2\beta}{3},\cdots,\left|\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right|<\frac{2\beta}{3}.$$

Donc

$$\left|\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-r_0+\theta\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right|<\beta \text{ etc.}$$

L'équation en t est donc du type elliptique. Si on remarque en outre que $A(xy)$, $B(xy)$, $\cdots$ sont finies et continues ainsi que leurs dérivées premières, on constate que la solution t admettant des dérivées des deux premiers ordres finies et continues ne peut s'annuller sur un cercle C de rayon R suffisamment petit sans être nulle identiquement.

Il est donc établi que $z=u$. Par conséquent, *la solution z dont nous sommes partis est analytique.*

25. On pourrait cependant faire une objection à la dernière partie de notre démonstration. Dans tout ce qui précède nous avons toujours précisé au moyen des données du problème la limite supérieure de R; nous n'avons omis de le faire qu'à la fin de notre raisonnement où nous avons dit que dans une région S, où l'inégalité (43) est remplie, l'équation (42) ne peut avoir plus d'une solution prenant une succession donnée de valeurs sur une circonférence de rayon R assez petit. Pour ne laisser subsister aucun doute à ce sujet, je me propose de fixer effectivement pour R une limite supérieure.

Je me servirai d'une méthode tout à fait semblable a celle que suit M. Picard*) dans le cas où $A=C=1$, $B=0$.

*) Traité d'analyse t. II, Ch. I, p. 24.

Théorème. *Soit une équation linéaire*

$$(42^{bis}) \qquad A(xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(xy)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(xy)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D(xy)\frac{\partial z}{\partial x} + 2E(xy)\frac{\partial z}{\partial y} + F(xy)\cdot z = 0$$

A, B, C, D, E et F sont des fonctions de x et y admettant des dérivées finies et continues et vérifiant dans une région S comprenant l'origine l'inégalité $\delta = AC - B^2 > 0$. Il est possible de fixer un nombre k tel qu'une solution z continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres qui s'annulle sur un contour C (de S) où $|x| < k$, est identiquement nulle à l'intérieur de C.

Soit z la solution qui s'annulle sur C. Considérons l'intégrale double prise à l'intérieur du contour C

$$I = \int\int z\left\{\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz\right) - M\left(z + 2x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} dx\,dy$$

$$= -M\int\int \frac{\partial(z^2 x)}{\partial x}\, dx\,dy = 0.$$

D'autre part on a

$$I = -\int\int \left\{A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) z\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right) z\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} - F\right) z^2 + Mz^2 + 2Mxz\frac{\partial z}{\partial x}\right\} dx\,dy$$

M est une constante que nous laissons pour le moment arbitraire. Sous le signe d'intégration nous avons une forme quadratique en z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Calculons son discriminant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & 2B & \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 2Mx \\ 2B & 2C & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \\ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 2Mx & \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} & 2\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} - f + M\right) \end{vmatrix}$$

$$= 8(AC - B^2)\left(\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} - f + M\right) + 4B\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 2Mx\right)\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right)$$

$$- 2C\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + 2Mx\right)^2 - 2A\left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right)^2.$$

Si Δ est positif, I ne peut être nulle sans que $z = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ pour toute valeur de x et y à l'intérieur de C. Or il est facile de voir que, si M est assez grand et Mx assez petit, Δ sera positif.

Précisons. On doit avoir

$$4M\delta > A\alpha^2 + C(\beta + 2Mx)^2 - 2B(\alpha + 2Mx)\beta - 4\delta\theta$$

avec

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \alpha, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} - F = \theta.$$

Il suffit donc de poser

$$|x| < k = \frac{2\delta_1}{N} \quad \text{et} \quad M = \frac{N}{2\delta_1}$$

en désignant par δ_1 le minimum de δ et par N le maximum de

$$|A\alpha^2| + |C|(|\beta| + 1)^2 + 2|B|(|\alpha| + 1)|\beta| + 4\delta|\theta|.$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Le même raisonnement pouvant être repris en remplaçant x par y on obtient un rectangle Γ de dimensions bien déterminées tel qu'une solution de l'équation (42) est identiquement nulle, lorsqu'elle s'annulle sur un contour intérieur à Γ.

L'objection que nous avons relevée est donc écartée.*)

26. *Nous dirons qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre* $F = 0$ *appartient au type elliptique, si quels que soient* x, y, z *on a*

$$\delta = 4F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 > 0.$$

D'après ce qui précède

Toute solution d'une équation de type elliptique admettant des dérivées des trois premiers ordres finies et continues est analytique.

Comme exemple d'une équation du type elliptique, nous indiquerons celle des surfaces *minima*

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\delta = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right).$$

Cette équation, comme toutes celles qui dérivent de problèmes géomètriques invariants par rapport au groupe de translation dans l'espace, ne contient pas explicitement x, y, z. Or il aisé de montrer qu'*une solution (si elle existe) d'une équation elliptique ne contenant pas* z *est entièrement déterminée par l'ensemble des valeurs sur un contour de dimensions quelconques.*

*) Je n'insiste pas sur les généralisations dont le résultat obtenu est évidemment susceptible pour des équations d'ordre quelconque à coefficients complexes dans un espace à n dimensions. Une note fondamentale de M. Picard (C. R. t. CXXI) devrait servir de base à une étude de ce genre.

En effet, soient

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x}, x, y\right) = 0, \qquad F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x}, x, y\right) = 0.$$

En retranchant et posant $z - u = t$, il vient

$$A\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial t}{\partial x} + 2E\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Puisque $B^2 - AC < 0$, pour toute valeur de x et y et que cette équation ne contient pas t explicitement, il résulte des recherches de M. Picard, que t ne peut s'annuller sur aucun contour fermé sans être identiquement nul. Donc $t = u$. C'est ce que nous voulions démontrer. Ainsi il ne peut exister, par exemple, qu'une seule surface minima passant par un contour fermé donné de dimensions quelconques (pourvu qu'il puisse être projeté sans points doubles).

On vérifiera aussi facilement les deux propositions suivantes:

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

étant une équation elliptique admettant la solution $z = 0$, 1° *aucune de ses solutions ne peut avoir ni maxima, ni minima,* 2° *une solution régulière dans tout le plan se reduit à une constante.* Ainsi une surface minima ne peut être convexe, et la seule surface minima partout régulière est le plan.

27. On voit que les recherches précédentes sont étroitement liées au problème de Dirichlet relatif à la détermination d'une solution d'une équation aux dérivées partielles par l'ensemble de valeurs qu'elle est assujettie à prendre sur un contour donné C.

Je dis que si par un raisonnement quelconque, on peut affirmer l'existence de cette solution, la méthode que nous avons suivie convenablement complétée permet de la calculer effectivement dans des cas très étendus. (Pour fixer les idées je propose au lecteur d'avoir constamment sous les yeux l'équation des surfaces minima; nos raisonnements s'appliquent d'ailleurs à toutes les équations du type elliptique ne contenant pas explicitement x, y, z.) Je me borne au cas où le contour est circulaire; il suffirait de le supposer régulièrement analytique.

La méthode sous sa forme actuelle pour être appliquée exige évidemment deux choses:

1° *Le contour circulaire C doit être suffisamment petit.*

2° *L'ensemble des valeurs données sur ce contour doit être représenté par une fonction, admettant des dérivées finies et continues des trois premiers ordres, oscillant entre des limites suffisamment approchées.*

Je dis qu'on peut supposer le rayon du cercle C quelconque et l'ensemble des valeurs sur le contour représenté par une fonction continue arbitraire.

Pour le voir il faut d'abord s'appuyer sur le lemme suivant que M. Picard a établi dans le cas des équations linéaires:

Lemme. *Soit* $u_1(xy), u_2(xy), \cdots, u_n(xy) \cdots$ *une succession de solutions de l'équation* $F=0$ *qui sur le cercle C prennent les valeurs* $u_1(\theta), u_2(\theta), \cdots, u_n(\theta) \cdots$; *si* $\lim_{n=\infty} u_n(\theta) = u(\theta)$, $u_n(xy)$ *aura pour limite* $u(xy)$ *qui sera la solution de l'équation* $F = 0$ *prenant sur C les valeurs* $u(\theta)$.

Par conséquent, grâce au théorème de Weierstrass rappellé au commencement de ce travail, *le problème de Dirichlet sera résolu pour une succession de valeurs représentée par une fonction continue arbitraire, si on sait le résoudre pour une fonction quelconque analytique régulière et périodique. Dès lors on peut considérer le problème comme complètement résolu dans le cas linéaire pour un cercle suffisamment petit (sans même admettre a priori sa possibilité).* Il suffit de remarquer avec M. Picard que dans ce cas *la convergence de la série* (11) (voir § 5) *obtenue par la méthode des approximations successives est indépendante des valeurs de la fonction et de ses dérivées sur le contour C.*

Il en est autrement dans le cas général. Déjà dans le cas de M. Lutkemeyer (voir § 6) la convergence de la solution dépend essentiellement des valeurs sur le contour et, quelque petit que soit ce contour, il est toujours possible de prendre les valeurs de la fonction ou de ses dérivées assez grandes, pour que la méthode des approximations successives tombe en défaut.

En général, il faudra avoir recours au lemme suivant que je ne démontrerai pas dans l'espoir d'y revenir dans un travail spécialement consacré au problème de Dirichlet:

Lemme. *Soit*

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \alpha\right) = 0$$

une équation analytique du type elliptique lorsque le parametre α *est compris entre* 0 *et* 1. *Si* $u(x, y, \alpha)$ *est une solution de cette équation pour* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *qui sur un contour donné C prend la même succession de valeurs,* $u(xy\alpha)$ *est analytique par rapport à* α*).

L'utilité de ce lemme est évidente. En effet, mettons par exemple F sous la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

*) Le principe de la démonstration consiste essentiellement à différentier successivement F par rapport à α et à en déduire des limites supérieures pour les différentes dérivées de $u(xy\alpha)$ par rapport à α. Le rayon de convergence du développement de Taylor de u se trouve être différent de zéro.

En se reportant au raisonnement du § 23, on voit que *quelque soit le rayon R du cercle C et les valeurs de u (admettant trois dérivées par rapport à θ) sur sa périphérie, il est possible de fixer* $|\alpha| < \lambda$ *suffisamment petit pour que la méthode des approximations successives puisse être appliquée. Si on sait d'avance que l'équation admet une solution quelque soit* α *entre* 0 *et* 1, *on n'aura qu'à prolonger analytiquement par rapport à* α *la fonction trouvée pour calculer effectivement cette solution pour n'importe quelle valeur de* α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$. *Ainsi, par exemple on développera la solution trouvée pour* α *très petit en une série de polynomes de Mittag-Leffler qui convergera nécessairement lorsque* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *et* $|\alpha| < \lambda$.

Les fonctions $u(\alpha)$ forment, en général, une nouvelle classe de fonctions analytiques transcendantes *à espaces lacunaires.*

On peut d'ailleurs remarquer que *la question de la possibilité d'un problème de Dirichlet se ramène à la question de reconnaitre, si une fonction analytique peut être prolongée en un point extérieur à son cercle de convergence.* De nouvelles recherches sur la nature de la fonction $u(\alpha)$ seraient nécessaires pour pouvoir tirer profit de ce déplacement de la difficulté sur un terrain qui malgré les beaux travaux de MM. Hadamard, Borel, Fabry, et autres, reste encore une des parties les plus arides de l'analyse*). J'arrête là ces généralités pour passer à un sujet différent.

Chapitre V.

Equations du type hyperbolique et parabolique.

28. Soit

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right) = 0$$

une équation analytique aux dérivées partielles du second ordre. On dira que cette équation appartient au *type hyperbolique*, si quel que soit x, y, z, on a

$$4 F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2 < 0$$

ou au *type parabolique*, si

$$4 F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} - \left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right) = 0.$$

Pour compléter le théorème de M. Hilbert il serait intéressant de montrer que *les équations hyperboliques et paraboliques admettent, en général,*

*) J'ai indiqué récemment dans une Note des Comptes Rendus (Avril, 1904) certains cas, où on peut par ce procédé démontrer la possibilité d'un problème de Dirichlet pour les équations différentielles ordinaires.

des solutions non analytiques. Ici nous allons nous borner à l'établir pour les équations

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x\,y\,z\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \text{(du type hyperbolique)} \tag{44}$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi\left(x\,y\,z\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) \qquad \text{(du type parabolique).} \tag{45}$$

Nous verrons pourtant que toutes les solutions de la seconde équation sont *analytiques en* x.

La méthode que nous suivrons est encore celle des approximations successives*). On peut l'appliquer de deux façons différentes. On peut en se donnant des valeurs initiales *non analytiques* chercher à démontrer directement que la solution qui leur correspond est *non analytique.* C'est la marche qu'on est tenté de suivre naturellement. Malheureusement les moyens dont nous disposons semblent peu appropriés à favoriser cette marche. On est, en effet, amené à résoudre la question suivante: soit

$$S = u_0(xy) + u_1(xy) + \cdots + u_n(xy) + \cdots$$

une série convergente de fonctions non analytiques; reconnaitre si cette série elle-même représente une fonction non analytique. Cette question est, sans doute, très intéressante, mais on a là à manier des éléments aussi complexes et aussi peu étudiés que les fonctions non analytiques; on voit donc bien qu'il ne doit pas être facile d'arriver ainsi à un résultat. M. Lutkemeyer dans sa thèse déjà citée a suivi précisément cette marche directe, mais sans succès.

Il est inutile que j'insiste sur les calculs qu'il fait; je me bornerai d'indiquer le point faible de son raisonnement qui se rattache justement à la difficulté que je viens de signaler. Il arrive à mettre la solution u de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u$ (surfaces à courbure constante négative) sous la forme:

$$u_0 = g_0(x) + g_1(x) \cdot y + \cdots + g_n(x) \cdot y^n + \cdots$$

où $g_0(x)$ est une fonction *non analytique,* tandis qu'on ne dit rien au sujet de $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\cdots$; on sait en outre que la série u converge tant que $|xy| < 1$. M. Lutkemeyer considère comme évident que la fonction $u(xy)$ n'est nulle part analytique, car dit-il, si elle était analytique $g_0(x)$ le serait aussi nécessairement. Mais cette affirmation est inexacte. La seule chose qu'on peut affirmer c'est que pour $y = 0$ (ce qui d'ailleurs ne contient rien de nouveau, puisqu'on est parti de cette hypothèse) $u(x, 0)$ est non analytique. Il est, en effet, facile de voir que n'importe

*) Voir Em. Picard «Théorie des équations aux dérivées partielles» Journal de Mathématiques 1890.

quelle fonction $f(xy)$ analytique pour toute valeur finie de x et y sauf pour $y = 0$, où elle se réduit à une fonction non analytique de x, est susceptible d'un développement semblable à celui de $u(xy)$.

Nous suivrons au contraire une *marche indirecte* (réduction à l'absurde) qui a l'avantage de nous éviter l'introduction des fonctions non analytiques.

29. Examinons d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x\, y\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{44}$$

Nous nous appuierons sur le lemme suivant:

Lemme. *Soient $\psi_1(x)$ et $\psi_2(y)$ deux fonctions holomorphes dans le voisinage de $x = y = 0$ $(\psi_1(0) = \psi_2(0) = A)$. Si $f\left(x\, y\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ est une fonction analytique (entière)*), il existe une seule**) fonction holomorphe près de 0 $u(xy)$ vérifiant l'équation (44) et se réduisant à $\psi_1(x)$ sur l'axe des x et à $\psi_2(y)$ sur l'axe des y.*

Nous démontrerons cette proposition par la méthode des approximations successives. On peut évidemment substituer à l'équation (44) le système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = 0,\\
&\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} = f\left(x\, y\, u_0\, \frac{\partial u_0}{\partial x}\, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} = f\left(x\, y\, u_1\, \frac{\partial u_1}{\partial x}\, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - f\left(x\, y\, u_0\, \frac{\partial u_0}{\partial x}\, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 v_n}{\partial x \partial y} = f\left(x\, y\, u_{n-1}\, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right) - f\left(x\, y\, u_{n-2}\, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}\, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}\right)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

où $v_n = u_n - u_{n-1}$ et u_n est assujetti à se réduire à $\psi_1(x)$ sur l'axe des x et à $\psi_2(y)$ sur l'axe des y. Si la série

$$u = u_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

converge uniformément ainsi que ses dérivées premières, elle sera une

---

*) Cette restriction n'est pas essentielle.

**) Il ne peut y avoir plus d'une solution *analytique* satisfaisant aux mêmes conditions initiales, car il en résulterait que l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = A\frac{\partial v}{\partial x} + B\frac{\partial v}{\partial y} + Cv$$

(A, B, C étant analytiques) peut avoir une solution *analytique* s'annullant sur les axes sans être nulle partout.

solution de l'équation (44) satisfaisant aux conditions initiales imposées. Or il est aisé de voir que si v est la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = F(xy)$$

qui s'annulle sur l'axe des x et sur l'axe des y, on a

$$v(xy) = \int_0^x \int_0^y F(xy)\, dx\, dy.$$

Par conséquent, si F est analytique, v l'est nécessairement, et en employant nos notations habituelles, on a tant que $|x| < R$, $|y| < R$

$$\overset{+}{v}(x, y) < R^2 \overset{+}{F}(R, R),$$

$$\frac{\partial \overset{+}{v}(xy)}{\partial x} < R\overset{+}{F}(R, R),$$

$$\frac{\partial \overset{+}{v}(xy)}{\partial y} < R\overset{+}{F}(R, R),$$

D'autre part, soit

$$\overset{+}{\psi}_1(R_1) < M, \quad \overset{+}{\psi}_1'(R_1) < M, \quad \overset{+}{\psi}_2(R_2) < M, \quad \overset{+}{\psi}_2'(R_2) < M$$

(ψ' désigne la dérivée de ψ)

et P étant un nombre fixe supérieur à $2M$,

$$\overset{+}{f}(R, R, P, P, P) < L,$$

$$\overset{+}{f}_u'(R, R, P, P, P) < \frac{L}{8},$$

$$\overset{+}{f}_{\frac{\partial u}{\partial x}}'(R, R, P, P, P) < \frac{L}{8},$$

$$\overset{+}{f}_{\frac{\partial u}{\partial x}}'(R, R, P, P, P) < \frac{L}{8}.$$

Donc, puisque $u_0(xy) = \psi_1(x) + \psi_2(y) - A$, on a successivement

$$\overset{+}{u}_0(\rho_1 \rho_2) < 2M, \quad \frac{\partial \overset{+}{u}_0}{\partial x} < M, \quad \frac{\partial \overset{+}{u}}{\partial y} < M,$$

$$\overset{+}{v}_1(\rho_1 \rho_2) < R^2 L, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_1}{\partial x} < RL, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_1}{\partial y} < RL,$$

$$\overset{+}{v}_2(\rho_1 \rho_2) < R^2 L^2, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_2}{\partial x} < R^2 L^2, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_2}{\partial y} < R^2 L^2,$$

. . . . . .

$$\overset{+}{v}_n(\rho_1 \rho_2) < R^{n+1} L^n, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_n}{\partial x} < R^n L^n, \quad \frac{\partial \overset{+}{v}_n}{\partial y} < R^n L^n$$

. . . . . .

en supposant

$$\varrho_1 < R_1, \quad \varrho_1 < R, \quad \varrho_2 < R_2, \quad \varrho_2 < R.$$

Nos inégalités ne seront manifestement légitimes, quelque soit n, que si

$$RL < 1, \quad \frac{R^2 L}{1 - RL} < P - 2M, \quad \frac{RL}{1 - RL} < P - M.$$

Il suffit de prendre R assez petit pour qu'il en soit ainsi. Dans ces conditions $u(xy)$ sera nécessairement holomorphe tant que

$$|x| < \varrho_1, \qquad |y| < \varrho_2$$

et sera bien la solution cherchée. C. q. f. d.

Ceci posé, admettons que $u(xy)$ est une fonction analytique de x et y régulière à l'intérieur d'une aire S comprenant le rectangle Σ formé par les droites $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$, sauf sur l'axe des x où elle se réduit à une fonction $u(x, 0)$ non analytique admettant une dérivée finie et continue. Une pareille fonction peut fort bien exister, mais nous verrons dans un instant qu'*il est impossible qu'elle vérifie l'équation* (44). En effet, *supposons que* $u(xy)$ *vérifie l'équation* (44). Nous pouvons évidemment fixer un nombre M par la condition qu'à chaque point $(x_0 y_0)$ du rectangle Σ où $y_0 > 0$ correspondent deux nombres R_1 et R_2' non nuls, tels que

$$\overset{+}{u}(x_0 + R_1, y_0) < M \quad \frac{\partial \overset{+}{u}(x_0 + R_1, y_0)}{\partial x} < M,$$

$$\overset{+}{u}(x_0, y_0 + R_2') < M \quad \frac{\partial \overset{+}{u}(x_0, y_0 + R_2')}{\partial y} < M.$$

La limite inférieure de R_2' est d'ailleurs égale à un nombre R_2 *essentiellement positif*, puisque $u(xy)$ est régulière par rapport à y partout à l'intérieur de S. Or, M étant donné, on peut fixer d'après le lemme précédent (indépendemment de R_1 et R_2) un nombre positif R tel que $u(xy)$ soit holomorphe tant que

$$|x - x_0| < R_1, \quad |x - x_0| < R, \quad |y - y_0| < R_2, \quad |y - y_0| < R.$$

Par conséquent, quel que soit x_0, il suffit de prendre

$$y_0 < R_2, \qquad y_0 < R$$

pour que $u(xy)$ soit analytique pour $x = x_0$, $y = 0$. *Notre supposition est donc absurde.*

Il en résulte que *si une solution* $u(xy)$ *de l'équation* (44) *se réduit pour* $y = 0$ *à une fonction non analytique de* x $u(x0)$ *admettant une dérivée finie et continue, et pour* $x = 0$ *à une fonction analytique de* y $u(0y)$, *elle n'est nulle part analytique par rapport à* x.

En échangeant x et y on parviendrait évidemment à construire de la même manière une solution (autant de fois dérivable qu'on le veut) qui ne soit nulle part analytique en y.

30. Passons, enfin, à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi\left(x\, y\, u\, \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{45}$$

En se donnant les valeurs de la solution u et de sa dérivée par rapport à x sur l'axe des y et suivant une marche analogue, on reconnait que, quelles que soient les valeurs initiales (finies et continues), *u est analytique par rapport à x*). $u(x, y)$ sera aussi analytique par rapport à y, si $u(0, y)$ et $\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}$ sont analytiques.* Au contraire, *si l'une au moins de ces fonctions initiales est non analytique, $u(xy)$ est non analytique par rapport à y.*

Göttingue, 30. Janvier 1904.

*) Il est d'ailleurs aisé de voir qu'il n'existe qu'une seule fonction *u analytique au non* satisfaisant aux mêmes conditions.

Décomposition de la forme ternaire du troisième degré

par

K. Bes à Tilbourg (Hollande).

§ 1.

La forme ternaire du troisième degré

$$(1)\quad u \equiv a_1x^3 + a_2x^2y + a_3x^2z + a_4xy^2 + a_5xyz + a_6xz^2 + a_7y^3 + a_8y^2z + a_9yz^2 + a_{10}z^3$$

est irréductible, si l'équation

$$(2)\quad u = 0$$

n'admet aucune solution du deuxième ordre ou tout au plus une seule c-à-d une solution satisfaisant simultanément aux trois équations dérivées:

$$(3)\quad u_x = 0,\quad u_y = 0,\quad u_z = 0.$$

Elle est décomposable en deux facteurs, l'un du premier, l'autre du second degré, si l'équation (2) admet deux solutions du deuxième ordre.

Elle est décomposable en trois facteurs linéaires, si l'équation (2) admet trois solutions du deuxième ordre*).

En partant de ces principes il n'est pas difficile de trouver les conditions qui doivent être remplies dans les trois cas mentionnés**).

§ 2.

Les trois équations dérivées:

$$(4)\quad \begin{cases} u_x \equiv 3a_1x^2 + 2a_2xy + 2a_3xz + a_4y^2 + a_5yz + a_6z^2 = 0, \\ u_y \equiv a_2x^2 + 2a_4xy + a_5xz + 3a_7y^2 + 2a_8yz + a_9z^2 = 0, \\ u_z \equiv a_3x^2 + a_5xy + 2a_6xz + a_8y^2 + 2a_9yz + 3a_{10}z^2 = 0, \end{cases}$$

*) La décomposition de la forme ternaire du troisième degré en facteurs linéaires a été traitée par Brioschi (Annali di Matematica, serie II, tome VII, pag. 189), par A. Thaer (Mathematische Annalen, tome XIV, pag. 545), par A. Brill (Mathematische Annalen, tome L, pag. 180).

**) Nous supposons tacitement que la forme ternaire ne contienne pas de facteurs linéaires égaux. Si ce cas se présentait, les trois dérivées de cette forme seraient divisibles par ce facteur multiple, que l'on pourrait déterminer en appliquant l'algorithme pour chercher leur plus grand commun diviseur.

admettent au plus une seule solution commune, si au moins l'un des déterminants de l'assemblant:

(5)

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
$p_1 = x^3$	$3a_1$			a_2			a_3		
$p_2 = x^2y$	$2a_2$	$3a_1$		$2a_4$	a_2		a_5	a_3	
$p_3 = x^2z$	$2a_3$		$3a_1$	a_5		a_2	$2a_6$		a_3
$p_4 = xy^2$	a_4	$2a_2$		$3a_7$	$2a_4$		a_8	a_5	
$p_5 = xyz$	a_5	$2a_3$	$2a_2$	$2a_8$	a_5	$2a_4$	$2a_9$	$2a_6$	a_5
$p_6 = xz^2$	a_6		$2a_3$	a_9		a_5	$3a_{10}$		$2a_6$
$p_7 = y^3$		a_4			$3a_7$			a_8	
$p_8 = y^2z$		a_5	a_4		$2a_8$	$3a_7$		$2a_9$	a_8
$p_9 = yz^2$		a_6	a_5		a_9	$2a_8$		$3a_{10}$	$2a_9$
$p_{10} = z^3$			a_6			a_9			$3a_{10}$

a une valeur différente de zéro*). Dans ce cas, la forme ternaire proposée est irréductible.

§ 3.

Pour fixer les idées, considérons en premier lieu le cas où tous les déterminants de l'assemblant (5) ne s'annulent pas, tandis que le résultant des équations (4) s'évanouit, ces équations admettent dans ce cas une seule solution commune, déterminée par les équations:

$$\left.\begin{aligned} p_{10}y + p_9z &= 0, \\ -p_{10}x + p_6z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ou par d'autres équations analogues, dans lesquelles les symboles p représentent des déterminants désignés**) contenus dans l'assemblant (5).

§ 4.

Dans le cas où tous les déterminants de l'assemblant (5) s'annulent, les équations (4) admettent au moins deux solutions communes, les équa-

*) Le lecteur est prié de consulter les mémoires de l'auteur sur la théorie de l'élimination dans les „Verhandelingen der Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam", tome VI n° 7, tome VIII n^{os} 1, 2 et 6, intitulés:

1. Théorie générale de l'élimination d'après la méthode Bezout suivant un nouveau procédé (1899),

2. L'équation finale (1901),

3. Les systèmes de racines d'un système de n équations homogènes à $n+1$ variables (1902),

4. La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques (1904).

**) Les indices signifient, comme on sait, les lignes qu'on doit supprimer dans l'assemblant pour obtenir le déterminant proposé.

tions (6) deviennent illusoires, *et réciproquement*, si les équations (6) deviennent illusoires, les équations (4) admettent au moins deux solutions communes.

Pour que cela ait lieu, il est nécessaire que les trois déterminants p_8, p_9, p_{10} de l'assemblant (5) s'annulent; les autres déterminants de cet assemblant s'annulent alors également. Cela se démontre facilement en considérant les différentes équations résultantes qui découlent de cet assemblant.

§ 5.

Dans le cas considéré les équations (4) sont liées par la relation de dépendance:

$$(7)\quad (s_1x+s_2y+s_3z)u_x+(s_4x+s_5y+s_6z)u_y+(s_7x+s_8y+s_9z)u_z\equiv 0$$

dans laquelle les symboles s représentent les déterminants successifs de l'assemblant que l'on obtient en supprimant deux lignes dans l'assemblant (5) qui ne se rapportent pas à des arguments de la forme ternaire ayant des coefficients zéro.

§ 6.

Si la forme ternaire proposée est décomposable en deux facteurs, l'un du premier, l'autre du second degré, les équations (4) admettent en tout deux solutions communes, en général déterminées par les équations:

$$(8)\qquad \begin{cases} p_{9,10}y^2+p_{8,10}yz+p_{8,9}z^2=0, \\ -p_{9,10}x+p_{7,10}y+p_{7,9}z=0, \end{cases}$$

dans lesquelles les symboles p représentent des déterminants désignés, contenus dans l'assemblant que l'on obtient en supprimant une colonne dans l'assemblant (5), se rapportant à un terme de la relation (7) qui ne s'annule pas.

§ 7.

Pour fixer les idées, supprimons la dernière colonne dans l'assemblant (5). Les symboles p répresentent alors des déterminants désignés de l'assemblant:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 3a_1 & & & a_2 & & & a_3 & \\ 2a_2 & 3a_1 & & 2a_4 & a_2 & & a_5 & a_3 \\ 2a_3 & & 3a_1 & a_5 & & a_2 & 2a_6 & \\ a_4 & 2a_2 & & 3a_7 & 2a_4 & & a_8 & a_5 \\ a_5 & 2a_3 & 2a_2 & 2a_8 & a_5 & 2a_4 & 2a_9 & 2a_6 \\ a_6 & & 2a_3 & a_9 & & a_5 & 3a_{10} & \\ & a_4 & & & 3a_7 & & & a_8 \\ & a_5 & a_4 & & 2a_8 & 3a_7 & & 2a_9 \\ & a_6 & a_5 & & a_9 & 2a_8 & & 3a_{10} \\ & & a_6 & & & a_9 & & \end{vmatrix}.$$

Dans le cas particulier où l'on a $p_{9,10} = 0$, tandis que $p_{7,10}$ et $p_{7,9}$ ne s'annulent pas tous deux à la fois, les deux solutions communes aux équations (4) sont déterminées par les deux équations:

$$(10) \qquad \begin{cases} p_{7,10}y + p_{7,9}z = 0, \\ p_{2,4}x^2 + p_{1,4}xy - p_{1,1}y^2 = 0, \end{cases}$$

ou par la première équation (10) et l'une des équations (4).

§ 8.

Les déterminants de l'assemblant (9) sont du huitième degré, mais les coefficients des équations (8) et (10) sont divisibles par des communs facteurs du quatrième degré, comme nous le démontrerons dans la suite. En divisant les coefficients de ces équations par leur commun facteur, ils se réduisent à des formes du quatrième degré.

§ 9.

Si tous les déterminants de l'assemblant (9) s'annulent, les équations (4) admettent trois solutions communes, les équations (8) deviennent illusoires, *et réciproquement*, si les équations (8) deviennent illusoires, les équations (4) admettent trois solutions communes.

Pour que cela ait lieu, il est nécessaire que les cinq déterminants $p_{9,10}, p_{8,10}, p_{8,9}, p_{7,10}, p_{7,9}$ s'annulent; les autres déterminants de l'assemblant (9) s'annulent également. Cela découle des équations résultantes existant dans ce cas entre trois arguments quelconques de la forme ternaire proposée.

§ 10.

Dans le cas qui nous occupe, où tous les determinants de l'assemblant (9) s'annulent, les équations (4) sont liées par deux relations indépendantes, analogues à la relation (7).

Si dans ces deux relations les coefficients s_8 et s_9 ne s'annulent pas, on peut en déduire les deux relations suivantes:

$$(11) \qquad \begin{cases} (s_1'x + s_2'y + s_3'z)u_x + (s_4'x + s_5'y + s_6'z)u_y + (s_7'x + s_8'y)u_z \equiv 0, \\ (s_1''x + s_2''y + s_3''z)u_x + (s_4''x + s_5''y + s_6''z)u_y + (s_7''x + s_9''z)u_z \equiv 0. \end{cases}$$

§ 11.

Pour que la forme ternaire (1) soit décomposable en trois facteurs linéaires, tous les déterminants de l'assemblant (9) doivent s'annuler.

On obtient ainsi $\binom{10}{2} = 45$ conditions*), dont il suffit en général que cinq soient remplies, les autres se vérifient également**).

§ 12.

Les équations résultantes par lesquelles on évalue les trois solutions communes aux équations (4), découlent de l'assemblant que l'on obtient en supprimant deux colonnes dans l'assemblant (5), se rapportant à des termes des relations (11) qui ne s'annulent pas dans ces deux relations.

Pour fixer les idées, supprimons la dernière colonne dans l'assemblant (9), d'où l'on obtient l'assemblant:

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} 3a_1 & & & a_2 & & & a_3 \\ 2a_2 & 3a_1 & & 2a_4 & a_2 & & a_5 \\ 2a_3 & & 3a_1 & a_5 & & a_2 & 2a_6 \\ a_4 & 2a_2 & & 3a_7 & 2a_4 & & a_8 \\ a_5 & 2a_3 & 2a_2 & 2a_8 & a_5 & 2a_4 & 2a_9 \\ a_6 & & 2a_3 & a_9 & & a_5 & 3a_{10} \\ & a_4 & & & 3a_7 & & \\ & a_5 & a_4 & & 2a_8 & 3a_7 & \\ & a_6 & a_5 & & a_9 & 2a_8 & \\ & & a_6 & & & a_9 & \end{vmatrix}.$$

De cet assemblant on déduit facilement les équations résultantes suivantes:

$$(13) \qquad \begin{cases} p_{8,9,10}y^3 + p_{7,9,10}y^2z + p_{7,8,10}yz^2 + p_{7,8,9}z^3 = 0, \\ -p_{8,9,10}xz + p_{6,9,10}y^2 + p_{6,8,10}yz + p_{6,8,9}z^2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations doivent être remplacées par d'autres équations découlant du même assemblant, dans le cas où la première équation (13) admet des systèmes de racines égaux qui ne se rapportent pas à la même valeur de x. Dans ce cas $p_{8,9,10}$ s'annule. Cependant pour ne pas tomber dans des répétitions oiseuses, nous nous abstenons de traiter les différents cas qui peuvent se présenter.

---

*) Comparer: A. Thaer, Über die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien (Math. Annalen, Bd. 14, pag. 545) et A. Brill, Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren (Math. Annalen, Bd. 50, pag. 157).

**) Ce nombre de cinq relations entre les coefficients de la forme ternaire proposée peut se réduire à trois relations indépendantes. Comparer le quatrième mémoire cité plus haut.

§ 13.

Pour obtenir les équations propres à évaluer les trois solutions communes aux équations (4) on pourrait se servir pareillement de l'assemblant:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} 3a_1 & a_2 & a_3 \\ 2a_2 & 2a_4 & a_5 \\ 2a_3 & a_5 & 2a_6 \\ a_4 & 3a_7 & a_8 \\ a_5 & 2a_8 & 2a_9 \\ a_6 & a_9 & 3a_{10} \end{vmatrix}.$$

De cet assemblant on obtient les équations:

$$(15) \qquad \begin{cases} p_{4,5,6}xz + p_{3,5,6}y^2 + p_{3,4,6}yz + p_{3,4,5}z^2 = 0, \\ -p_{4,5,6}xy + p_{2,5,6}y^2 + p_{2,4,6}yz + p_{2,4,5}z^2 = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement l'équation:

$$(16) \quad p_{3,5,6}y^3 + (p_{3,4,6} + p_{2,5,6})y^2z + (p_{3,4,5} + p_{2,4,6})yz^2 + p_{2,4,5}z^3 = 0.$$

L'équation (16) et la première équation (15) sont identiques aux équations (13). De là on déduit que les coefficients des équations (13), qui sont tous du septième degré, sont divisibles par des communs facteurs du quatrième degré.

§ 14.

Les déterminants de l'assemblant (14) et ceux de l'assemblant (12) numérotés de la même manière sont proportionels.

Cela se démontre en multipliant les déterminants de l'assemblant (14) par le déterminant:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} a_4 & & 3a_7 & \\ a_5 & a_4 & 2a_8 & 3a_7 \\ a_6 & a_5 & a_9 & 2a_8 \\ & a_6 & & a_9 \end{vmatrix},$$

d'où l'on obtient précisément les déterminants de l'assemblant (12) portant les mêmes numéros.

En partant de ce fait il n'est pas difficile de démontrer que les coefficients des équations (8) [qui doivent s'annuler, si la forme ternaire proposée est décompossable en trois facteurs linéaires] sont divisibles par un commun facteur du quatrième degré.

§ 15.

Pour faciliter cette démonstration, on remplace les équations (8) par les suivantes:

$$(18) \qquad \begin{cases} p_{5,6}y^2 + p_{4,6}yz + p_{4,5}z^2 = 0, \\ -p_{5,6}x + p_{3,6}y + p_{3,5}z = 0, \end{cases}$$

et l'assemblant (12) par

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} 3a_1 & & & a_2 & & & \\ 2a_2 & 3a_1 & & 2a_4 & a_2 & & a_3 \\ 2a_3 & & 3a_1 & a_5 & & a_2 & \\ a_4 & 2a_2 & & 3a_7 & 2a_4 & & a_5 \\ a_5 & 2a_3 & 2a_2 & 2a_8 & a_5 & 2a_4 & 2a_6 \\ a_6 & & 2a_3 & a_9 & & a_5 & \\ & a_4 & & & 3a_7 & & a_8 \\ & a_5 & a_4 & & 2a_8 & 3a_7 & 2a_9 \\ & a_6 & a_5 & & a_9 & 2a_8 & 3a_{10} \\ & & a_6 & & & a_9 & \end{vmatrix},$$

supposant que les coefficients s_7 et s_9 ne s'annulent pas en même temps dans les deux relations (11).

La propriété de la divisibilité des déterminants de cet assemblant par ceux de l'assemblant (14) portant les mêmes numéros, existe toujours. Cependant leur quotient n'est pas précisément égal au déterminant (17), mais à une autre forme du quatrième degré. Cela se démontre facilement en formant au moyen de ces deux assemblants les équations résultantes entre les mêmes arguments de la forme ternaire (1).

On obtient ensuite en développant les déterminants de l'assemblant (9) d'après les éléments de la septième colonne, les équations:

$$(20)\qquad \begin{cases} p_{5,6} = a_3 p_{1,5,6} - a_5 p_{2,5,6} + 2a_6 p_{3,5,6} - a_8 p_{4,5,6}, \\ p_{4,6} = a_3 p_{1,4,6} - a_5 p_{2,4,6} + 2a_6 p_{3,4,6} - 2a_9 p_{4,5,6}, \\ p_{4,5} = a_3 p_{1,4,5} - a_5 p_{2,4,5} + 2a_6 p_{3,4,5} - 3a_{10} p_{4,5,6}, \\ p_{3,6} = a_3 p_{1,3,6} - a_5 p_{2,3,6} + a_8 p_{3,4,6} - 2a_9 p_{3,5,6}, \\ p_{3,5} = a_3 p_{1,3,5} - a_5 p_{2,3,5} + a_8 p_{3,4,5} - 3a_{10} p_{3,5,6}. \end{cases}$$

Comme tous les termes des deuxièmes membres des équations (20) sont divisibles par un commun facteur du quatrième degré, ce doit être aussi le cas avec leurs premiers membres. C. Q. F. D.

Tilbourg, le 17 mai 1904.

Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie.

Von

M. Dehn in Münster i. W.

In einer früheren Arbeit*) habe ich nachgewiesen, daß die Bestimmungsstücke zweier endlich gleicher Polyeder — d. i. solcher inhaltsgleicher Polyeder, die nach Hinzufügen resp. kongruenter Polyeder in kongruente Polyeder zerlegt werden können — gewisse Bedingungen befriedigen müssen. Ich habe gezeigt, daß diese im Euklidischen Raume in gewissen speziellen Fällen — z. Beispiel: reguläres Tetraeder und Würfel — nicht erfüllt werden können, daß es also inhaltsgleiche, nicht endlichgleiche Polyeder gibt. Im folgenden soll nun mit Hilfe sehr viel allgemeinerer, mengentheoretischer Betrachtungen nachgewiesen werden, daß es eine nichtabzählbar unendliche Anzahl von Paaren inhaltsgleicher Polyeder *sowohl in dem Euklidischen wie in dem Nichteuklidischen Raume* gibt, die diese Bedingungen nicht befriedigen.

1) *Euklidischer Raum.*

Wir gebrauchen die erwähnten Bedingungen nur in folgender spezieller Form:

Wenn ein Tetraeder mit den Flächenwinkeln τ_1, $\tau_2 \cdots \tau_6$ einem Würfel endlichgleich sein soll, so muß eine Gleichung von folgender Form bestehen:

$$\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \cdots \nu_6\tau_6 = \nu R,$$

wo R den vierten Teil des Vollwinkels bedeutet und $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_6$ rationale von Null verschiedene Zahlen sind. — Daraus folgt unmittelbar: kein Tetraeder, bei dem $\tau_6 = \tau_5 = \tau_4 = R$, $\tau_3 = \nu' R$ ist (ν' eine rationale Zahl < 1) und bei dem keine Beziehung von der Form $\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 = \nu R$ besteht, kann einem Würfel endlichgleich sein. Es wird sich im folgenden darum handeln, die Existenz solcher Tetraeder nachzuweisen. Wir schicken folgenden *Hilfssatz* über Punktmengen des Linearkontinuums voraus:

*) Math. Ann. 55.

Eine abzählbare Menge nirgends überall dichter Mengen von Punkten kann keine Strecke des Kontinuums vollständig erfüllen.

Unter einer nirgends überall dichten Menge verstehen wir eine Menge von der Eigenschaft, daß sich keine Strecke des Kontinuums finden läßt derart, daß in jedem Teilintervall dieser Strecke ein Punkt der gegebenen Menge liegt.

Wir wählen zwei beliebige Punkte, a und b, der Zahlengeraden aus und wollen zeigen, daß es zwischen a und b einen Punkt gibt, der keiner der gegebenen Mengen angehört. Diese Mengen seien, irgendwie einfach angeordnet, M_1, $M_2 \cdots$. Dann liegt zwischen a und b nach Voraussetzung ein Intervall ξ_1, ξ_1' $(\xi_1 < \xi_1')$ von der Eigenschaft, daß weder ξ_1 noch ξ_1' noch irgend ein innerer Punkt dieses Intervalles ein Punkt der Menge M_1 ist. Innerhalb des Intervalles $\xi_1 \xi_1'$ gibt es ein zweites Endpunktpaar $\xi_2 \xi_2'$ $(\xi_2 < \xi_2')$ von derselben Eigenschaft für die Menge M_2 usw.: Die Zahlen ξ_i und die Zahlen ξ_i' konvergieren als stets wachsende Größen, die unter einer Grenze bleiben, resp. als stets abnehmende, die über einer Grenze bleiben, gegen 2 Grenzwerte X und X', die auch zusammenfallen können. X und X' sind keinenfalls Punkte irgend einer der Mengen M_i gemäß der Konstruktion und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Machen wir in einem Tetraeder 3 Flächenwinkel τ_6, τ_5, τ_4, gleich einem Rechten, so besteht zwischen den 3 übrigen Winkeln die Gleichung:

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 + \cos^2 \tau_3 = 1.$$

Machen wir τ_3 gleich νR, wo $\nu < 1$ ist, so erhalten wir

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = \varepsilon. \qquad (\varepsilon < 1)$$

Angenommen nun, für jeden Wert von τ_1 erhielte ich durch diese Gleichung ein τ_2 so, daß eine Gleichung von der Form

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu R$$

bestände, wo ν_1 und ν_2 rationale nicht verschwindende Zahlen sind, so ist jedem Werte, den τ_2 zwischen 0 und $2R$ annehmen kann, ein bestimmtes Wertetripel ν_1, ν_2, ν zugeordnet. Die Menge aller möglichen solchen Wertetripel ist abzählbar. Wäre nun jedem Wertetripel eine in keinem Intervalle überall dichte Menge zugeordnet, so würde im Widerspruch zu dem bewiesenen Hilfssatz eine abzählbare Menge von nirgends überall dichten Mengen die Strecke des Kontinuums zwischen 0 und π vollständig erfüllen. So müssen also in einem Intervall $\xi < \tau_1 < \xi'$ in überall dicht liegenden Punkten gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\cos^2 \tau_1 + \cos^2 \tau_2 = \varepsilon$$

und

$$\nu_1 \tau_1 + \nu_2 \tau_2 = \nu \pi,$$

wo ν_1, ν_2, ν jetzt bestimmte rationale Zahlen sind, bestehen. Daher muß,

da τ_2 nach der zweiten Gleichung eine überall eindeutige analytische, und monogene Funktion von τ_1, die erste Beziehung aber analytisch ist, jedes Wertepaar τ_1, τ_2, das die zweite Gleichung befriedigt, auch die erste befriedigen.

Es muß also die durch die erste Gleichung definierte Kurvenmannigfaltigkeit eine Gerade

$$\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 = \nu\pi$$

in sich enthalten, wo ν_1 und ν_2 reelle rationale nichtverschwindende Zahlen sind. Das ist aber nicht der Fall, weil es auf jener Mannigfaltigkeit keinen reellen Punkt gibt, für den $\tau_1 = 0$ wäre, während doch nach der zweiten Gleichung zu diesem Werte von τ_1 der Wert

$$\tau_2 = \frac{\nu\pi}{\nu_2}$$

gehört. Es gibt also (und zwar nichtabzählbar) unendlich viele Werte von τ_1, für die zusammen mit den zugehörigen τ_2 keine Beziehung von der Form

$$\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 = \nu R$$

besteht, womit wir unser Ziel erreicht haben.

2) *Nichteuklidischer Raum.*

Hier brauchen wir von mengentheoretischer Seite nur den einfachsten Fall des vorhin bewiesenen Hilfssatzes, nämlich die Tatsache, daß eine abzählbare Menge von Punkten eine Strecke des Linearkontinuums nicht vollständig erfüllen kann — die Nichtabzählbarkeit der Punkte eines Stückes des Kontinuums.

Dagegen brauchen wir jetzt die a. a. O. abgeleiteten Bedingungen für endlichgleiche Polyeder vollständig. Wir wollen sie in folgender Form aussprechen:

Seien zwei Polyeder Π und Π' mit den Kanten p_1, $p_2 \cdots$ resp. p_1', $p_2' \cdots$ und den an diesen Kanten liegenden Flächenwinkeln π_1, $\pi_2 \cdots$ resp. π_1', $\pi_2' \cdots$ endlichgleich; es bedeute ferner R den vierten Teil des Vollwinkels. Dann gibt es eine positive, negative oder auch verschwindende Strecke H von folgender Beschaffenheit: Seien

$$S_p \begin{cases} l_1(p_1, p_2 \cdots p_1', p_2' \cdots H) = 0 \\ l_2(p_1, p_2 \cdots p_1', p_2' \cdots H) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad S_\pi \begin{cases} \lambda_1(\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_1', \pi_2' \cdots R) = 0 \\ \lambda_2(\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_1', \pi_2' \cdots R) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

die beiden Systeme aller linearen, homogenen, ganzzahligen Beziehungen zwischen p_1, $p_2 \cdots p_1'$, $p_2' \cdots H$ und zwischen π_1, $\pi_2 \cdots \pi_1'$, $\pi_2' \cdots R$. Dann befriedigen alle Systeme von Werten, die, für p_1, $p_2 \cdots p_1'$, $p_2' \cdots H$; π_1, $\pi_2 \cdots \pi_1'$, $\pi_2' \cdots R$ eingesetzt, S_p und S_π befriedigen, auch die Gleichung:

$$p_1\pi_1 + p_2\pi_2 + \cdots = p_1'\pi_1' + p_2'\pi_2' + \cdots + RH. \quad \cdots\cdots \text{ I}$$

Wir betrachten nun 3 reguläre Tetraeder mit den Kanten a, b, c und den Flächenwinkeln α, β, γ und wollen mit Hilfe dieses Satzes nachweisen, daß das erste Tetraeder dem Komplex der beiden andern nicht endlichgleich sein kann, wenn zwischen a, b und c sowie zwischen α, β, γ und R je nur *eine* lineare, homogene, ganzzahlige Gleichung besteht.

Sei $\lambda(\alpha, \beta, \gamma, R) = 0$ die einzige Beziehung zwischen α, β, γ und R und sei etwa α durch die übrigen Winkel ausdrückbar:

$$\alpha = \nu_1\beta + \nu_2\gamma + \nu R,$$

wo ν_1, ν_2 und ν rationale Zahlen sind; setzen wir diesen Wert von α in die Gleichung I, die jetzt:

$$\alpha a = \beta b + \gamma c + RH$$

lautet, ein, so erhalten wir:

$$0 = \beta(b - \nu_1 a) + \gamma(c - \nu_2 a) + R(H - \nu a).$$

Da diese Gleichung nach Voraussetzung für jeden Wert von β, γ und R befriedigt wird, so folgt:

$$b = \nu_1 a, \quad c = \nu_2 a.$$

Gibt es also nur eine lineare Beziehung zwischen α, β, γ und R, so gibt es sicher zwei Beziehungen zwischen a, b und c.

Wir wollen nun nachweisen, daß es drei Tetraeder gibt, die diese Bedingung nicht erfüllen, und von denen gleichzeitig zwei zusammen denselben Inhalt haben wie das dritte, woraus denn folgt, daß es inhaltsgleiche, nicht endlichgleiche Polyeder gibt.

Wir gebrauchen zu diesem Nachweise folgende sehr einfach zu erkennenden Eigenschaften regulärer Nichteuklidischer Tetraeder:

a) Die Kante und der Flächenwinkel können je eine nicht abzählbar unendliche Anzahl von Werten annehmen. (Z. B. im hyperbolischen Raume die Kante jeden positiven Wert, der Flächenwinkel jeden Wert zwischen $\arccos\frac{1}{3}$ und $\frac{R}{3}$).

b) Zu jedem Werte der Kante gehört ein bestimmter Wert des Flächenwinkels (und umgekehrt).

c) Zu jedem regulären Tetraeder gibt es ein reguläres Tetraeder mit beliebig vorgegebenem kleinerem Inhalt: Zu je zwei regulären Tetraedern gibt es ein reguläres Tetraeder, das der Differenz der beiden inhaltsgleich ist.

Nun bestimmen wir zunächst das Tetraeder mit der Kante a und dem Flächenwinkel α so, daß α kein rationaler Teil des Vollwinkels ist. Dann bestimmen wir das Tetraeder mit der Kante b und dem Winkel β so, daß keine Beziehung von der Form:

$$\nu_1 a + \nu_2 b = 0 \quad \cdots 1)$$
$$\varrho_1 \alpha + \varrho_2 \beta + \varrho R = 0 \quad \cdots 2)$$

(ν_1, ν_2, ϱ_1, ϱ_2, ϱ rationale Zahlen) besteht. Für ein gegebenes a gibt es stets nur eine abzählbare Menge von Werten b, die eine Beziehung von der Form 1) befriedigen, folglich gibt es (nach a) und b)) eine nicht abzählbare Menge von Werten b (mit der dazugehörigen ebenfalls nicht abzählbaren Menge von Werten β), die eine solche Beziehung nicht befriedigen. Aus diesen Werten von β wird bei gegebenem α durch 2) eine abzählbare Menge herausgehoben. Es bleibt eine nicht abzählbare Menge von Werten β und den zugehörigen Werten b, die keine der Beziehungen 1) und 2) befriedigen.

Die Differenz des Tetraeders (a, α) und eines solchen Tetraeders (b, β) kann keinem regulären Tetraeder (c, γ) endlichgleich sein. Denn es dürfte, damit keine Beziehung von der Form 1) oder 2) besteht, nur *eine* lineare Beziehung zwischen α, β, γ, R und nur *eine* zwischen a, b und c bestehen, was aber wie wir vorher bewiesen haben unmöglich ist. Da es aber nach c) ein reguläres Tetraeder gibt, das der Differenz der beiden ersten *inhalts*gleich ist, so haben wir wiederum die Existenz nicht abzählbar unendlich vieler Paare von inhaltsgleichen, nicht endlichgleichen Polyedern bewiesen.

Münster i. W., Februar 1904.

Sur une intégrale définie.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

§ 1.

Formules générales.

Dans mon *Traité des fonctions cylindriques**) la théorie de ces fonctions m'a permis d'étudier d'une méthode uniforme une classe de fonctions transcendantes très analogues, savoir le logarithme-intégral, le cosinus-intégral, le sinus-intégral et les intégrales de Kramp et de Fresnel. Or, il est très remarquable, ce me semble, qu'une généralisation de l'intégrale d'Hankel**) étudiée récemment***) nous conduira plus facilement à la plupart des propriétés fondamentales des fonctions susdites.

A cet égard nous prendrons comme point de départ cette intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-tx}(t+y)^\sigma t^{\omega-\sigma-1}\,dt \tag{1}$$

qui est la plus simple de celles que j'ai étudiées d'un point de vue général dans le quatorzième chapitre de mon Traité susdit.

Dans notre intégrale (1) le chemin d'intégration est l'axe des nombres positifs, de sorte que l'intégrale susdite a un sens dans ces cinq cas différents:

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(\omega-\sigma) > 0, \tag{2}$$

$$\Re(x) = 0, \quad \Re(\omega-\sigma) > 0, \quad \Re(\omega) < 1, \tag{3}$$

$$x = 0, \quad \Re(\omega-\sigma) > 0, \quad \Re(\omega) < 0. \tag{4}$$

On voit que ces conditions sont nécessaires et suffisantes, pourvu que y soit ni zéro ni réel et négatif; car dans ces cas particuliers il faut ajouter aux conditions précédentes ces deux conditions particulières

*) Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen; Leipzig, B. G. Teubner, 1904.

**) Mathematische Annalen, Bd. I, p. 491; 1869.

***) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger 1902.

$$y = 0, \quad \Re(\sigma) > -1, \tag{5}$$

$$y = 0, \quad \Re(\omega) > 0; \tag{6}$$

c'est-à-dire que l'hypothèse $x = y = 0$ n'est pas admissible.

Supposons maintenant pour l'instant x positif, puis mettons dans (1) tx au lieu de t, nous aurons une identité de cette forme

$$\int_0^\infty e^{-tx}(t+y)^\sigma (tx)^\omega t^{-\sigma-1} dt = \mathfrak{B}(xy), \tag{7}$$

où $\mathfrak{B}(xy)$ désigne une fonction du produit (xy). Cela posé, un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques montre que l'identité (7) a lieu dans tous les cas où notre intégrale à un sens.

Remarquons ensuite que la condition (2) nous permet de différentier ou par rapport à x ou par rapport à y notre intégrale susdite en effectuant la différentiation sous le signe d'intégration, nous trouverons pour la la fonction $\mathfrak{B}(x)$ cette équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$\mathfrak{B}^{(2)}(x) + \left(\frac{1-\omega}{x} - 1\right)\mathfrak{B}^{(1)}(x) + \frac{\sigma}{x}\mathfrak{B}(x) = 0, \tag{8}$$

équation différentielle pour laquelle ces deux fonctions

$$f_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(s-\sigma)}{s!\,\Gamma(s-\omega+1)} x^s, \quad f_2(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma(s+\omega-\sigma)}{s!\,\Gamma(s+\omega+1)} x^{s+\omega} \tag{9}$$

constituent généralement un système d'intégrales indépendantes comme le montre aussi notamment la méthode de M. Frobenius*).

Cela posè, nous aurons pour notre intégrale définie en question une expression de cette forme

$$\int_0^\infty e^{-tx}(t+y)^\sigma t^{\omega-\sigma-1} dt = x^{-\omega}(c_1 f_1(xy) + c_2 f_2(xy)),$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont indépendants et de x et de y, de sorte que le théorème fondamental susdit montrera que cette formule, démontrée certainement sous la condition (2) est vraie dans tous les cas, où l'intégrale susdite a un sens et que c_1 et c_2 possèdent toujours la même valeur.

Pour déterminer maintenant les deux coefficients c_1 et c_2 appliquons en premier lieu les conditions (6), une formule intégrale très connue donnera immédiatement

$$c_1 = \frac{\pi}{\Gamma(-\sigma)\sin\pi\omega},$$

*) Journal de Crelle, t. LXXVI ou l'édition danoise de M. C. R. Ette: Om Integration af lineäre Differentialligninger ved Räkkeudviklinger. Kopenhagen 1903.

expression qui est toujours valable pourvu que l'intégrale (1) ait un sens. En second lieu prenons comme point de départ les conditions (4), nous aurons de même

$$c_2 = -c_1,$$

de sorte que nous obtenons finalement cette formule générale

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-tx}(t+y)^\sigma t^{\omega-\sigma-1}dt = \frac{\pi x^{-\omega}}{\Gamma(-\sigma)\sin\pi\omega}(f_1(xy)-f_2(xy)).$$

Dans les cas, où ω est entier et où σ est entier mais non négatif, le second membre de (10) se présente sous forme indéterminée. Or, la vraie valeur de cette expression peut être déterminée sans peine à l'aide de la méthode ordinaire.

§ 2.

Série asymptotique.

Avant de discuter des cas particuliers très intéressants de notre formule générale (10) il nous semble utile de déduire la série asymptotique de l'intégrale définie générale qui figure au premier membre de la formule susdite.

A cet égard mettons

$$\xi = \varrho e^{i\theta}, \quad x = \varrho e^{i\psi}, \quad y = e^{i(\theta-\psi)},$$

où nous supposons

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi, \qquad -\frac{\pi}{2} < \psi < +\frac{\pi}{2},$$

ce qui donnera toujours

$$\xi = xy.$$

Cela posé, divisons par y^σ les deux membres de (10), nous aurons

$$(\alpha) \qquad J = \int_0^\infty e^{-tx}\left(1+\frac{t}{y}\right)^\sigma t^{\omega-\sigma-1}dt = \frac{\pi x^{-\omega}y^{-\sigma}}{\Gamma(-\sigma)\sin\pi\omega}(f_1(\xi)-f_2(\xi));$$

mettons ensuite

$$\left(1+\frac{t}{y}\right)^\sigma = A(t) + iB(t),$$

où $A(t)$ et $B(t)$ désignent des fonctions réelles de la variable réelle t, nous aurons ce développement en série de Taylor:

$$(\beta) \qquad \left(1+\frac{t}{y}\right)^\sigma = \sum_{s=0}^{s=n}\binom{\sigma}{s}\cdot\left(\frac{t}{y}\right)^s + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(A^{(n+1)}(\varepsilon t) + iB^{(n+1)}(\varepsilon' t)),$$

où ε et ε' désignent deux quantités situées entre 0 et 1.

Introduisons maintenant dans (α) la série (β), puis intégrons terme à terme, une formule intégrale bien connue donnera pour l'intégrale J cette expression

$$J = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\sigma}{s} \cdot \frac{\Gamma(\omega-\sigma+s)}{x^{\omega-\sigma} \cdot \xi^s} + R_n,$$

où nous avons posé pour abrèger

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \int_0^\infty e^{-tx} (A^{(n+1)}(\varepsilon t) + iB^{(n+1)}(\varepsilon' t)) t^{\omega-\sigma+n} dt,$$

ou bien, en posant $\frac{t}{\varrho}$ au lieu de t

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!\, \varrho^{\omega-\sigma+n+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{tx}{\varrho}} \left(A^{(n+1)}\left(\frac{\varepsilon t}{\varrho}\right) + iB^{(n+1)}\left(\frac{\varepsilon' t}{\varrho}\right)\right) t^{\omega-\sigma+n} dt.$$

Remarquons maintenant que nous avons toujours $\Re(\omega-\sigma) > 0$, puis choisissons l'angle ψ tel que y n'est pas réel et négatif, nous aurons évidemment cette valeur limite

$$\lim_{|\xi|=\infty} (\xi^n R_n) = 0. \tag{11}$$

On voit que l'on peut admettre généralement $\psi = 0$; c'est seulement dans les cas particuliers, où $\theta = \pm\pi$, qu'il faut donner à ψ une valeur différente de zéro, mais située entre les limites $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Cela posé, appliquons la définition de M. Poincaré*) et désignons par le signe $\sim$ une égalité asymptotique avec la condition (11), nous avons démontré ce théorème général:

Supposons $\Re(\omega-\sigma) > 0$, *nous avons ce développement en série asymtotique*

$$\frac{\pi}{\Gamma(-\sigma)\sin\pi\omega} (f_1(\xi) - f_2(\xi)) \sim \sum_{s=0}^{s=n} \binom{\sigma}{s} \cdot \frac{\Gamma(\omega-\sigma+s)}{\xi^{s-\sigma}}, \tag{12}$$

développement qui est valable dans tous les points très éloignés du plan des ξ.

Ce résultat remarquable obtenu, la forme assez compliquée de notre intégrale définie est superflue; c'est pourquoi nous supposons toujours $y = 1$ dans notre étude des cas particuliers de notre intégrale définie.

---

*) Acta Mathematica, t. VIII, p. 297; 1886.

§ 3.

Premier cas particulier: Fonctions cylindriques.

Posons en premieur lieu $\sigma = \nu - \frac{1}{2}$, $\omega = 2\nu$, nous trouverons cette formule due à Hankel*)

$$(13)\qquad \int_0^\infty e^{-tz}(1+t)^{\nu-\frac{1}{2}}\, t^{\nu-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2x^\nu}\cdot H_1^\nu\left(\frac{xi}{2}\right)\cdot e^{\frac{\nu}{2}+\frac{\nu+1}{2}\pi i},$$

où $H_1^\nu(x)$ désigne la première fonction cylindrique *hankélienne*, savoir

$$(13^{bis})\qquad H_1^\nu(x) = J^\nu(x) + iY^\nu(x) = \frac{i}{\sin\nu\pi}\left(e^{-\nu\pi i}J^\nu(x) - J^{-\nu}(x)\right).$$

Cela posé, mettons dans (12) $\xi = -2xi$, nous obtenons cette série asymptotique plus particulière

$$(14)\qquad e^{-i\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\cdot H_1^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left(P_n(x) + iQ_n(x)\right),$$

où nous avons posé pour abréger

$$P_n(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!}\cdot\frac{\left(\nu^2-\frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2-\frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2-\frac{(4s-1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s}},$$

$$Q_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!}\cdot\frac{\left(\nu^2-\frac{1^2}{4}\right)\left(\nu^2-\frac{3^2}{4}\right)\cdots\left(\nu^2-\frac{(4s+1)^2}{4}\right)}{(2x)^{2s+1}}.$$

La formule (14) est valable pour tous les points très éloignés du plan des x, cependant mettons dans cette formule $-x = e^{\pi i}x$ au lieu de x, nous aurons

$$(14^{bis})\qquad e^{i\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)}\cdot H_2^\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\left(P_n(x) - iQ_n(x)\right),$$

où $H_2^\nu(x)$ désigne la seconde fonction cylindrique *hankélienne*, savoir

$$(15)\qquad H_2^\nu(x) = J^\nu(x) - iY^\nu(x) = \frac{-i}{\sin\nu\pi}\cdot\left(e^{\nu\pi i}J^\nu(x) - J^{-\nu}(x)\right),$$

car nous avons toujours

$$H_1^\nu(e^{\pi i}x) = e^{-(\nu+1)\pi i}\cdot H_2^\nu(x).$$

Cela posé, il est évident que les deux formules (14) et (14^{bis}) sont valables toutes les deux dans un demi-plan quelconque. Multiplions

*) Mathematische Annalen, t. I, p. 491; 1869.

maintenant dans (14), (14^{bis}) par les fonctions exponentielles qui y figurent, nous aurons, en vertu de (13^{bis}) et (15), ces deux autres séries asymptotiques

$$(16) \qquad J^{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n(x)\cos\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)-Q_n(x)\sin\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right],$$

$$(16^{bis}) \qquad Y^{\nu}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n(x)\sin\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+Q_n(x)\cos\left(x-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)\right]$$

qui ne sont valables que pour des valeurs positives de x.

Dans le mémoire susdit Hankel a développé les quatre séries asymptotiques que nous avons déduites dans ce paragraphe, cependant son jugement relatif à la portée des formules susdites est inexact.

§ 4.

Deuxième cas particulier: Fonctions de M. Prym.

Posons maintenant dans la formule générale (12) $\sigma = -n$, n désignant un positif entier, il est évident que la formule ainsi obtenue peut être déduite de celle que nous obtenons en posant $n=1$ si nous différentions $(n-1)$ fois par rapport à y. De plus, nous verrons bientôt que cette différentiation ne peut introduire aucune fonction nouvelle. Posons pour abréger

$$(17) \qquad \varepsilon^{\omega}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{\omega+s}}{\Gamma(\omega+s+1)},$$

nous aurons ici cette formule particulière

$$(18) \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx}t^{-\omega}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\omega}\,(e^x-\varepsilon^{\omega}(x)).$$

L'hypothèse $\sigma = \omega - n$, n étant un positif entier, nous conduira à la même fonction $\varepsilon^{\omega}(x)$. Nous verrons du reste qu'il suffit de considérer ici le cas particulier $n=1$, parce que les autres fonctions se déduisent de celle-ci en différentiant $(n-1)$ fois par rapport à x. Nous aurons ici cette formule analogue à (18)

$$(19) \qquad \int_0^{\infty} e^{-tx}(1+t)^{\omega-1}dt = x^{-\omega}\Gamma(\omega)(e^x-\varepsilon^{\omega}(x)).$$

Dans le cas particulier $\omega \doteq 0$, les deux formules (18), (19) deviendront identiques; cependant il faut déterminer la vraie valeur du second membre qui se prèsentent sous forme indéterminée. Pour appliquer la méthode ordinaire il faut introduire la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, savoir

$$\Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s}\right),$$

où C désigne la constante d'Euler; posons encore pour abréger

$$\lambda(s) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s},$$

nous aurons évidemment

$$\Psi(s+1) = -C + \lambda(s),$$

ce qui donnera finalement la formule cherchée

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+t}\, dt = -e^x \cdot (C + \log x) + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\lambda(s)}{s!} \cdot x^s. \tag{20}$$

Introduisons maintenant avec Legendre*), Gasparis**) et M. Prym***) ces deux fonctions transcendantes

$$P_x(\omega) = \int_0^x e^{-t} \cdot t^{\omega-1} dt, \tag{21}$$

$$Q_x(\omega) = \int_x^\infty e^{-t} \cdot t^{\omega-1} dt, \tag{12bis}$$

où x désigne une quantité finie quelconque, nous aurons évidemment

$$P_x(\omega) + Q_x(\omega) = \Gamma(\omega). \tag{22}$$

Or, des intégrations par parties donnera sans peine pour $P_x(\omega)$ cette autre expression

$$P_x(\omega) = e^{-x} \cdot \Gamma(\omega) \cdot \varepsilon^\omega(x), \tag{23}$$

de sorte que $P_x(\omega)$ s'exprime très simplement à l'aide de la fonction de Lommel†), savoir la fonction

$$\Pi^{\nu,\varrho}(x) = \cos\frac{\pi}{2}(\nu-\varrho) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{\varrho+2s}}{\Gamma\left(\frac{\varrho+\nu}{2}+s+1\right)\Gamma\left(\frac{\varrho-\nu}{2}+s+1\right)};$$

nous aurons en effet, après un simple calcul

$$P_x(\omega) = \frac{\Gamma(\omega) e^{-x-\frac{\pi\omega i}{2}}}{\cos\frac{\pi\omega}{2}} \left(\Pi^{-\frac{1}{2},\omega-\frac{1}{2}}(xi) - i\Pi^{\frac{1}{2},\omega+\frac{1}{2}}(xi)\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi x i}{2}}. \tag{23bis}$$

---

*) Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes t. II, chap. 17.

**) Giornale di Mathematiche, t. VI, p. 16—29; 1867.

***) Journal de Crelle, t. LXXXII, p. 165—172.

†) Mathematische Annalen t. IX, p. 435; 1876. — Voir aussi le chap. VI de mon Traité susdit.

Cela posé, éliminons, à l'aide de (22) et (23), la fonction $\varepsilon^{\omega}(x)$, nous aurons, en vertu de (18) et (19), ces deux autres formules

$$(24) \qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} \cdot t^{\omega-1}}{1+t}\, dt = e^x \cdot \Gamma(\omega) \cdot Q_x(1-\omega), \quad \Re(\omega) > 0,$$

$$(24^{bis}) \qquad \int_0^{\infty} e^{-tx}(1+t)^{\omega-1} dt = e^x \cdot x^{-\omega} \cdot Q_x(\omega),$$

où nous avons posé dans (24) $1-\omega$ au lieu de ω; cette formule semble être nouvelle, tandis que (24^{bis}) n'est au fond autre chose que la définition (21^{bis}) elle-même. Posons en effet dans (24^{bis}) $tx = z - x$, nous retrouverons précisément la formule (21^{bis}).

On voit que l'intégrale figurant au premier membre de (24^{bis}) est précisément celle que Schlömilch a étudiée dans son premier mémoire sur les séries de factorielles*). Appliquons la méthode générale**), nous trouverons cette formule

$$(25) \qquad e^x \cdot x^{-\omega} \cdot Q_x(\omega) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n(\omega)}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \qquad \Re(x) > 0,$$

résultat qui appartient à Schlömilch; nous avons posé pour abréger

$$(25^{bis}) \qquad A_n(\omega) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot (\omega-1)(\omega-2)\cdots(\omega-n+s),$$

où les nombres C_n^s sont les nombres de Stirling, savoir les nombres positifs entiers définis par cette identité

$$\omega(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+n-1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot \omega^{n-s}.$$

La fonction $Q_x(\omega)$ est une fonction transcendante entière de ω, cependant elle semble être très inaccessible. En effet, on ne connait aujourd'hui aucune représentation nette de notre fonction difficile considérée comme fonction de ω.***). Remarquons ici qu'il est impossible d'ordonner le second membre de (25) selon les factorielles

$$(\omega-1)(\omega-2)\cdots(\omega-n);$$

on retombe en effet dans la serie asymptotique obtenue de (12), savoir

$$(26) \qquad e^x \cdot x^{-\omega} \cdot Q_x(\omega) \sim \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \frac{(\omega-1)(\omega-2)\cdots(\omega-s)}{x^{s+1}},$$

*) Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. II, p. 396; 1859.

**) Voir mon Mémoire dans les *Annales de l'Écol. Normale*, (3) t. XIX, 1902.

***) Voir par exemple une Note de M. Mellin dans les *Acta Mathematica*, t. II.

et voilà un cas particulier d'un théorème général concernant la représentation asymptotique d'une série factorielles, théorème que j'espère de publier prochaînement dans une autre occasion.

Quant à la série de puissances obtenue pour $Q_x(\omega)$, elle peut être obtenue en ordonnant le second membre de (25) selon des puissances ascendantes de ω, cependant les coefficients de cette série se présentent sous forme impossible parce que l'on ne connaît pas la forme générale des nombres de Stirling.

§ 5.

Troisième cas particulier: Intégrales de Kramp et de Fresnel.

Définissons comme intégrale de Kramp cette fonction transcendante entière:

$$K(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\,(2s+1)}, \tag{27}$$

nous aurons, à l'aide d'une formule intégrale bien connue,

$$K(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

ce qui donnera, en vertu de (21^{bis}),

$$2K(x) = P_x\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} - Q_x\left(\frac{1}{2}\right),$$

formules qui nous conduiront immédiatement, en vertu de (23) et (26), à ces deux développements nouveaux pour $K(x)$

$$K(x) = e^{-x^2} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2^s \cdot x^{2s+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s+1)}, \tag{28}$$

$$e^{x^2}\left(\sqrt{\pi} - 2K(x)\right) \sim \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=n-1} (-1)^s \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2s-1)}{2^s \cdot x^{2s+1}}. \tag{29}$$

La série qui figure au second membre de (28) semble être inconnue; la série asymptotique (29) est valable dans tous les points très éloignes du plan des x; elle est due à M. Weber*).

Ces formules trouvées pour l'intégrale de Kramp, il est facile de déduire des expressions analogues pour les deux intégrales de Fresnel, savoir ces deux fonctions transcendantes entières:

*) Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, t. I, p. 60; 1900.

$$(30) \qquad F_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{4s+1}}{(2s)!\,(4s+1)} = \int_0^x \cos(t^2)\,dt,$$

$$(30^{bis}) \qquad F_2(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{4s+3}}{(2s+1)!\,(4s+3)} = \int_0^x \sin(t^2)\,dt.$$

En effet, posons

$$\sqrt{\pm i} = e^{\pm \frac{\pi i}{4}},$$

les séries de puissance que nous venons d'indiquer donnent sans peine

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{i}\,K(x\sqrt{-i}) + \sqrt{-i}\,K(x\sqrt{i})}{2},$$

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{i}\,K(x\sqrt{-i}) - \sqrt{-i}\,K(x\sqrt{i})}{2i}.$$

Cela posé, la formule (2) donnera ces deux autres

$$(31) \qquad \begin{cases} F_1(x) = \cos(x^2)A(x) + \sin(x^2)B(x), \\ F_2(x) = \sin(x^2)B(x) - \cos(x^2)A(x), \end{cases}$$

où nous avons posé pour abréger

$$(31^{bis}) \qquad \begin{cases} A(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \cdot 2^{2s} \cdot x^{4s+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (4s+1)}, \\ B(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-s)^s \cdot 2^{2s+1} \cdot x^{4s+3}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (4s+3)}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous venons de donner une nouvelle démonstration des séries de Knochenhauer*).

Prenons maintenant comme point de départ la formule (29), puis multiplions par la fonction exponentielle les deux membres de cette formule, la série ainsi obtenue n'est asymptotique que pour des *valeurs réelles* de x. De cette manière nous obtenons ces deux séries asymptotiques nouvelles

$$(32) \qquad \begin{cases} F_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \cos(x^2)\,A_n(x) - \sin(x^2)B_n(x), \\ F_2(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \cos(x^2)\,B_n(x) + \sin(x^2)A_n(x), \end{cases}$$

où nous avons posé pour abréger

*) Poggendorff Annalen, t. XLI, p. 104; 1837.

$$(31^{bis}) \qquad \begin{cases} A_n(x) = \dfrac{1}{2x} + \sum_{s=1}^{<\frac{n}{2}} \dfrac{(-1)^s \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s-1)}{2^{2s+1} \cdot x^{4s+1}}, \\ B_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{n-1}{2}} \dfrac{(-1)^s \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (4s+1)}{2^{2s+2} \cdot x^{4s+3}}. \end{cases}$$

Les formules (32) ne sont valables que pour des valeurs réelles de x aussi; elles sont dues à Cauchy*). On voit que les formules susdites donneront ces deux intégrales bien connues

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}},$$

où les chemins d'intégration coïncident avec l'axe des nombres positifs.

§ 6.

Quatrième cas particulier: Les fonctions li e^{-x}, $C_i(x)$ et $S_i(x)$.

Comme dernière application de notre intégrale définie générale nous avons à étudier le logarithme-intégral savoir cette fonction transcendante

$$(33) \qquad \text{li}\, e^{-x} = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^s}{s!\, s},$$

où C désigue la constante d'Euler et où il faut définir d'une manière convenable la valeur de $\log x$.

Or, je dis que nous aurons pour le logarithme-intégral ces autres représentations:

$$(34) \qquad \text{li}\, e^{-x} - C - \log x = \int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt = \lim_{\omega=0}\left(P_x(\omega) - \frac{x^\omega}{\omega}\right),$$

$$(34^{bis}) \qquad \text{li}\, e^{-x} = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\,Q_x(0).$$

En effet, on voit que (34) se demontre aisément en introduisant au lieu de la fonction exponentielle la série de puissances ordinaire et en intégrant puis terme à terme; de plus nous obtenons immédiatement de (21)

$$(35) \qquad P_x(\omega) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \cdot \frac{x^{\omega+s}}{\omega+s}.$$

*) Comptes rendus, t. XV, p. 554—556; 1842.

Quant à la formule (34^{bis}), prenons comme point de départ cette définition de la constante d'Euler

$$C = -\Gamma^{(1)}(1),$$

ce qui donnera

$$-C = (D_\omega P_x(\omega))_{\omega=1} + (D_\omega Q_x(\omega))_{\omega=1}.$$

Or, nous aurons, en vertu de (35),

$$\lim_{\omega=0}\left(P_x(\omega) - \frac{x^\omega}{\omega}\right) = (D_\omega P_x(\omega))_{\omega=1} - (e^{-x}-1)\log x,$$

tandis qu'une intégration par parties donnera, en vertu de (21^{bis}),

$$Q_x(0) = (D_\omega Q_x(\omega))_{\omega=1} - e^{-x}\log x,$$

de façon que nous obtenons finalement cette formule

$$C + \log x = -\int_0^x \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt,$$

et voilà la démonstration rigoureuse de (34^{bis}).

Remarquons en passant que la définition intégrale (34^{bis}) pour li e^{-x} n'est pas guère convenable parce qu'elle présente, comme l'a fait voir récemment M. Gutknecht*) dans sa thèse de doctorat, des difficultés considérables; c'est pourquoi nous préférons la définition (33) purement analytique de notre fonction en question.

Appliquons maintenant la formule (34), nous aurons immédiatement, en vertu de (23), cette autre représentation

$$\text{li}\, e^{-x} = C + \log x - e^{-x}\cdot\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{\lambda(s)}{s!}\cdot x^s, \tag{35}$$

qui semble être nouvelle, tandis que (34^{bis}) donnera, en vertu de (26), cette série asymptotique

$$e^x\cdot\text{li}\, e^{-x} \sim \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s s!}{x^{s+1}}, \tag{36}$$

qui est valable dans tous les points très eloignés du plan des x.

La formule (36) appartient à Mascheroni**), tandis que Stieltjes***) l'a étudiée beaucoup plus profondément.

---

*) Integrallogarithmus, Berne 1903.

**) Cit. de Bretschneider, Journal de Crelle, t. XVII, p. 260; 1837.

***) Voir M. Borel: Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

Cela posé, définissons comme suit le cosinus-intégral et le sinus-intégral

$$(37)\qquad \begin{cases} C_i(x) = C + \log x + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!\,2s}, \\ S_i(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!\,(2s+1)}, \end{cases}$$

puis mettons

$$\log(\pm i) = \pm \frac{\pi i}{2},$$

nous aurons évidemment

$$(38)\qquad \begin{cases} C_i(x) = \frac{\mathrm{li}\, e^{ix} + \mathrm{li}\, e^{-ix}}{2}, \\ S_i(x) = \frac{\mathrm{li}\, e^{ix} - \mathrm{li}\, e^{-ix}}{2i} - \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

ce qui donnera, en vertu de (35), ces deux autres formules

$$(39)\qquad \begin{cases} C_i(x) = C + \log x - B(x)\sin x - A(x)\cos x, \\ S_i(x) = B(x)\cos x - A(x)\sin x, \end{cases}$$

où nous avons posé pour abréger

$$(39^{bis})\qquad \begin{cases} A(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \lambda(2s)}{(2s)!} \cdot x^{2s}, \\ B(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \lambda(2s+1)}{(2s+1)!} \cdot x^{2s+1}; \end{cases}$$

les deux formules (38) appartiennent à Lommel*).

Multiplions encore dans (36) par la fonction exponentielle, la série asymptotique ainsi obtenue n'est valable que pour des valeurs purement imaginaires de x, puis appliquons les formules (38), nous aurons

$$(40)\qquad \begin{cases} C_i(x) \sim A_n(x)\sin x - B_n(x)\cos x, \\ S_i(x) \sim \frac{\pi}{2} - A_n(x)\cos x - B_n(x)\sin x, \end{cases}$$

séries asymptotiques qui ne sont appliquables que pour des *valeurs réelles* de x; elles semblent être nouvelles du reste.

---

*) Mathematische Annalen, t. XVI, p. 204; 1880.

Dans (40) nous avons posé pour abréger

$$(40^{bis}) \qquad \begin{cases} A_n(x) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (2s)!}{x^{2s+1}}, \\ B_n(x) = \sum_{s=0}^{< \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (2s+1)!}{x^{2s+2}}. \end{cases}$$

Remarquons que la dernière formule (40) donnera cette formule intégrale très connue

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

où le chemin d'intégration coincïde avec l'axe des nombres positifs.

Copenhague, le 15 octobre 1903.

Note. Le théorème concernant la représentation asymptotique d'une série de factorielles, mentionné à l'occasion de la formule (26), se trouve dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'Ecole Normale.*

La formule (35) a été connue par M. L. Schendel; dans une Note qui paraîtra dans les *Monatshefte für Mathematik und Physik* j'ai donné une démonstration directe et très simple de la formule en question.

Copenhague, le 5 juin 1904. N.

Note sur les séries de fonctions bernoulliennes.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

§ 1.

Valeur de $\varphi_n(x)$ pour n extrêmement grand.

Supposons que la fonction donnée $G(x)$ soit une transcendante entière, M. Guichard*) a démontré que cette équation aux différences finies

$$F(x+1) - F(x) = G(x) \tag{1}$$

admet toujours comme intégrale particulière une transcendante entière aussi. Plus tard M. A. Hurwitz**) a donné de très belles recherches sur l'équation (1). Cependant la méthode de l'éminent géomètre montre clairement qu'une telle intégration finie de la série entière $G(x)$ ne peut pas être effectuée généralement terme à terme sans ajouter à chacune des intégrales ainsi obtenues une fonction périodique convenable.

Dans la Note qui suit je me suis proposé de démontrer le résultat remarquable, ce me semble, qu'une telle intégration finie n'est appliquable terme à terme, dans le sens ordinaire de ce mot, que dans le cas particulier, où la fonction donnée $G(x)$ est du *genre zéro* ou bien un cas très particulier des fonctions du *genre un*.

Or, définissons par cette équation aux différences finies

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(x-1) = \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

et par ces conditions initiales

$$\varphi_{2n+1}(0) = 0, \quad \varphi_{2n}(0) = \varphi^{(1)}_{2n+1}(0) \tag{3}$$

le polynome du rang $n+1$ de Jacques Bernoulli, il est évident que la démonstration, très élémentaire du reste, du théorème susdit n'est au fond autre chose qu'une théorie des séries de fonctions $\varphi_n(x)$.

On voit que notre définition de $\varphi_n(x)$ diffère un peu de celle pro-

*) Annales de l'École Normale, 3e série, t. IV, p. 361—380; 1887.

**) Acta Mathematica, t. XX, p. 285—312; 1897.

posée par M. M. Hurwitz*) et Mellin**); or, notre définition donnera immédiatement pour $\varphi_n(x)$ cette propriété fondamentale très remarquable

$$\varphi_n^{(1)}(x) = \varphi_{n-1}(x). \tag{4}$$

Formons maintenant, à l'aide de cette formule, la série de Taylor pour $\varphi_{n+1}(x-1)$, puis appliquons (2), nous aurons immédiatement cette identité

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1!}\cdot\varphi_n(x) - \frac{1}{2!}\cdot\varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{3!}\cdot\varphi_{n-2}(x) - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\cdot\varphi_0(x), \tag{5}$$

fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici.

Désignons ensuite par B_{2n-1} le nombre de Bernoulli du rang n, notre définition susdite de $\varphi_n(x)$ nous conduira aisément à ces expressions

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = x + \frac{1}{2} \\ \varphi_n(x) = \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \displaystyle\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s B_{2s-1}}{(2s)!}\cdot\frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!}, \end{cases} \tag{6}$$

dont la première est donnée par une définition particulière pour faire appliquable la formule (4) pour $n = 1$ aussi.

Cela posé, nous avons avant de tout à donner des expressions asymptotiques pour les valeurs des fonctions $\varphi_n(x)$ quand n est supposé très grand. A cet égard prenons comme point de départ cette formule numérique

$$s_{2n} = \frac{2^{2n-1}\cdot\pi^{2n}}{(2n)!}\cdot B_{2n-1},$$

où n désigne un positif entier, et où nous avons posé pour abréger

$$s_{2n} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots,$$

nous aurons évidemment pour B_{2n-1} cette valeur asymptotique

$$\frac{B_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{2}{(2\pi)^{2n}}(1+\delta_n), \quad \delta_n < \frac{1}{2^{2n-2}}. \tag{7}$$

En effet, nous trouvons pour δ_n cette valeur exacte

$$\delta_n = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots,$$

---

*) loc. cit. p. 286.

**) Acta Societatis scientiarum Fennicae, t. XXIV, No. 10, p. 4; 1898. Quant à la définition de $\varphi_n(x)$, voir la Thèse de M. H. Renfer: Die Definitionen der Bernoullischen Funktionen usw. Berne 1900.

ce qui donnera immédiatement

$$\delta_n < \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot \varepsilon_{2n} < \frac{1}{2^{2n-2}}.$$

Introduisons maintenant dans la formule générale (6) l'expression (7), nous trouvons sans peine pour $\varphi_n(x)$ ces valeurs asymptotiques

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi_{2n}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{(2\pi)^{2n}} (\cos 2\pi x + \varepsilon_{2n}) \\ \varphi_{2n+1}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot 2}{(2\pi)^{2n+1}} (\sin 2\pi x + \varepsilon_{2n+1}), \end{cases}$$

où ε_n, pour des valeurs très grandes de l'indice n, satisfait à cette inégalité

$$(9) \quad n^p |\varepsilon_n| < \sigma,$$

où σ désigne une quantité positive donnée auparavant et étant aussi petite qu'on le veut, tandis que p est un positif entier fini, mais d'une grandeur quelconque du reste.

§ 2.

Théorie des séries de fonctions $\varphi_n(x)$.

Les valeurs limites que nous venons de développer nous montrent immédiatement que cette série de fonctions de Bernoulli

$$(10) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cdot \varphi_n(x)$$

est convergente pour une valeur quelconque mais finie de x, pourvu que ces deux séries numériques

$$(11) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a_{s+2s}}{(2\pi)^{s+2s}}$$

le soient; ε est égal à un où à zéro.

Cela posé, demontrons tout d'abord que cette identité

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cdot \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n \cdot \varphi_n(x)$$

entraîne ces autres:

$$(12 \text{ bis}) \quad a_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

nous aurons en effet ces deux identités

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n - b_n) \cdot \varphi_n(x) = 0, \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_n - b_n) \cdot \varphi_n(x-1) = 0,$$

de sorte qu'une soustraction nous conduira, en vertu de (2), immédiatement à (12 bis); c'est-à-dire que nous avons démontré cette proposition:

Si une fonction est développable en série de la forme (10), *ce développement n'est possible que d'une seule façon.*

Introduisons maintenant dans (10), au lieu des fonctions de Bernoulli, les expressions tirées de (6), puis écrivons le résultat ainsi obtenu sous forme d'une série à double entrée, dont les séries horizontales sont formées par les expressions des $\varphi_n(x)$, tandis que les séries verticales contiennent tous le termes contenant la même puissance de x, nous trouvons comme coefficient de x^n cette expression

$$A_n = \frac{1}{n!}\left(a_n + \frac{1}{2}\,a_{n+1} - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s a_{n+2s}}{(2s)!} \cdot B_{2s-1}\right). \tag{13}$$

Or, supposons convergente la série (11), il sera la même chose avec la série infinie figurant au second membre de (13); de plus, remarquons que les séries horizontales de notre série à double entrée sont toutes absolument convergentes, nous aurons évidemment pour $f(x)$ cette série de puissances

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n, \tag{14}$$

où les coefficients A_n se déterminent à l'aide de (13).

Cela posé, remarquons que la série numérique (11) nous conduira à cette valeur majorante

$$|A_n| < \frac{(2\pi)^n}{n!} \cdot K_n, \tag{15}$$

où K_n désigne une quantité positive et finie même pour n infiniment grand, ce qui montrera, en vertu du célèbre théorème de M. Hadamard*) que la fonction entière $f(x)$ doit être du genre zéro ou un.

Considérons maintenant cette fonction entière

$$F(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{c_s}{s!} \cdot x^s, \tag{16}$$

dont les coefficients $\frac{c_n}{n!}$ satisfont à la condition (15), puis développons à l'aide de (5), toutes les puissances, nous aurons de même cette série de fonction $\varphi_n(x)$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \cdot \varphi_n(x), \tag{17}$$

*) Journal de Mathématiques, 4e série, t. IX, p. 209; 1893.

où nous avons posé pour abréger

$$C_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s c_{n+s}}{(s+1)!}. \tag{18}$$

Or, les fractions

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad \frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}, \quad \frac{c_{n+3}}{c_{n+2}}, \quad \ldots$$

étant finies, nous aurons, en vertu de (18),

$$|C_n| = |c_n| \cdot K_n',$$

où K_n' désigne une quantité positive et finie pour toutes les valeurs de n; c'est-à-dire que la série (17) est convergente pour une valeur finie quelconque de x, et *la condition* (15) *est nécessaire et suffisante à la fois.*

Cela posé, considérons encore une fois la série de puissances (16), la série

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n}{n!} \Delta^{-1} x^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cdot \varphi_{n+1}(x-1)$$

est constamment convergente, et c'est la même chose avec cette autre série

$$\Phi(x+1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cdot \varphi_{n+1}(x).$$

Or, soustrayons ces deux formules, nous aurons

$$\Delta\Phi(x) = F(x),$$

ou, ce qui vaut autant

$$\Delta^{-1} F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cdot \varphi_{n+1}(x-1) + J(x), \tag{19}$$

où $J(x)$ désigne une fonction périodique mais arbitraire de x; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème general:

Les seules séries de puissances qui sont développables en série de fonctions $\varphi_n(x)$, ou, ce qui vaut autant, dont l'intégrale finie peut être prise terme à terme dans le sens ordinaire de ce mot, sont les fonctions entières du genre zéro et les fonctions particulières du genre un qui satisfont à la condition (15). *Inversement, toutes ces fonctions possèdent les propriétés susdites.*

Considérons encore une fois la formule (17), nous aurons aussi

$$F(x-1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \cdot \varphi_n(x-1),$$

d'où, en soustrayant

$$\Delta F(x-1) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{C_{n+1}}{n!} \cdot x^n, \tag{20}$$

et voilà un simple principe pour la formation de la différence d'une telle fonction.

§ 3.

Applications aux fonctions cylindriques. Formule de Bessel.

Comme premier exemple de la théorie du paragraphe précédent posons dans (16)

$$F(x) = e^{\alpha x}, \quad |\alpha| \leqq 2\pi,$$

nous aurons, en vertu de (18), ce développement

$$e^{\alpha x} = (1 - e^{-\alpha}) \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha^{n-1} \cdot \varphi_n(x), \tag{21}$$

de sorte que (20) nous conduira à la formule pour l'addition des arguments de la fonction exponentielle.

Considérons comme second exemple cette fonction cylindrique de la première espece

$$(-x)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}(\alpha\sqrt{-x}) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+s+1)} \cdot x^s,$$

elle est du genre zéro, considerée comme fonction de x; c'est-à-dire qu'elle est développable en série de fonctions $\varphi_n(x)$ pour une valeur finie quelconque de α.

La formule (18) donnera ici

$$C_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s}{(s+1)!} \cdot \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2n+s+1}}{\Gamma(\nu+n+s+1)},$$

où, ce qui vaut autant,

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+n-1}}{\Gamma(\nu+n)} - J^{\nu+n-1}(\alpha) \right),$$

de sorte que nous obtenons ce développement en série de polynomes $\varphi_n(x)$:

$$(-x)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}(\alpha\sqrt{-x}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+n-1}}{\Gamma(\nu+n)} - J^{\nu+n-1}(\alpha) \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} \cdot \varphi_n(x). \tag{22}$$

Quant à la formule (20), elle donnera ici

$$\Delta\left[(1-x)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}(\alpha\sqrt{1-x})\right] = (-x)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\alpha\sqrt{-x}) - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^n}{n!} \cdot J^{\nu+n}(\alpha),$$

ou, ce qui vaut autant,

$$(1-x)^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}(\alpha\sqrt{1-x}) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^n}{n!} \cdot J^{\nu+n}(\alpha).$$

Posons maintenant

$$\alpha = y, \quad \alpha^2 - \alpha^2 x = (y+z)^2,$$

nous aurons cette formule pour l'addition des arguments

$$(23) \qquad J^\nu(y+z) = \left(1+\frac{z}{y}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \cdot \left(1+\frac{z}{2y}\right)^n \cdot J^{\nu+n}(y),$$

dont le cas particulier, où ν est un nombre entier, est dû à Bessel*) qui a calculé, à laide de cette formule, sa table numérique des fonctions cylindriques.

Mettons particulièrement dans (23) $\nu = \pm \frac{1}{2}$, puis appliquons ces deux formules bien connues

$$J^{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x, \qquad J^{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x,$$

il est évident que les cas particuliers correspondants de (23) représentent les formules d'addition de sin $(y+z)$ et de cos $(y+z)$, mais sous forme méconnaissable, il est vrai.

Copenhague, le 14. décembre 1903.

---

*) Abhandlungen der Berliner Akademie, 1824, p. 35. Voir aussi mon Traité. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen,* p. 266; Leipsic, Teubner, 1904.

Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie.

Von

H. Liebmann in Leipzig.

Seitdem die hyperbolische (nichteuklidische) Geometrie neben der euklidischen zur Geltung gelangt ist, sind die verschiedensten Methoden zur Grundlegung sowohl wie zum Aufbau dieses Gebiets angewendet worden. Man kann in dieser Beziehung etwa drei Richtungen unterscheiden, die wir als *Aufbau mit Hilfe einer bekannten Geometrie, Einbau* in die euklidische Geometrie und endlich als *freien Aufbau* bezeichnen können.

1. Bolyai*) und Lobatschefskij**) selber zielten in ihren klassischen Arbeiten dahin, ein Gebilde des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes ausfindig zu machen (die Kugel mit unendlich großem Radius), auf dem die euklidische Geometrie gilt, und diesen Umstand dann für die Geometrie der hyperbolischen Ebene auszunützen.

Die Benützung des Raumes haben andere Autoren z. B. Gauß***), Flye St. Marie†), Killing††) und Simon†††) vermieden, indem sie die Forderung an die Spitze stellten: „Alle Figuren der Ebene sollen frei beweglich sein, und im Unendlichkleinen soll die Euklidische Geometrie gelten." Man erhält auf diese Weise einerseits die sphärisch-elliptische, andrerseits die pseudosphärisch-hyperbolische Geometrie.

*) J. Bolyai, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens. Ed. nova. (Budap. 1902.) Vgl. § 11, 17 und namentlich 21 „Superficies F".

**) N. J. Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen. Deutsch mit Anmerkungen von F. Engel (Leipzig 1899). Vgl. S. 12 (Über die Anfangsgründe der Geometrie § 9) „die Gränzkugel".

***) C. F. Gauß, Ges. Werke VIII, (Leipzig 1900) S. 255—257.

†) Flye St. Marie, Etudes analytiques sur la théorie des parallèles. (Paris 1871.) Chap. I.

††) W. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (Leipzig 1885), S. 5 ff.

†††) M. Simon. Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie. Crelles Journal 109 (1892), S. 187—198.

Endlich gelangt man von der sphärischen Trigonometrie zu der hyperbolischen, indem man den Radius der Kugel der imaginären Einheit gleich setzt*). Dieser Übergang erweist sich namentlich auch als ein wichtiges und fruchtbares Hilfsmittel für die nichteuklidische Mechanik**).

2. Den *Einbau* der hyperbolischen Geometrie in die euklidische hat zuerst Beltrami***) gegeben, indem er zeigte, daß die hyperbolische Geometrie auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes gilt.

Hat in dieser Weise Beltrami ein kongruentes Abbild der hyperbolischen Ebene durch Flächen gegeben, die im euklidischen Raum liegen, so bekommt man nach Klein†) ein „geodätisches", in der euklidischen Ebene gelegenes, indem man die projektive Maßbestimmung einführt. Jede geradlinige Strecke, die von zwei beliebigen Punkten des Fundamentalkegelschnittes begrenzt ist, ist in diesem Fall das Bild einer unbegrenzten hyperbolischen Geraden.

Ein „winkeltreues" Abbild der hyperbolischen Ebene gibt z. B. die euklidische Halbebene. Bilder der hyperbolischen Geraden sind dann die auf der Begrenzungsgeraden der Halbebene senkrecht stehenden (Halb-) Kreise.††)

3. Als Geometer, die einen freien Aufbau der hyperbolischen Geometrie sich zum Ziele machten — von den allgemeinen Untersuchungen über Grundlagen der Geometrie soll übrigens bei dieser Übersicht abgesehen werden — seien hier genannt Gérard†††), der von einer für das Verhältnis zweier gegenüberliegenden Seiten im Viereck mit drei rechten Winkeln angenommenen Ungleichheit ausgeht, Schur*†), der ohne Anwendung von Stetigkeit oder dem Archimedischen Axiom doch den Raum als Hilfsmittel braucht, und Hilbert**†).

---

*) N. J. Lobatschefskij, Géometrie imaginaire. Crelles Journal XVII (1837), S. 299—320. **) W. Killing. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen. Crelles Journal 98 (1885), S. 1—49. ***) Beltrami, Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Giornale di Batt. VI (1868), S. 283—315. †) F. Klein, Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie. Math. Ann. 4 und 6 (Leipzig, 1871 und 72). F. Klein geht von der Cayleyschen Maßbestimmung aus und zeigt ihre von Cayley nicht erkannte Bedeutung für die nichteuklidische Geometrie. Außerdem aber wird sie unabhängig von der euklidischen Geometrie bestimmt, so daß die beiden Arbeiten auch unter 3) mit aufzuzählen sind. ††) Zum ersten Mal und zugleich in allgemeinerer Form (im Bild auf der Fläche zweiten Grades) findet sich diese Darstellung in Note VI (S. 45—47) von Kleins Erlanger Programm. (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872). Wieder abgedruckt in Band XLIII der Math. Annalen. Leipzig 1893.

†††) Gérard, Sur la géometrie noneuclidienne. Thèse. Paris 1892.

*†) F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie. Math. Annalen 55 (Leipzig 1902), S. 264—292. **†) Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Math. Annalen 57 (Leipzig 1903), S. 137—150.

Hilbert macht nur von den einfachsten Voraussetzungen Gebrauch, es ist bemerkenswert, daß in § 1—3 seiner Abhandlung kaum ein Satz enthalten ist, den nicht Bolyai und Lobatschefskij selber zum Teil auch ohne Benützung des Raumes, des Stetigkeitsaxioms oder der euklidischen Geometrie bewiesen haben.

In der Tat gestattet die von Hilbert gegebene eigentümliche Einführung der Zahlen in die hyperbolische Geometrie, ohne weitere Hilfsmittel die hyperbolische Trigonometrie abzuleiten (s. w. unten, § 3—4). Zuvor aber soll gezeigt werden, daß eine Reihe von Konstruktionen sich schon auf Grund des Hilfssatzes § 1, 2 der Hilbertschen Arbeit ganz elementar ableiten lassen (§ 1) und daß die Bewegung der hyperbolischen Geometrie sich sehr einfach definieren lassen (§ 2).

§ 1.

Die merkwürdigen Punkte im Dreieck der hyperbolischen Geometrie nebst einigen Konstruktionen.

Wir gehen von der Tatsache aus, daß zwei Gerade sich entweder in einem (reellen) Punkt treffen, oder parallel sind (ein „Ende“*) gemein haben) oder ein gemeinsames Lot besitzen. Diese drei Fälle wollen wir im folgenden so bezeichnen: Die Geraden schneiden sich *reell*, im *Unendlichen* oder *ideal*.

Entsprechend unterscheiden wir reelle Winkel, Nullwinkel, Überwinkel und verstehen allgemein unter der Halbierungslinie eines Winkels diejenige Gerade im Winkelraum, welche die Eigenschaft hat, daß die beiden Schenkel des Winkels durch Spiegelung an ihr ineinander übergehen.

Halbierungslinie eines Überwinkels ist also z. B. die Gerade, welche in der Mitte des gemeinsamen Lotes der beiden Schenkel auf diesem Lot senkrecht steht.

Es soll nun gezeigt werden, daß genau wie in der euklidischen Geometrie, so auch hier die Mittellote der drei Seiten (1), die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel oder eines Innenwinkels und zweier entsprechender Außenwinkel (2) und die drei Höhen (3) sich in je einem Punkt treffen. Dieser Punkt kann unter Umständen auch unendlich fern oder ideal sein, eine Annahme, die auch von den Ecken des Dreiecks gemacht werden darf. All' diese Sätze lassen sich elementar beweisen, und es sollen die Beweise durchgeführt werden, soweit sie für die Anwendungen erforderlich sind.

---

*) Hilbert a. a. O. S. 140. (Zweite Definition nach Axiom IV.)

1. Die Mittellote der Dreiecksseiten.

Aus Kongruenzsätzen folgt leicht, daß wenn die Mittellote zweier Dreiecksseiten sich in einem reellen Punkte M treffen, auch das Mittellot der dritten Seite durch diesen Punkt M hindurchgeht.

Ist er ideal, sei etwa $D'E'$ das gemeinsame Lot der Mittellote DD' und EE' von den beiden Dreiecksseiten $a = BC$ und $b = CA$ (Fig. 1), so fälle man auf das gemeinsame Lot die Lote AA', BB' und CC'. Die drei Lote sind untereinander gleich. Errichtet man jetzt auf $A'B'$ das Mittellot, so muß es notwendig die Strecke AB (etwa in F) schneiden, und die beiden Vierecke $BFF'B'$ und $AFF'A'$ sind dann einander kongruent, woraus folgt, daß $F'F$ das Mittellot der Seite AB ist, was bewiesen werden sollte.*)

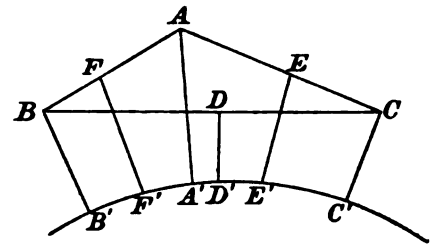


Fig. 1.

Sind zwei der Mittellote zueinander parallel, so muß das Mittellot der dritten Seite jedenfalls mit jedem der beiden anderen Mittellote je ein Ende gemein haben. Wir haben nachzuweisen, daß dies dasselbe Ende ist, d. h. daß die drei genannten Geraden nicht etwa ein „asymptotisches Dreieck“ (d. h. ein Dreieck mit drei Nullwinkeln) bilden.

Man schließt auf die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung aus den folgenden beiden sehr leicht zu erweisenden Tatsachen: Mindestens eine Seite im Dreieck, nämlich die dem größten Winkel gegenüberliegende, wird von allen drei Mittelloten getroffen; ferner: Eine Gerade kann nur zwei Seiten eines asymptotischen Dreiecks (in reellen Punkten) treffen.

Es müssen also die drei Mittellote, wenn zwei von ihnen ein Ende gemein haben, notwendig alle drei ein gemeinsames Ende besitzen.**)

Anmerkung. Den dritten Spezialfall des Satzes von den Mittelloten kann man benützen, um die Richtigkeit der von Bolyai***) gegebenen Konstruktion des Lotes zum Parallelwinkel zu erweisen.

Es sei α der Winkel, zu dem das Lot gesucht wird. (Vorausgesetzt

*) Vgl. die deutsche Ausgabe von Lobatschefskijs „Pangeometrie“ (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 130. Leipzig 1902). S. 85.

**) Vgl. Hilbert a. a. O. § 1, Satz 4. An der von Hilbert zitierten Stelle hat Lobatschefskij den Satz sehr viel umständlicher bewiesen. (Vgl. die Engelsche Übersetzung S. 182—184).

***) Appendix § 35 und Fig. 18. Dort wird die Existenz des in Fig. 2 dieser Abhandlung mit D bezeichneten Punktes b sehr sorgfältig bewiesen.

ist, daß man bereits Parallelen ziehen kann.) Dann kann man immer einen Parallelwinkel β so konstruieren — durch geeignete Wahl des Lotes — daß $\beta > \alpha$. Nun lege man β an den einen Schenkel AA' des Winkels α an (Fig. 2), mache AB gleich dem doppelten Lot das zum Parallelwinkel β gehört, ziehe die Parallele BB' zu AA', trage den Winkel α an BB' an, bringe den andern Schenkel zum Schnitt mit dem Schenkel des gegebenen Winkels (im Punkt D), mache endlich noch $DC = DB$. Dann ist, wie wir beweisen wollen, AC das doppelte Lot, welches zum Parallelwinkel α gehört, d. h. also, trägt man in C den Winkel α an AC an, so ist CC' parallel AA'.

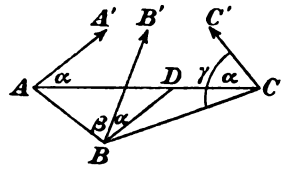


Fig. 2.

Es ist in Fig. 2, wenn wir die Dreieckswinkel mit A, B, C bezeichnen, ferner noch die Winkel $B'BC$ und BCC' die zufolge der Konstruktion einander gleich sind, mit γ bezeichnen:

$$A = \beta - \alpha,$$
$$B = \beta + \gamma,$$
$$C = \gamma - \alpha,$$

also

$$\alpha = \frac{B-A-C}{2}, \quad \beta = \frac{B+A-C}{2}, \quad \gamma = \frac{B+C-A}{2}.$$

Jetzt wollen wir auf den drei Seiten des Dreiecks uns die Mittellote errichtet denken, und die Verbindungslinien des (reellen, unendlich-fernen oder idealen) gemeinsamen Punktes der drei Mittellote und der Ecken mit

$$A_0'A, \quad B_0'B, \quad C_0'C$$

bezeichnen. Dann ist

$$\sphericalangle A_0'AC = \sphericalangle ACC_0' \quad (= \alpha_0),$$
$$\sphericalangle A_0'AB = \sphericalangle ABB_0' \quad (= \beta_0),$$
$$\sphericalangle B_0'BC = \sphericalangle BCC_0' \quad (= \gamma_0)$$

und weiter

$$\sphericalangle A = \beta_0 - \alpha_0, \quad \sphericalangle B = \beta_0 + \gamma_0, \quad \sphericalangle C = \gamma_0 - \alpha_0.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_0,$$

d. h. die Linien $A'A$, $B'B$ (und $C'C$) gehen durch den gesuchten gemeinsamen Punkt. Nun ist aber nach Konstruktion AA' parallel zu BB', also haben die drei Geraden ein gemeinsames Ende, was bewiesen werden sollte.

2. Die Winkelhalbierenden im Dreieck.

Die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks mit drei reellen Ecken gehen durch einen Punkt, den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises. Das wird, genau wie in der euklidischen Geometrie bewiesen. Der Satz gilt aber auch dann noch, wenn die Ecken unendlich fern oder ideal sind, sobald man den Begriff „Winkelhalbierende" in der zu Anfang des Paragraphen gegebenen Weise erweitert. Übrigens wird der Schnittpunkt immer dann reell, wenn unter den drei Ecken des Dreiecks sich keine ideale befindet. — Ist dies dagegen der Fall dann und nur dann kann es vorkommen, daß zwei Winkelhalbierenden einen unendlichfernen oder idealen Punkt gemein haben, durch den dann auch die dritte Winkelhalbierende hindurchgeht. —

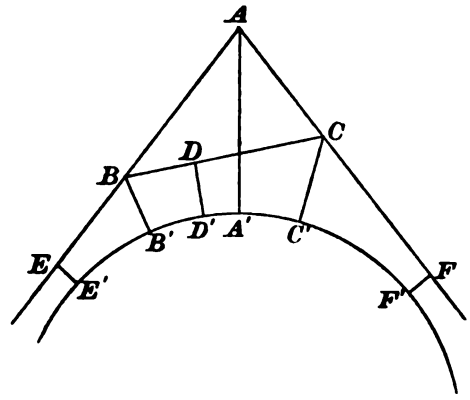


Fig. 3.

Halbieren wir nun einen Innenwinkel und die beiden der Gegenseite anliegenden Außenwinkel (Fig. 3) und nehmen an, daß zwei der Winkelhalbierenden sich in einem idealen Punkt schneiden — es sei etwa $B'C'$ das gemeinsame Lot —, dann ist der kürzeste Abstand dieses Lotes von den drei Dreiecksseiten gleich groß, und wenn man von A das Lot AA' auf $B'C'$ fällt, so werden die beiden Vierecke $AA'E'E$ und $AA'F'F$ zueinander kongruent, d. h. AA' ist Winkelhalbierende im gegebenen Dreieck. Ähnlich erledigen sich die andern Fälle.

Anwendung: Wendet man den Satz für die Innenwinkel eines Dreiecks mit zwei endlichen und einem Nullwinkel an, so ergibt sich eine Methode, den Nullwinkel zu halbieren. Man verbinde zwei Punkte A und B der beiden Parallelen und halbiere die Innenwinkel bei A und B in dem entstehenden Dreieck. Die Halbierungslinien schneiden sich in einem reellen Punkt, durch den die gesuchte Mittellinie des Nullwinkels hindurchgeht. Wenden wir dasselbe Verfahren noch einmal an, so bekommen wir einen zweiten reellen Punkt der gesuchten Geraden.

3. Die Höhen im Dreieck.*)

Treffen sich zwei der drei Höhen im Dreieck in einem reellen Punkt, so geht auch die dritte durch diesen Punkt hindurch. — Es seien nämlich (Fig. 4) AD und BE die Höhen, die sich in H treffen mögen. Das Dreieck nun, für welches H der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist, und von dem D und E zwei Ecken sind, hat zum Mittelpunkt des der Seite DF anbeschriebenen Kreises den Punkt B, in dem sich die Gerade EH und das Lot CD auf HD schneiden. Genau so sieht man, daß A der Mittelpunkt eines zweiten anbeschriebenen Kreises ist. Man erkennt so, daß der Punkt F reell ist, auf AB liegt, und daß FC durch H hindurchgeht, ferner auf AB senkrecht schneidet, d. h. also: Auch die dritte Höhe geht durch H hindurch w. z. b. w.

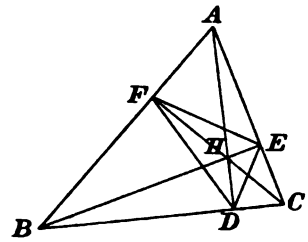


Fig. 4.

Denken wir uns ferner in Fig. 3 das Lot auf $A'A$ in A errichtet, nehmen wir ferner an, die Figur sei so gewählt, daß $B'B$ und dieses Lot sich in einem reellen Punkt (K) und ebenso $C'C$ und das Lot sich in einem reellen Punkt (L) schneiden, so gehen die Geraden BM und CM resp. durch die Mittelpunkte L und K der anbeschriebenen Kreise des Dreiecks ABC und stehen auf $B'K$ und $C'L$ in B bezw. C senkrecht.

Umgekehrt erhalten wir aus der Figur den Satz: Schneiden sich im Dreieck $KL(D'E')$, das zwei reelle und eine ideale Ecke hat, die beiden Höhen LB und KC in einem reellen Punkt M, so geht auch die dritte Höhe (d. h. das gemeinsame Lot AA' von KL und $B'C'$ durch diesen Punkt hindurch.

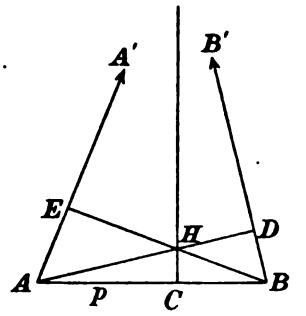


Fig. 5.

Entsprechend, d. h. auch durch Zurückführung auf den Satz von den Winkelhalbierenden, ist der Beweis für ein Dreieck mit einer unendlichfernen Ecke zu führen.

Anwendungen. Die beiden zuletzt genannten Fälle können zur einfachen Lösung zweier Aufgaben dienen.

Erstens**): Konstruktion des Lotes zum Parallelwinkel α (Fig. 5).

*) Ein analytischer Beweis des Satzes, daß die Höhen sich in einem reellen, unendlichfernen oder idealen Schnittpunkt schneiden findet sich bei Gérard, a. a. O. p. 54; vgl. auch (für die euklidische Ebene und die Kugel) Baltzer, Elemente der Mathematik II (6. Aufl. Leipzig 1883) S. 41.

**) Gérard a. a. O. p. 74. Diese Konstruktion ist die einfachste (Vgl. Hilbert a. a. O. S. 142, Fig. 3).

Man bestimme, was immer möglich ist, den Punkt B so, daß die Parallele BB' zu AA' mit AB einen spitzen Winkel einschließt. Dann fälle man die Lote AD und BE auf AA' und BB' und von dem immer vorhandenen reellen Schnittpunkt H aus das Lot HC auf AB. Dann ist $p = AC$ die gesuchte Strecke, so daß

$$\alpha = \Pi(p)$$

ist.

Zweitens*): Das gemeinsame Lot zweier sich nicht schneidenden Geraden g und h. (Fig. 6.)

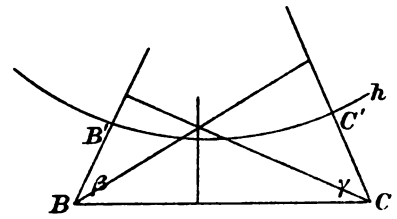


Fig. 6.

Da die beiden Geraden (g und h) ein gemeinsames Lot haben, so müssen die Punkte B und C auf g sich so wählen lassen, daß die Winkel $\beta = B'BC$ und $\gamma = BCC'$ der von B und C auf h gefällten Lote mit BC bezw. CB beide spitz sind. Die Höhen des Dreiecks $BC(C'B')$ treffen sich dann sicher in einem reellen Punkt M, und das von M auf g gefällte Lot steht auch auf h senkrecht. —

§ 2.

Die Bewegungen in der hyperbolischen Ebene.

In § 4 seiner Abhandlung**) gelangt Hilbert zu dem Ergebnis: Bezeichnet man die den Enden einer Geraden zugeordneten Zahlenwerte mit ξ und η, so bedeutet die in ξ und η bilineare Gleichung

$$a\xi\eta + \frac{b}{2}(\xi+\eta) + c = 0 \qquad (4ac-b^2>0)$$

einen Punkt.

Durch geometrische Überlegungen gelangt man nun leicht zur Einsicht, daß jede beliebige Bewegung erhalten werden kann, in dem man „Verschiebungen der Ebene längs der Geraden $(0, \infty)$***) ferner „Drehungen um das Ende ∞"†) und Spiegelungen an der Achse $(+1, -1)$ in genügender Anzahl kombiniert††).

---

*) Alle andern Konstruktionen erfordern, mit einziger Ausnahme der von Hilbert gegebenen, das Ziehen von Parallelen. Vgl. z. B. Engel a. a. O. S. 253 u. 255 und meine Ausgabe der „Pangeometrie" S. 85. Zusatz 2. Hilbert verknüpft Existenzbeweis und Konstruktion in einfachster Weise (a. a. O. S. 141, Fig. 2).

**) a. a. O. S. 149. Vgl. auch Fig. 6 und 7 für das folgende.

***) a. a. O. S. 149 unten. †) a. a. O. S. 150 oben.

††) Spiegelungen an dieser Achse setzen sich aus Spiegelungen am Punkte 0 und an der Achse $(0, \infty)$ zusammen, d. h.

$$\xi' = -\frac{1}{\xi''}, \quad \xi'' = -\xi, \quad \text{oder} \quad \xi' = +\frac{1}{\xi}\left(\eta' = +\frac{1}{\eta}\right).$$

Diese drei Arten von Bewegungen sind aber gegeben durch die Transformationen

$$\xi' = \alpha\xi, \qquad (\eta' = \alpha\eta);$$
$$\xi' = \xi + \alpha, \quad (\eta' = \alpha + \eta);$$
$$\xi' = +\frac{1}{\xi}, \quad \left(\eta' = +\frac{1}{\eta}\right)$$

in genügender Anzahl kombiniert.

Hieraus folgt: *Die allgemeinste Bewegung ist durch eine Gleichung der Form*

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \qquad \left(\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}\right)$$

gegeben.

Dabei wird die bilineare Gleichung des Punktes sich wieder in eine bilineare Gleichung verwandeln, deren Determinante ist

$$4a'c' - b'^2 = (4ac - b^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 > 0.$$

Aus dieser Form der allgemeinsten Bewegung entnehmen wir noch den Satz:

Eine Bewegung ist vollkommen bestimmt, wenn man die Bilder dreier Enden kennt. —

Diesen halbgeometrischen, halbanalytischen Betrachtungen wollen wir jetzt eine rein geometrische Überlegung gegenüberstellen und zweierlei beweisen.

1. *Eine Transformation der hyperbolischen Ebene, bei der jeder reelle Punkt in einen reellen Punkt und jede Gerade in eine Gerade übergeht, ist notwendig eine Bewegung**).

2. *Jede Bewegung ist durch die Angabe der Bilder dreier Enden vollkommen bestimmt.*

---

1. Bei der Transformation verwandeln sich Gerade, die einen reellen Punkt (A) gemein haben, in Gerade die ebenfalls einen reellen Punkt (A') gemein haben. Schneidet man nun eine Anzahl solcher von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen mit einer Transversale die die Geraden in $A_1, A_2, \cdots, A_n$ treffen möge, so entspricht der endlichen Strecke A_1A_n eine endliche Strecke $A_1'A_n'$, es haben die Punkte $A_1', A_2', \cdots, A_n'$ dieselbe Anordnung wie die Punkte $A_1, A_2, \cdots, A_n$. (Liegt A_i zwischen A_1 und A_n, so auch A_i' zwischen A_1' und A_n'). Hieraus folgt weiter, daß Geraden mit gemeinsamem Ende auch wieder Gerade mit gemeinsamem Ende und Geraden mit gemeinsamem Lot auch wieder Gerade mit gemeinsamem Lot entsprechen. Ist nämlich AB die Grenze zwischen den schneidenden und

*) Ferner soll die Anordnung der von einem Punkt ausgehenden Halbstrahlen ungeändert bleiben.

den nicht schneidenden Geraden, so muß jede Gerade auf der einen Seite von $A'B'$ noch die Transversale $A_1'A_2' \cdots A_n' \cdots$ treffen, während andrerseits keine auf der andern Seite von $A'B'$ liegende Halbgerade die Transversale treffen kann; es wird also $A'B'$ parallel zu $A_1'A_2' \cdots A_n' \cdots$. Weiter verwandeln sich zwei Gerade mit idealem Schnittpunkt in ebensolche Gerade.

Zieht man die beiden Geraden zwischen zwei Geraden g und h mit gemeinsamem Lot, die je ein Ende mit jeder der beiden gegebenen Geraden gemein haben und sich in einem Punkte M treffen, so hat M folgende Eigenschaften: Legt man durch M irgend eine Gerade, die g und h in G und H trifft, so ist $GM = MH$. Legt man zwei Geraden, die g und h in G_1G_2 und H_1H_2 treffen, so ist $G_1G_2 = H_1H_2$.

M verwandelt sich nun bei der Transformation in den entsprechenden Punkt M', und hieraus ergeben sich die Sätze:

Der Mittelpunkt M einer beliebigen Strecke (GH) verwandelt sich in den Mittelpunkt (M') der entsprechenden Strecke $(G'H')$.

Hieraus folgt weiter, daß zwei gleich große auf einer Geraden gelegene Strecken sich in zwei gleich große Strecken verwandeln.

Aus der oben gemachten Bemerkung über gewisse untereinander gleiche Strecken (G_1G_2) und (H_1H_2) folgert man dann leicht noch: Zwei Strecken, die untereinander gleich sind und auf zwei Geraden mit gemeinsamem Lot liegen, verwandeln sich in zwei entsprechend gelegene untereinander gleiche Strecken.

Hat man endlich zwei beliebig gelegene gleich große Strecken, so kann man leicht eine dritte Strecke angeben, deren Trägerin eine Gerade ist, die jede der beiden ersten Geraden in einem idealen Punkt trifft. Hieraus ergibt sich dann:

Je zwei Strecken, die untereinander gleich sind, verwandeln sich in zwei Strecken, die untereinander gleich sind.

Ein gleichschenkliges Dreieck wird sich also wieder in ein gleichschenkliges Dreieck verwandeln, und die Mitte seiner Basis wieder in die Mitte der Basis. Hieraus ergibt sich leicht, daß die rechten Winkel sämtlich ungeändert bleiben, mit Hilfe des rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks dann, indem man die Höhe fällt, daß auch die Winkel von der Größe $\frac{1}{4}\pi$ ungeändert bleiben. Überhaupt kann man zeigen, daß jeder Winkel $(\pi \cdot 2^{-n})$ ungeändert bleibt. Hieraus ergibt sich, übrigens ohne Anwendung des archimedischen Axioms allein mit Anwendung der Axiome über die Anordnung und des Begriffs „Winkelraum“*), daß bei der Transformation *alle* Winkel ungeändert bleiben. Mit den Winkeln bleiben aber auch die Strecken (Lote) ungeändert, zu denen die Winkel als Parallel-

*) Hilbert a. a. O. p. 139 oben.

winkel gehören, d. h. es bleiben alle Strecken ungeändert, die Transformation ist eine Bewegung. —

2. Daß eine Bewegung durch die Bilder dreier Enden vollkommen bestimmt ist, sieht man in folgender Weise ein: Fällt man von einem Punkt P aus die drei Lote auf drei Seiten eines asymptotischen Dreiecks, so haben diese Lote bestimmte Größen und bestimmen ihrerseits die Lage des Punktes P vollkommen eindeutig. (Zwei Lote reichen zur eindeutigen Festlegung des Punktes nicht aus). —

§ 3.

Punktkoordinaten. Entfernung und Winkel.

Wir wollen jetzt zur hyperbolischen Metrik übergehen, und zunächst den Winkel zweier Geraden durch ihre Enden $(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2)$ ausdrücken, sodann neue Punktkoordinaten einführen, um die Entfernung zweier Punkte zu berechnen.

1. Berechnung des Winkels.

Wir wollen zuerst eine Formel für die Drehungen um den Punkt O aufstellen.

Die Gleichung des Punktes O ist:

$$\xi\eta = -1.$$

Die Drehung um diesen Punkt muß also gegeben sein durch Gleichungen der Form

$$\xi' = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}, \quad \eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}, \tag{1}$$

vermöge deren

$$\xi'\eta' = -1$$

wird, sobald

$$\xi\eta = -1.$$

Daraus ergibt sich die Form

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}.$$

Führt man eine Drehung um 90^0 aus, so entsprechen den Enden $-1, 0, 1, \infty$ die Enden $0, 1, \infty, -1$, dreht man um 180^0, so weiter die Enden: $1, \infty, -1, 0$.

Im ersten Fall wird

$$\alpha = 1 \left(= \operatorname{tang} \frac{1}{4}\pi\right),$$

im zweiten Fall

$$\alpha = \infty \left(= \operatorname{tang} \frac{1}{2}\pi\right)$$

α ist also in diesen speziellen Fällen gleich der Tangente des halben Drehungswinkels, und diese Beziehung wollen wir jetzt allgemein beweisen.

Führt man zwei Drehungen nacheinander aus

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}, \quad \xi'' = \frac{\xi' + \alpha'}{1 - \alpha'\xi'}$$

so wird

$$\xi'' = \frac{\xi + \alpha''}{1 - \alpha''\xi},$$

wobei

$$\alpha'' = \frac{\alpha + \alpha'}{1 - \alpha\alpha'}$$

ist.

Andrerseits ist, wenn wir die Drehungswinkel mit φ, φ' und φ'' bezeichnen

$$\varphi'' = \varphi + \varphi'$$

und

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi'' = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi'}{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi'}.$$

Die Größe α'', der Parameter für die aus zwei aufeinanderfolgenden Drehungen um den Punkt O zusammengesetzte Drehung, setzt sich also aus den Parametern der einzelnen Drehungen genau so zusammen wie die Tangente des halben Drehungswinkels. Da überdies zwischen den Größen α und $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\varphi = \pi$ Identität besteht, so gelangen wir zu dem Schluß:

Die Gleichung

$$\xi' = \frac{\xi + \alpha}{1 - \alpha\xi}$$

stellt eine Drehung (um den Punkt 0*) dar, wobei der Drehungswinkel bestimmt ist durch*

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \alpha.$$

Hieraus bekommen wir leicht die allgemeine Formel, die den Winkel φ zweier Geraden (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) durch ihre Enden ausdrückt. Das Doppelverhältnis der Zahlen

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \alpha, \quad \eta_1 = \infty, \quad \eta_2 = -\frac{1}{\alpha}$$

hat den Wert

$$\frac{0 - \alpha}{\infty - \alpha} : \frac{0 + \frac{1}{\alpha}}{\infty - \frac{1}{\alpha}} = -\alpha^2.$$

Führen wir nun eine beliebige Bewegung (1) aus, wobei die Enden $\left(0, \infty, \alpha, -\frac{1}{\alpha}\right)$ übergehen mögen in $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$, so bleibt einerseits der Winkel

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \alpha$$

ungeändert, und andrerseits das Doppelverhältnis, d. h. es bleibt die zwischen diesen beiden Größen bestehende Beziehung erhalten.

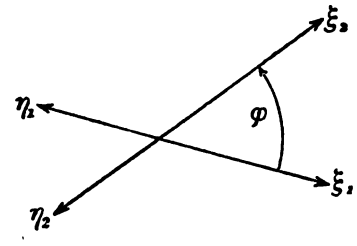


Fig. 7.

Der Winkel φ (Fig. 7), *den die beiden Geraden* $(\xi_1 \eta_1)$ *und* $(\xi_2 \eta_2)$ *miteinander einschließen, ist bestimmt durch*

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \eta_2} : \frac{\eta_1 - \xi_2}{\eta_1 - \eta_2}}.$$

2. Punktkoordinaten und ihre Transformation.

Die Gleichung eines Punktes ist

$$a + b\left(\frac{\xi + \eta}{2}\right) + \xi\eta = 0$$

wobei

$$4a - b^2 > 0.$$

Wir erfüllen diese Bedingung, indem wir setzen:

$$a = e^{-2u} + v^2 (= w^2),$$
$$b = -2v$$

und hierin u und v alle möglichen reellen Werte erteilen.

Die vorausgeschickte Gleichung verwandelt sich in

$$\text{(3)} \qquad w^2 - v(\xi + \eta) + \xi\eta = 0$$

und kann dazu dienen, die Gleichung einer Geraden aus zwei auf ihr gelegenen Punkten, oder umgekehrt die Gleichung eines Punktes anzugeben, wenn zwei durch ihn gehende Geraden bekannt sind.

Z. B. wird die Gleichung der Geraden $(+1, -1)$

$$w = 1,$$

die der Geraden $(0, \infty)$ wird

$$v = 0.$$

Ferner werden die Koordinaten des Punktes O:

$$v = 0, \ (w = 1), \ u = 0.$$

Man kann die Gleichung aber auch benützen, um die Transformation der Punktkoordinaten bei Bewegungen zu berechnen.

Bei der Transformation

$$\xi' = \xi + a, \quad \eta' = \eta + a$$

(d. h. bei der „Drehung um den Punkt ∞") verwandelt sich die Gleichung

$$w^2 - v(\xi + \eta) + \xi\eta = 0$$

in

$$w^2 - v(\xi' + \eta' - 2a) + (\xi' - a)(\eta' - a) = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichung wieder in der Form

$$w'^2 - v'(\xi' + \eta') + \xi'\eta' = 0,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} u' &= u, \\ v' &= v + a, \\ w'^2 &= w^2 + 2va + a^2. \end{aligned}$$

Ebenso kommt zur Transformation

$$\xi' = a\xi, \quad \eta' = a\eta$$

(d. h. der „Schiebung längs der Achse $(0, \infty)$") das weitere Formelsystem

$$\begin{aligned} u' &= u - \log a, \\ v' &= av, \\ w' &= aw \end{aligned}$$

und zur „Spiegelung am Punkte 0", gegeben durch

$$\xi' = -\frac{1}{\xi}, \quad \eta' = -\frac{1}{\eta}$$

kommt

$$\begin{aligned} u' &= u + 2\log w, \\ v' &= -\frac{v}{w^2}, \\ w' &= \frac{1}{w}. \end{aligned}$$

3. Die Entfernung zweier Punkte.

Die Entfernung zweier Punkte $P_1 P_2$ ist eine Funktion ihrer Koordinaten, die bei Bewegung ungeändert bleibt, und die die Eigenschaft hat, daß für drei Punkte auf einer Geraden die Beziehung besteht

$$P_1P_2 + P_2P_3 = P_1P_3.$$

Betrachten wir jetzt die Funktion

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} e^{u_1 + u_2}(w_1^2 + w_2^2 - 2v_1v_2)$$

so verwandelt sie sich bei der ersten Transformation in

$$f'(u_1', u_2', v_1', v_2') = \frac{1}{2} e^{u_1'+u_2'}(w_1'^2 w_2'^2 + 2a(v_1'+v_2') + 2a^2 - 2(v_1'-a)(v_2'-a))$$
$$= \frac{1}{2} e^{u_1'+u_2'}(w_1'^2 + w_2'^2 - 2v_1'v_2'),$$

d. h., sie bleibt ungeändert.

Bei der zweiten Transformation hat man:

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} a^2 e^{u_1'+u_2'}\left(\frac{w_1'^2}{a^2} + \frac{w_2'^2}{a^2} - \frac{2v_1'}{a} \cdot \frac{v_2'}{a}\right);$$

und auch hierbei ändert sich die Ausdrucksform nicht.

Endlich entsprechend für die dritte Transformation:

$$f(u_1, u_2, v_1, v_2) = \frac{1}{2} e^{u_1'+u_2'} w_1'^2 w_2'^2 \cdot \left(\frac{1}{w_1'^2} + \frac{1}{w_2'^2} - \frac{2v_1'v_2'}{w_1'^2 w_2'^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} e^{u_1'+u_2'}(w_1'^2 + w_2'^2 - 2v_1'v_2').$$

Die Größe bleibt also bei allen Bewegungen ungeändert, d. h. sie ist eine Funktion der Entfernung der beiden Punkte

$$P_1(u_1, v_1, w_1) \quad \text{und} \quad P_2(u_2, v_2, w_2).$$

Um zu sehen, welche Funktion es ist, führen wir zwei Schiebungen längs der Achse (v, ∞) nacheinander aus. Ein Punkt dieser Achse $(v=0)$ erhält bei der ersten „Schiebung" die u-Koordinate

$$u' = u - \log a$$

bei der zweiten

$$u'' = u' - \log a' = u - (\log a + \log a').$$

Die Größen $(\log a)$ addieren sich also einfach, genau wie die Strecken, um welche die Punkte verschoben werden, sie sind ihnen also proportional.

Führt man erst eine Schiebung aus, die den Punkt $(u_1, 0)$ mit dem Punkt $(u_2, 0)$ zur Deckung bringt, dann eine zweite, die $(u_2, 0)$ mit $(u_3, 0)$ zur Deckung bringt, so lassen sie sich durch eine einzige ersetzen. Die Parameter $(\log a, \log a', \log a'']$ haben die Werte

$$u_2 - u_1, \quad u_3 - u_2, \quad u_3 - u_1.$$

Hieraus folgt: Die *Entfernung* zweier Punkte $(u_1 u_2)$ der Geraden $v=0$ ist (bis auf einen Faktor, dem wir den Wert 1 erteilen wollen) *gleich* $u_2 - u_1$.

Für zwei Punkte dieser Achse nimmt überdies die aufgestellte Invariante den Wert an

$$f(u_1, u_2, 0, 0) = \frac{1}{2} e^{u_1+u_2}(e^{-2u_1} + e^{-2u_2})$$
$$= \frac{1}{2}(e^{u_2-u_1} + e^{u_1-u_2}) = \cos \text{hyp.}\,(u_2 - u_1).$$

Damit ist die Beziehung der Invariante und der Entfernung festgelegt, und wir haben den Satz:

Legt man die Maßbestimmung für den Abstand zweier Punkte so fest, daß man den (konstanten) Faktor, der für zwei Punkte (u_2 und u_1) der Achse $v = 0$ den wirklichen Wert der Entfernung von $u_2 - u_1$ unterscheidet, gleich 1 setzt, so wird die Entfernung r zweier beliebig gelegener Punkte bestimmt durch

$$\text{ch}\, r = \frac{1}{2} e^{u_1+u_2}(w_1^2 + w_2^2 - 2v_1v_2). \tag{4}$$

§ 4.

Die hyperbolische Trigonometrie.

Nachdem einmal die Formel für den Winkel zweier Geraden und die Entfernung zweier Punkte aufgestellt ist, macht der weitere Aufbau der Trigonometrie keine besonderen Schwierigkeiten. Wir wollen uns damit begnügen, die Beziehung zwischen Lot und Parallelwinkel (1), einige Formeln für das rechtwinklige Dreieck (2) und die Formeln abzuleiten (3), welche die in § 1 unerledigt gebliebene Konstruktion des Parallelwinkels zum Lot, d. h. das Parallelenziehen überhaupt ermöglichen.

1. Der Parallelwinkel.

Tragen wir (Fig. 8) auf der Achse $(-1, +1)$ von O aus nach dem Ende $+1$ hin die Strecke $OP = p$ ab und ziehen die Gerade mit dem Ende ∞ durch diesen Punkt, so wollen wir nun den Wert ξ des andern Endes dieser Geraden berechnen.

Die Gleichung der Geraden wird, wie aus (3) folgt

$$\xi = v.$$

Der Punkt $P(w = 1)$ hat also die Koordinaten

$$v = \xi, \quad u = -\frac{1}{2}\log(1-\xi^2), \quad w = 1$$

und seine Entfernung p vom Punkte O ist bestimmt durch

$$\text{ch}\, p = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

d. h. es ist

$$\xi = \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}} = th\, p.$$

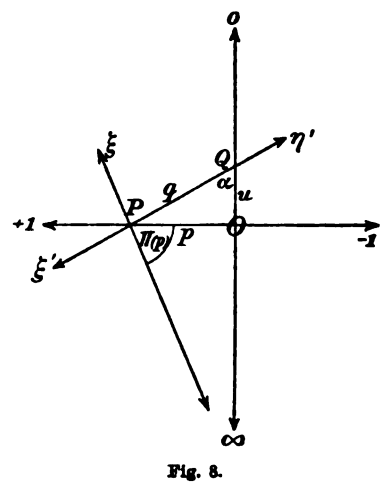


Fig. 8.

Andrerseits ist (nach § 3, 1)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(p)=\sqrt{(-1)\cdot\frac{\infty+1}{\infty-1}:\frac{\xi+1}{\xi-1}}=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}=e^{-p}.$$

Also wird*)

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(p)=e^{-p}. \tag{5}$$

2. Das rechtwinklige Dreieck.

Verbinden wir (Fig. 8) den Punkt $Q(u, 0)$ der Achse $(0, \infty)$ mit dem Punkte P, so ist die Entfernung der Punkte $PQ(=q)$ gegeben durch

$$\operatorname{ch} q=\frac{1}{2}\frac{e^{u}}{\sqrt{1-\xi^{2}}}(e^{-2u}+1)=\operatorname{ch} u\operatorname{ch} p.$$

Also sieht man, daß im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c die Relation besteht

$$\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b=\operatorname{ch} c. \tag{6}$$

Die Enden der Verbindungslinie der beiden Punkte

$$(P)\quad w=1,\qquad v=\operatorname{th} p\,(=\xi)$$

und

$$(Q)\quad w=e^{-2u},\quad v=0$$

bestimmen sich aus

$$\xi'\eta'=-e^{-2u},$$

$$\xi'+\eta'=\frac{1-e^{-2u}}{\operatorname{th} p}=2e^{-u}\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{sh} p}\operatorname{ch} p$$

d. h. es wird (mit Benützung von (6))

$$\xi'=\frac{2e^{-u}}{\operatorname{sh} p}(\operatorname{sh} u\operatorname{ch} p+\operatorname{sh} q),$$

$$\eta'=\frac{2e^{-u}}{\operatorname{sh} p}(\operatorname{sh} u\operatorname{ch} p-\operatorname{sh} q),$$

also

$$\operatorname{tang}^{2}\frac{1}{2}\alpha=-\left(\frac{\xi'-\infty}{\xi'-0}:\frac{\eta'-\infty}{\eta'-0}\right)=-\left(\frac{\eta'}{\xi'}\right)$$

$$=\frac{\operatorname{sh} q-\operatorname{sh} u\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} u\operatorname{ch} p+\operatorname{sh} q}$$

und

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tang}^{2}\frac{1}{2}\alpha}{1+\operatorname{tang}^{2}\frac{1}{2}\alpha}=\frac{\operatorname{sh} u\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} q}=\frac{\operatorname{th} u}{\operatorname{th} q}.-$$

---

*) Vgl. Lobatschefskij-Engel S. 18 und S. 212—214.

Im rechtwinkligen Dreieck besteht demnach zwischen der Kathete a, dem anliegenden Winkel β und der Hypotenuse c die Beziehung

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}. \tag{7}$$

3. Das Viereck mit drei rechten Winkeln und die Parallelenkonstruktion. (Vgl. Fig. 9.)

Fällen wir vom Punkte $P(u_0 v_0 w_0)$ die Lote auf die Achsen $PA = c$, $PB = b$, so hat die Gerade PA, weil die Summe ihrer Enden gleich Null ist, die Gleichung

$$w = w_0.$$

Es wird also (für den Punkt A)

$$d = u_1 = -\log w_0,\ v_1 = 0$$

und

$$\operatorname{ch} c = \frac{1}{2}\frac{e^{u_0}}{w_0}\cdot 2 w_0^2 = e^{u_0} w_0.$$

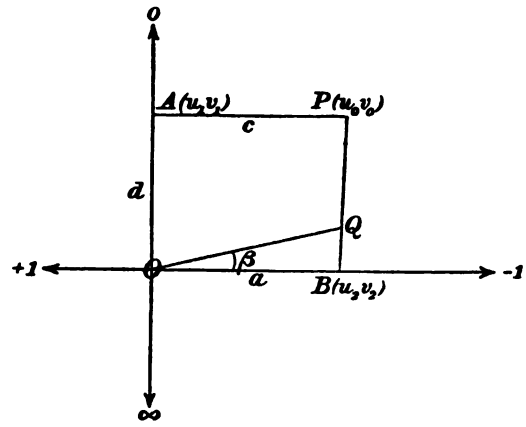


Fig. 9.

Das Lot PB hat eine Gleichung von der Form

$$w^2 - \lambda v + 1 = 0$$

da seine Enden von $(+1, -1)$ harmonisch getrennt sind. Seine Gleichung wird also

$$w^2 - \frac{w_0^2 + 1}{v_0} v + 1 = 0,$$

und B hat die Koordinaten

$$w_2 = 1, \quad v_2 = \frac{2 v_0}{w_0^2 + 1}.$$

Demnach wird

$$\operatorname{ch} a = e^{-u_2} = \frac{w_0^2 + 1}{\sqrt{(w_0^2+1)^2 - 4 v_0^2}} = \frac{e^{-2d} + 1}{\sqrt{(e^{-2d}+1)^2 - 4\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 c}\right) e^{-2d}}}$$

$$= \frac{\operatorname{ch} d}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 d + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 c}}}.$$

Also wird

$$\operatorname{sh} a = \sqrt{\operatorname{ch}^2 a - 1} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} c \sqrt{\operatorname{sh}^2 d + \operatorname{ch}^{-2} c}}$$

und

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \operatorname{ch} d. \tag{8}$$

Zufolge der Gleichung (5) ist nun noch

$$\sin \Pi(d) = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(d)}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \Pi(d)} = \frac{2}{e^d + e^{-d}} = \frac{1}{\operatorname{ch} d},$$

also

$$\sin \Pi(d) = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{th} c}. \tag{8'}$$

Aus dem Vergleich der Formeln (7) und (8') ergibt sich der Satz:

Zieht man durch den Punkt O (der dem spitzen Winkel APB gegenüberliegt) im Viereck mit drei rechten Winkeln die Parallele zur Seite AP und bringt sie mit OB zum Schnitt, so ist die Hypotenuse OQ des rechtwinkligen Dreiecks OBQ gleich AP.

Daraus ergibt sich die bekannte Parallelenkonstruktion*): Um von dem Punkte O des auf PA in A errichteten Lotes aus die Parallele zu AP zu ziehen, fälle man das Lot PB von P auf $OB (BO \perp OA)$ und mache $OQ = AP$, dann ist OQ diese Parallele.

Leipzig, den 1. März 1904.

---

*) Alle Lösungen der Aufgabe, die Parallele zu ziehen, beruhen auf Beziehungen zwischen dem Viereck $PAOB$ und dem Dreieck QOB. (Vergl. Bolyai, Appendix § 34. Lobatschefskij-Engel a. a. O. S. 256; Schur a. a. O. S. 292). Es ist bisher noch nicht gelungen einen einwandfreien *rein geometrischen*, weder auf Stetigkeitsbetrachtungen noch auf Benützung räumlicher Hilfsmittel beruhenden Beweis dieser Beziehungen zu erbringen. Vielleicht geben passend gewählte Spezialfälle der in § 1 genannten Sätze einen Weg hierzu.

Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

Dem ersten Beitrag zur Theorie der Punktmengen*), der den Beweis eines speziellen Theorems enthielt, lasse ich *die allgemeine Theorie der ebenen perfekten Mengen* folgen. Sie kann als naturgemäße Weiterführung der Resultate betrachtet werden, die wir Herrn G. Cantor verdanken.

Das wichtigste und umfassendste Theorem der Cantorschen Theorie lautet bekanntlich: „daß jede abgeschlossene Punktmenge, die nicht abzählbar ist, durch allmähliche Abspaltung einzelner Punkte auf eine perfekte Menge reduziert werden kann". Ist S die gegebene Menge, so ist

$$S = R + T,$$

wo R abzählbar und T perfekt ist. Man kann aber sofort die weitere Frage stellen, *welcher geometrische Bau den perfekten Mengen selber zukommt.* Hierüber ist bislang wenig gearbeitet worden. Nur die linearen, perfekten Mengen sind uns in ihrer inneren Struktur vollständig durchsichtig; für sie hat bereits Herr G. Cantor selbst die bezüglichen Resultate abgeleitet. Von dem geometrischen Charakter der ebenen oder räumlichen, perfekten Mengen wissen wir jedoch noch so gut wie gar nichts.

Diese Lücke soll der folgende Beitrag für die ebenen Mengen ausfüllen, er soll eine vollständige Analyse aller perfekten, ebenen Mengen liefern. Um eine geometrische Einsicht in den Bau dieser Mengen zu erzielen, wird es sich zunächst darum handeln, sie in gewisse einfache Bestandteile zu zerlegen. Man kann die Methode, die Herr Cantor für die Reduktion der abgeschlossenen Mengen benutzt hat, in der Weise auf die perfekten Mengen verallgemeinern, daß außer den einzelnen Punkten isolierte, zusammenhängende Bestandteile, auftreten, die von der Gesamtmenge in analoger Weise abgespalten werden, wie die isolierten Punkte. Auch hier besteht das Hauptresultat in dem Nachweis einer Gleichung

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} + \mathfrak{T},$$

*) Diese Annalen, Bd. 58, S. 195.

wo $\mathfrak{S}$ die gegebene perfekte Menge ist, $\mathfrak{R}$ eine stets abzählbare Menge isolierter, zusammenhängender Bestandteile und $\mathfrak{T}$ eine dem angegebenen Reduktionsprozeß nicht mehr zugängliche Menge, deren Natur übrigens noch sehr mannigfach sein kann. Sie ist entweder eine *zusammenhängende* Menge oder aber eine solche *nicht* zusammenhängende Menge, die unbegrenzt in Teilmengen zerlegt werden kann, deren jede immer wieder eine unbegrenzte Teilbarkeit besitzt.

Der zweite Teil der Untersuchung hat sich mit den Eigenschaften der eben erwähnten einfachsten Bestandteile selber zu befassen. Wie ich bereits in meinem ersten Beitrag erwähnte, hängen diese Untersuchungen auf das Engste mit der Analysis situs zusammen; sie sollen *die geläufigen Begriffe und Sätze der Analysis situs mit den Mitteln der Mengentheorie prüfen und in voller Allgemeinheit begründen.* Die Notwendigkeit dieser Aufgabe wird kaum bestritten werden. Sie beruht darauf, daß die Analysis situs die Grundlage der gesamten Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie bildet. Freilich hat man kürzlich begonnen, den Kurvenbegriff im Interesse der Beweise zunächst enger zu fassen. Aber mag eine solche Beschränkung auch zunächst nützlich sein, so ist doch für jeden Satz seine *volle Tragweite* zu ermitteln und zu sichern.

Die naturgemäße Grundlage der vorliegenden Aufgabe kann meines Erachtens nichts anderes sein, als die Analysis situs der aus gewöhnlichen Polygonen zusammengesetzten Gebilde. Dem entsprechen auch die von Herrn Pringsheim*) eingeführten *Treppenwege*, die eine *monotone* Funktion approximieren sollen. Was hier für den einfachsten Fall geschehen ist, kann aber auf *jedes* geometrische Gebilde, — wie beschaffen es auch immer sei — ausgedehnt werden. Diese Tatsache bildet eines der wichtigsten Hilfsmittel der folgenden Untersuchungen.

In dem vorliegenden Beitrag betrachte ich insbesondere die Begriffe der *geschlossenen Kurve*, der *Gebietsgrenze* und *Gebietsteilung*, sowie ihr Verhältnis zu den sie bestimmenden oder durch sie bestimmten *abgeschlossenen* Mengen. Es ist mir nur eine Arbeit des Herrn Phragmèn bekannt, die ein spezielles hierhergehöriges Theorem enthält.**)

Es ist zweckmäßig, die Untersuchung auf *alle* abgeschlossenen Mengen auszudehnen. Andrerseits ist es naturgemäß, daß man nur abgeschlossene Mengen in Rücksicht zieht. Nur sie erfreuen sich einer Art Gesetzmäßigkeit. Eine nicht abgeschlossene Menge hat denselben Charakter, wie eine *willkürliche* Funktion, die man mit Bezug auf eine abgeschlossene Menge definieren kann, für die also wieder die abgeschlossene Menge das Operationsgebiet abgibt.

*) Berichte der Akad. d. Wiss. München, Bd. 25, S. 56 ff.

**) Acta math. 7, S. 43.

§ 1.

Definition und Hilfssätze.

Ich stelle zunächst die zur Anwendung kommenden Definitionen nebst einigen Hilfssätzen kurz zusammen. Diejenigen, die schon im ersten Beitrage enthalten sind, erfahren zugleich eine teilweise Ergänzung.

Ist $\mathfrak{S}$ eine beliebige *abgeschlossene Menge* und bedeutet $\mathfrak{E}$ die Menge *aller* Punkte einer Ebene*), so heißt die durch die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S} + \mathfrak{M}$$

definierte Menge $\mathfrak{M}$ die *Komplementärmenge* von $\mathfrak{S}$.

Als *einfachen Weg* oder kurz als *Weg* bezeichne ich einen sich nirgends kreuzenden *Streckenzug*, der entweder nur aus einer endlichen Zahl von Strecken besteht, oder aber, falls er aus unendlich vielen Strecken besteht, nur *einen* oder höchstens *zwei* Grenzpunkte besitzen soll, nämlich den *Anfangspunkt* resp. den *Endpunkt*. Zwei derartige einander nirgends kreuzende Wege, die denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt besitzen, bilden ein *einfaches Polygon*. Für dieses Polygon gelten die bekannten Sätze der Teilung, Zerlegung und Zusammensetzung. Durch

$$\mathfrak{P},\quad \mathfrak{I}(\mathfrak{P}),\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{P})$$

soll das *Polygon*, sein *Inneres* resp. sein *Äußeres* bezeichnet werden; es ist dann

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{P} + \mathfrak{I}(\mathfrak{P}) + \mathfrak{A}(\mathfrak{P}).$$

Insbesondere erwähne ich noch den folgenden evidenten Satz:

1) Ist $\mathfrak{M}$ die Komplementärmenge einer Menge $\mathfrak{S}$ und sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei einfache, zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörige Polygone, die einen Punkt gemein haben, so lassen sie sich an diesem Punkte so abändern, daß sie zusammen ein einziges einfaches Polygon bilden, das ebenfalls der Menge $\mathfrak{M}$ angehört.

Unter einem *Weg*, der einen Punkt s der Menge $\mathfrak{S}$ mit einem Punkt m von $\mathfrak{M}$ verbindet, wird ein solcher verstanden, dessen Punkte, von s abgesehen, sämtlich zu $\mathfrak{M}$ gehören, und der höchstens in s einen Grenzpunkt besitzt. Von diesen Wegen gelten folgende, leicht beweisbare Sätze:

2) Zwei Wege, die von einem Punkt m zu zwei verschiedenen Punkten s_1 und s_2 von $\mathfrak{S}$ führen, lassen sich so legen, daß sie sich nicht kreuzen.

Sind nämlich l_1 und l_2 die beiden Wege und enthält z. B. l_2 unendlich viele Strecken, so kann l_1 nur eine endliche Zahl dieser Strecken kreuzen, da sonst der Grenzpunkt von l_2 auf l_1 liegen müßte. Dadurch ist der Satz auf Streckenzüge mit endlicher Seitenzahl zurückgeführt.

*) Die Ebene ist die Ebene der Funktionentheorie; dadurch wird erreicht, daß man jede gegebene Menge als im Endlichen liegend annehmen kann.

3) Zwei Wege l' und l'', die denselben Punkt s von $\mathfrak{S}$ mit zwei verschiedenen Punkten m' und m'' verbinden, lassen sich ebenfalls so legen, daß sie sich nicht kreuzen.

Kreuzen sie sich nämlich und ist m_1 der erste Kreuzungspunkt, so tauscht man die Teilwege, die von m' und m'' bis m_1 führen, gegen einander aus. Dies modifiziert die Wege l' und l'' so, daß sie in m_1 einen gemeinsamen Punkt haben, ohne sich aber in ihm zu kreuzen. Gemäß Satz 1) lassen sie sich deshalb durch Wege ersetzen, die in m_1 nicht mehr zusammentreffen. Ebenso kann man mit jedem weiteren Kreuzungspunkt verfahren; auch muß man zu jedem Kreuzungspunkt nach einer endlichen Zahl von Schritten gelangen. Aus dem eben bewiesenen Satze folgt weiter:

4) Zwei Wege, die von demselben Punkt m zu demselben Punkt s führen, lassen sich so legen, daß sie sich nirgends kreuzen, mithin ein einfaches Polygon bestimmen.

Ich erwähne ferner die folgenden einleuchtenden Begriffsbestimmungen:

Ist $\varrho(p, s)$ der *Abstand* eines Punktes p von einem Punkt s einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$, so ist $\varrho(p, s)$ eine in $\mathfrak{S}$ *stetige* Funktion.*) Ihr Minimum heißt *Abstand des Punktes p von* $\mathfrak{S}$ und soll durch $\varrho(p, \mathfrak{S})$ bezeichnet werden. Dieser Abstand ist eine in jedem endlichen Gebietsteil G *stetige* Funktion, er erreicht in G ein Maximum und es gibt mindestens einen in G gelegenen Punkt — der natürlich zur Menge $\mathfrak{M}$ gehört — für den dies Maximum eintritt. Analog kann man den *Abstand* $\varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ zweier abgeschlossener Mengen definieren. Haben die Mengen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ keinen Punkt gemein, so ist $\varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ von Null verschieden; auch gibt es mindestens ein Punktpaar s, s' so daß $\varrho(s, s') = \varrho(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ ist.

Aus der Stetigkeit von $\varrho(p, \mathfrak{S})$ folgt insbesondere, daß es für jede Schar von Parallelen eine *erste* und *letzte* gibt, die Punkte der Menge $\mathfrak{S}$ enthalten oder von $\mathfrak{S}$ einen gegebenen Abstand besitzen. Auf ihr beruht auch die Existenz des zu einem Punkt m gehörigen *punktfreien Bereiches*.

Dieser Bereich, dessen Entstehung ich in meinem ersten Beitrage genauer erörtert habe**), existiert für beliebige abgeschlossene Mengen ebenso, wie für perfekte; er ist ein Rechteck, dessen Inneres zu $\mathfrak{M}$ gehört, während sein Umfang eine endliche oder unendliche, jedenfalls abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{S}$ enthält. Man kann m mit jedem auf dem Umfange des Bereichs liegenden Punkt von $\mathfrak{S}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Weg verbinden, er soll ein von m zu $\mathfrak{S}$ führender Weg heißen. *Einen solchen gibt es also für jeden Punkt m.* Dagegen bemerke ich schon

*) Für die Übertragung des Stetigkeitsbegriffs auf beliebige abgeschlossene Mengen vergl. meinen Bericht S. 115 ff.

**) Diese Annalen, Bd. 58, S. 207. Vergl. auch meinen Bericht, S. 81.

jetzt, daß es nicht immer einen Weg gibt, der von einem Punkt m zu einem *beliebigen* Punkt von $\mathfrak{S}$ führt.

Der eben definierte Bereich läßt folgende Verallgemeinerung zu. Wird $\varepsilon < \varrho(m, \mathfrak{S})$ gewählt, so kann man um m einen rechteckigen Bereich von der Art konstruieren, daß auf jeder seiner Seiten mindestens ein Punkt liegt, der von $\mathfrak{S}$ den Abstand ε hat. Man geht auch hier von einem den Punkt m umgebenden Quadrat aus, läßt es zunächst so lange wachsen, bis mindestens eine Seite einen Punkt der genannten Art enthält, und läßt alsdann die andern Seiten sich weiter von m entfernen, bis für sie der Reihe nach das gleiche zutrifft. Dabei ist zu beachten, daß, wenn der Bereich zugleich innerhalb eines gewissen Polygons $\mathfrak{P}$ bleiben soll, das Wachstum einer Seite auch dadurch ein Ende finden kann, daß die Seite an das Polygon anstößt. Er möge dann der *im Innern von* $\mathfrak{P}$ *liegende Bereich* heißen.

§ 2.

Ergänzende Betrachtungen über den Zusammenhangsbegriff.

In meinem ersten Beitrag habe ich den *Zusammenhang* für *perfekte* Mengen und ihre *Komplementärmengen* gesondert definiert. Ich gebe hierzu einige Ergänzungen; insbesondere ist noch zu zeigen, daß beide Definitionen im Einklang miteinander stehen.

Eine *perfekte* Menge wurde als *zusammenhängend* bezeichnet, wenn sie nicht in Teilmengen zerlegbar ist, deren jede *perfekt* ist. Die Definition könnte dahin abgeändert werden, daß die Teilmengen nicht beide *abgeschlossen* sein sollen, und kann in dieser Weise auch auf abgeschlossene Mengen ausgedehnt werden. Da jedoch für abgeschlossene Mengen, die nicht perfekt sind, der Zusammenhang nicht in Frage kommen kann, so genügt es die Definition auf perfekte Mengen zu beschränken.

Genau genommen, bedarf aber die Definition des Nachweises ihrer Berechtigung. Insbesondere soll ja der Zusammenhang einer beliebigen Menge als Verallgemeinerung desjenigen einfacheren Begriffs erscheinen, der sich auf Polygone bezieht und der hier die Grundlage bildet. Wir beweisen daher den folgenden Satz:

I. *Ist die perfekte Menge* $\mathfrak{T}$ *nicht zusammenhängend, so kann man sie in zwei perfekte Teilmengen zerlegen, von denen die eine innerhalb, die andere außerhalb eines einfachen Polygons mit endlicher Seitenzahl liegt.*

Da die Menge $\mathfrak{T}$ nicht zusammenhängend ist, so läßt sie sich auf eine oder mehrere Arten in perfekte Teilmengen zerlegen. Seien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zwei solche Mengen, daß

$$\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}$$

ist Wir setzen noch

$$\varrho(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \delta; \quad \varrho(m, \mathfrak{T}_1) = \varrho_1, \quad \varrho(m, \mathfrak{T}_2) = \varrho_2,$$

wo m ein beliebiger Punkt der Menge $\mathfrak{M}$ ist, und umgeben die Menge $\mathfrak{T}$ mit einem Quadrat q, so daß auch $\varrho(q, \mathfrak{T}) \geqq \delta$ ist. Endlich sei q' ein innerhalb von q liegendes Quadrat, dessen Seiten von q den Abstand δ haben.

Nun seien t_1 und t_2 zwei solche Punkte von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, daß $\varrho(t_1, t_2) = \delta$ ist. Auf jeder Teilstrecke $t_1' \cdots t_2'$ von $t_1 \cdots t_2$ ist mit ϱ_1 und ϱ_2 auch der Quotient $\varrho_1 : \varrho_2$ eine stetige Funktion des Ortes; auf ihr gibt es daher mindestens einen Punkt von $\mathfrak{M}$, der von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ den gleichen Abstand hat. Sei μ_0 ein solcher, so konstruiere man den zu ihm gehörigen punktfreien Bereich S_0 und zwar so, daß seine Seiten zu q parallel sind. Mögen zunächst weder S_0 noch die weiterhin zu konstruierenden Bereiche an q oder aneinander anstoßen, dann liegt keine ihrer Seiten außerhalb von q'.

Auf dem Umfang von S_0 gibt es nun mindestens je einen Punkt von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, und daher auch mindestens zwei Intervalle, von denen ein Endpunkt zu $\mathfrak{T}_1$ und einer zu $\mathfrak{T}_2$ gehört, während die inneren Punkte zu $\mathfrak{M}$ gehören; sie seien $\sigma_1 = \tau_1 \cdots \tau_2$ und $\sigma_1' = \tau_1' \cdots \tau_2'$*). Jedem von ihnen gehört wieder mindestens je ein Punkt an, für den $\varrho_1 = \varrho_2$ ist; diese Punkte seien μ_1 und μ_1'. Konstruiert man zu ihnen die zugehörigen punktfreien Bereiche S_1 und S_1', die beide an S_0 angrenzen, so bilden sie mit S_0 ein Polygon $\mathfrak{P}_1$, dessen Umfang wiederum Punkte von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ enthält. Auf ihm gibt es daher wieder mindestens zwei Intervalle σ_2 und σ_2', von denen ein Endpunkt zu $\mathfrak{T}_1$ und einer zu $\mathfrak{T}_2$ gehört, und auf jedem mindestens einen Punkt, für den $\varrho_1 = \varrho_2$ ist. Sind μ_2 und μ_2' zwei solche, so konstruiert man zu ihnen die Bereiche S_2 und S_2', die mit $\mathfrak{P}_1$ ein Polygon $\mathfrak{P}_2$ bestimmen, für das die gleichen Schlüsse gelten usw.

Der Flächeninhalt aller so konstruierter Bereiche bleibt oberhalb einer angebbaren Größe. Schlägt man nämlich um einen Punkt μ_i mit dem Radius $\frac{1}{2}\delta$ einen Kreis, so gehört das Innere dieses Kreises zu $\mathfrak{M}$ und liegt dem obigen gemäß auch innerhalb q'. Demnach macht der zu μ_i gehörige Bereich mindestens ein Viertel des in diesen Kreis eingeschriebenen Quadrats aus, und hat also mindestens den Inhalt $\frac{1}{8}\delta^2$. Daher muß unser Konstruktionsverfahren nach einer endlichen Zahl von Schritten zu Ende kommen. Dies ist auf zweierlei Weise möglich. Es kann der letzte Bereich S_i wie der letzte Bereich S_i' an q angrenzen; alsdann bilden alle Bereiche einen das Innere von q durchziehenden Polygonstreifen und jeder diesen Streifen durchziehende Weg l zerlegt q in zwei Teilpolygone, deren

*) Die Intervalle können einen Endpunkt gemein haben.

jedes eine Teilmenge von $\mathfrak{T}$ umschließt, die naturgemäß perfekt ist.*) Die Konstruktion kann aber auch dadurch zum Stillstand kommen, daß der letzte Bereich an einen bereits vorhandenen Bereich angrenzt. Alsdann entsteht ein ringförmiger, polygonaler Bereich.**) Und man kann in ihm ein einfaches Polygon endlicher Seitenzahl so zeichnen, daß innerhalb und außerhalb von ihm eine naturgemäß perfekte Teilmenge von $\mathfrak{T}$ enthalten ist.

Die Komplementärmenge $\mathfrak{M}$ einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$ wurde als *zusammenhängend* definiert, wenn sich je zwei Punkte von $\mathfrak{M}$ durch einen zu $\mathfrak{M}$ gehörigen einfachen Weg verbinden lassen. Um zu zeigen, daß sich diese Definition mit derjenigen für perfekte Mengen in Übereinstimmung befindet, beweise ich folgenden Satz:

Werden zu einer nicht abgeschlossenen, zusammenhängenden Menge die ihr fehlenden Grenzpunkte hinzugefügt, so entsteht eine perfekte, zusammenhängende Menge.

Die Menge $\mathfrak{T}$, die aus $\mathfrak{M}$ durch Hinzufügung der Grenzpunkte entsteht, ist naturgemäß abgeschlossen. Einen isolierten Punkt könnte sie nur enthalten, falls er schon zu $\mathfrak{M}$ gehört hätte; dies ist ebenfalls ausgeschlossen und $\mathfrak{T}$ daher perfekt. Wäre nun $\mathfrak{T}$ nicht zusammenhängend und wären $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ irgend zwei perfekte Teilmengen von $\mathfrak{T}$, so müßte jede von ihnen, wie leicht ersichtlich, auch Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten. Nach Satz I gäbe es überdies ein einfaches Polygon, das nicht zu $\mathfrak{T}$, also auch nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört, und $\mathfrak{T}$ in zwei getrennte Teilmengen zerlegte. Es gäbe daher Punkte von $\mathfrak{M}$, die nicht verbindbar wären, was aber ein Widerspruch ist. Aus diesem Satze kann die Übereinstimmung unserer beiden Definitionen gefolgert werden.

Endlich bemerke ich der Vollständigkeit halber noch folgendes. Ist m ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so gibt es auch eine gewisse *Umgebung* von m, die ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört. Denn sonst müßte m ein Punkt von $\mathfrak{S}$ sein. Mit Rücksicht hierauf soll $\mathfrak{M}$ auch als *Gebiet* bezeichnet werden.

§ 3.

Die approximierenden Polygonfiguren.

Jede abgeschlossene Menge läßt sich in ein von Polygonen begrenztes Gebiet so einschließen, daß der Abstand der bezüglichen Polygone von ihr in gewissen, vorgeschriebenen Grenzen liegt. Diese Tatsache, die für jede beliebig geartete Menge gilt, wie die in sie eingehenden geometrischen Gebilde auch beschaffen sein mögen, bildet eines der hauptsächlichsten

*) Diese Mengen brauchen übrigens nicht mit $\mathfrak{T}_1$ resp. $\mathfrak{T}_2$ identisch zu sein.

**) Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich die Innenfläche dieses Bereiches auf Null reduziert, dies ändert jedoch die weiteren Schlüsse nicht.

Hilfsmittel der weiteren Schlüsse und bedarf daher einer ausführlichen Darlegung, wie einleuchtend sie auch scheinen mag. Doch soll es sich nur darum handeln, auf möglichst einfache Weise die Existenz solcher polygonalen Gebiete nachzuweisen.*)

Die Menge $\mathfrak{S}$ denken wir uns wieder in dem Quadrat q enthalten. Nun sei $\mathfrak{P}$ ein die Menge $\mathfrak{S}$ einschließendes Polygon, dessen Seiten denen von q parallel laufen. Ferner werde ε so bestimmt, daß

$$\varrho(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}) = \delta, \quad \varepsilon < \tfrac{1}{2}\delta$$

ist, so ändern wir das Polygon $\mathfrak{P}$ zunächst in folgender Weise ab. Ist p eine Seite von $\mathfrak{P}$, so verschieben wir sie, während das Polygon zusammenhängend bleibt, parallel mit sich in das *Innere* von $\mathfrak{P}$, bis entweder

$$\varrho(p, \mathfrak{S}) = \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{1}$$

ist, also auf ihr mindestens ein Punkt m liegt, für den dieselbe Gleichung besteht, oder aber, bis sie der Lage nach mit einer andern Polygonseite zusammenfällt. In dem letzteren Falle kann $\mathfrak{P}$ dadurch in zwei getrennte Polygone zerfallen; alsdann hat jedes von ihnen weniger Seiten als $\mathfrak{P}$ selbst. Zerfällt jedoch $\mathfrak{P}$ bei diesem Verfahren nicht, so verliert es mindestens eine Ecke. Wendet man also dieses Verfahren der Reihe nach auf jede Seite von $\mathfrak{P}$ an, so gelangt man nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einem oder mehreren Polygonen, bei denen *alle* Seiten mindestens einen Punkt enthalten, für den die Gleichung (1) gilt. Diese Polygone seien

$$P_1, P_2, \cdots P_l.$$

Ich bemerke, daß *jedes Polygon, das im Laufe des weiteren Verfahrens entsteht, ebenfalls sofort dem vorstehenden Prozeß unterworfen werden soll.*

Enthält das Polygon P_1 auf einer Seite p_1 einen Punkt m, für den

$$\varrho(m, \mathfrak{S}) \geqq \varepsilon \tag{2}$$

ist, so konstruieren wir zu m den *im Innern von P_1 liegenden* in § 1 definierten Bereich S, dessen Seiten der Gleichung (1) genügen. Dabei ist zu beachten, daß die Seiten des Bereiches auch dadurch fest werden können, daß sie, noch ehe sie der Relation (1) genügen, an P_1 anstoßen. Dies setzen wir so lange fort, wie sich auf einem Polygon P_i resp. auf einem aus ihm entstehenden Polygon ein Punkt m dieser Art findet. Dann ist zu zeigen, daß dieser Prozeß nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Abschluß kommt. Dies geschieht wie folgt:

Man schlage um m mit $\frac{1}{4}\varepsilon$ als Radius einen Kreis und ziehe in ihm

*) Polygone dieser Art betrachtet auch Herr C. Jordan beim Beweis seines Kurvensatzes. Vgl. cours d'analyse, 2. Aufl. Bd. 1, S. 92.

die zu den Seiten von q parallelen Durchmesser. Sie zerlegen den Kreis in vier Quadranten. Liegt mindestens einer von ihnen ganz innerhalb P_1, so ergibt sich für die Fläche von S die Relation

$$S > \frac{1}{32}\varepsilon^2. \tag{3}$$

Wird also der Bereich S von P_1 getilgt, so bestimmt er mit P_1 ein neues Polygon, dessen Fläche um mehr als $\frac{1}{32}\varepsilon^2$ kleiner ist, als die Fläche von P_1. Das neue Polygon hat größere Seitenzahl als P_1.

Liegt keiner der vier Kreisquadranten ganz innerhalb P_1, so wird der sich um m dehnende Bereich an P_1 anstoßen, ehe noch für eine seiner Seiten die Relation (1) erfüllt ist. Alsdann zerlegt er P_1 in zwei Polygone. Die so definierten Polygone seien P_{11} und P_{12}, und S' sei der so erhaltene innerhalb P_1 liegende und sie trennende Bereich. Jedes dieser beiden Polygone wird im allgemeinen weniger Seiten haben, als P_1 selbst. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn das eine von ihnen — es sei P_{11} — ein Viereck ist; dann grenzt der Bereich S' so an zwei parallele Seiten p und p' von P_1, daß zwischen ihnen nur noch *eine* weitere Polygonseite von P_1 liegt. Die Breite des zwischen ihnen liegenden Teils von P_1 ist dann gemäß der obigen, die neu entstehenden Polygone betreffenden Festsetzung mindestens gleich $\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$. Ist nämlich $\varrho(p,p') > \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$, so ist dies unmittelbar klar, und ist $\varrho(p,p') < \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$, so folgt es leicht daraus, daß ja der ganze um m mit $\frac{1}{2}\varepsilon$ geschlagene Kreis zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wenn nun das Polygon P_{12} auf p oder p' noch einen weiteren Punkt m besitzt, für den die Gleichung (2) gilt, so verfahren wir mit ihm ebenso. Auch hier ist die Breite des trennenden Teiles mindestens gleich $\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$. Diese Möglichkeit kann daher nur in endlicher Zahl auftreten. Hiermit ist aber die obige Behauptung bewiesen. Denn wenn wir die Konstruktion der Bereiche so lange fortsetzen, wie es auf den Polygonen P_i oder auf denjenigen, die aus ihnen hervorgehen, Punkte m gibt, für die die Gleichung (2) gilt, so müssen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten entweder zu einer Reduktion des Inhaltes der gesamten Polygonflächen um mindestens $\frac{1}{32}\varepsilon^2$ oder aber zu Polygonen geringerer Seitenzahl gelangen. Unser Verfahren liefert daher schließlich eine endliche Reihe von Polygonen endlicher Seitenzahl

$$P_1', P_2', \cdots P_{(n)}'$$

die die folgenden Eigenschaften besitzen. Auf jeder ihrer Seiten liegt mindestens ein Punkt m, der von $\mathfrak{S}$ den Abstand $\frac{1}{2}\varepsilon$ besitzt, und *keine* Seite enthält einen Punkt m, dessen Abstand von $\mathfrak{S}$ *größer* als ε ist.

Im Inneren eines dieser Polygone können aber sehr wohl Punkte m liegen, für die die Relation (2) gilt. Liegt im Inneren von P_1' ein solcher Punkt m, so kann der zu ihm gehörige Bereich S ganz innerhalb von P_1' liegen, er hat dann mindestens die Größe $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ und bestimmt mit P_1' ein ringförmiges Gebiet, dessen Fläche mindestens um $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ kleiner ist, als die Fläche von P_1'. Liegt S nicht ganz innerhalb von P_1', so lassen wir das um m sich dehnende Quadrat resp. den sich bildenden Bereich zunächst wieder nur so lange wachsen, bis er an eine Seite p_1' von P_1' anstößt, und fassen nur den *innerhalb* von P_1' sich weiter dehnenden Teil des Bereiches ins Auge. Er sei S_1; alsdann ist wieder zu unterscheiden, ob er schließlich an noch andere Seiten von P_1' anstößt oder nicht. Es greifen dann die gleichen Schlüsse Platz, wie oben. Im zweiten Fall gilt für S_1 die Relation (3); im ersten Fall kann P_1' in zwei Polygone zerfallen, deren jedes geringere Seitenzahl hat, wie P_1' selbst, oder aber, wenn das eine dieser beiden Polygone die gleiche Seitenzahl hat, wie P_1' selbst, so kann es wieder nur eine endliche Zahl von Punkten m geben, für die dies eintritt. Nach einer endlichen Zahl von Schritten muß man also zu einem Punkt m gelangen, dessen Bereich S entweder größer ist als $\frac{1}{32}\varepsilon^2$, oder der aus P_1' zwei Polygone hervorgehen läßt, deren jedes geringere Seitenzahl hat, wie P_1' selbst.

Wir prüfen nun jedes der neu entstandenen Polygone oder Ringgebiete wiederum darauf, ob auf ihm oder in seinem Inneren Punkte liegen, für die die Relation (2) gilt. Ist m ein solcher, so bleiben auch für ihn die obigen Überlegungen in Kraft. Entweder gehört zu ihm ein Bereich, der eine Reduktion der gesamten Fläche um mehr als $\frac{1}{32}\varepsilon^2$ bewirkt oder wir gelangen nach einer endlichen Zahl von Schritten zu einem Bereich, der ein Polygon in zwei Polygone geringerer Seitenzahl, oder aber ein Ringgebiet in ein Polygon zerlegt, das allerdings eine höhere Seitenzahl besitzen wird, wie das äußere Randpolygon. Aber da *jedesmal*, wenn ein Ringgebiet entsteht, die gesamte Polygonfläche sich um mindestens $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ *vermindert*, so folgt auch hier die Endlichkeit unseres Prozesses. Es entsteht also schließlich ein wohl definiertes Gebiet, das von einem oder mehreren Polygonen endlicher Seitenzahl begrenzt ist und die Eigenschaft besitzt, daß die Menge $\mathfrak{S}$ sowie alle Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{S}$ *kleiner* als $\frac{1}{2}\varepsilon$ ist, *innerhalb* dieses Gebietes liegen, während alle Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{S}$ *größer* als ε ist, *außerhalb* dieses Gebietes liegen. Also folgt:

II. *Für jede abgeschlossene Menge $\mathfrak{S}$ läßt sich eine sie einschließende polygonale Figur Π endlicher Seitenzahl konstruieren, so daß bei vorgegebenem ε die Menge $\mathfrak{S}$, sowie alle Punkte von $\mathfrak{M}$, deren Abstand von $\mathfrak{S}$ kleiner als*

$\frac{1}{2}\varepsilon$ *ist, dem Inneren von* Π *und alle Punkte von* $\mathfrak{M}$, *für die dieser Abstand größer als* ε *ist, dem Äußeren von* Π *angehören.*

Von der so definierten, polygonalen Figur sage ich, daß sie die Menge $\mathfrak{S}$ im *Abstand* ε *approximiert.* Das aus ihrem Innern bestehende *Gebiet*, dessen Zusammenhang sehr mannigfach sein kann, soll Γ heißen. Die einzelnen das Gebiet Γ begrenzenden Polygone nenne ich *Randpolygone.* Unter ihnen gibt es jedenfalls eine endliche Zahl solcher, die nicht innerhalb eines andern Randpolygons liegen. Sie sollen als *äußere Randpolygone* bezeichnet werden.

Aus dem obigen Satze ziehen wir noch eine wichtige Folgerung: Sei T eine zusammenhängende Teilmenge einer beliebigen abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$ und sei

$$\mathfrak{S} = T + \mathfrak{S}_1; \quad \varrho(T, \mathfrak{S}_1) = \delta;$$

wählt man dann $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$, so folgt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{S}_1$ außerhalb des zu T gehörigen Π liegt. Wir nennen daher T einen *isolierten*, zusammenhängenden Bestandteil von $\mathfrak{S}$ und es folgt:

III. *Ist* T *ein isolierter zusammenhängender Bestandteil der abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{S}$, *so kann man eine ihn einschließende approximierende Polygonfigur* Π *endlicher Seitenzahl zeichnen, so daß alle nicht zu* T *gehörigen Punkte von* $\mathfrak{S}$ *außerhalb des von* Π *begrenzten Gebietes liegen.*

Übrigens bemerke ich, daß die Breite des Gebietes Γ, d. h. der Abstand irgend zweier Randpolygone dieses Gebietes keineswegs unterhalb von ε oder einer sonstigen angebbaren Grenze zu liegen braucht. Das gleiche gilt für den Abstand irgend eines Punktes der Menge $\mathfrak{S}$ von Π. Auf ein Beispiel dieser Art komme ich am Schluß von § 5 zurück.

Auf einen weiteren wichtigen Satz führt folgende Betrachtung:

Man denke sich unendlich viele isolierte Mengen:

$$T_1, T_2, \cdots T_\nu, \cdots,$$

deren jede *zusammenhängend* und *nirgends dicht* ist. Ist nun t irgend ein Punkt von T, so hat jede Punktmenge

$$\{t_\nu\} = t_1, t_2, \cdots t_\nu, \cdots$$

mindestens einen Grenzpunkt t_ω, der, wie unmittelbar ersichtlich ist, keiner Menge T_ν angehören kann. Die Gesamtheit dieser Punkte bildet die Menge T_ω, die wir als *Grenzmenge* der Mengen T_ν bezeichnen. Von ihr gilt der folgende Satz:

IV. *Sind* $T_1, T_2, T_3 \cdots$ *unendlich viele isolierte Mengen, deren jede zusammenhängend und nirgends dicht ist, so ist auch ihre Grenzmenge, falls sie nicht etwa aus einem einzigen Punkt besteht, zusammenhängend und nirgends dicht.*

Aus der Definition der Menge T_ω folgt nämlich unmittelbar, daß sie abgeschlossen und nirgends dicht ist. Wenn nun T_ω in getrennte Teilmengen T' und T'' zerfiele, so ließe sich jede von beiden durch eine approximierende Figur Π' und Π'' so einschließen, daß die von ihnen begrenzten Gebiete Γ' und Γ'' *außerhalb* voneinander liegen; falls nämlich $\varrho(T', T'') = \delta$ ist, so genügt es Π' und Π'' so zu wählen, daß sie T' und T'' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ approximieren. Ist nun t' ein solcher Punkt von T', der Grenzpunkt von

$$\{t_\nu'\} = t_1', t_2', \cdots t_\nu', \cdots$$

ist und analog t'' ein Punkt von T'', der Grenzpunkt von

$$\{t_\nu''\} = t_1'', t_2'', \cdots t_\nu'', \cdots$$

ist, so gibt es einen Index μ', so daß alle Punkte $t_{\mu'+\varrho}$ zu Γ' gehören und einen Index μ'', so daß alle Punkte $t_{\mu''+\varrho}$ zu Γ'' gehören. Sei μ die größere beider Zahlen, so folgt, daß von den *zusammenhängenden* Mengen

$$T_\mu, T_{\mu+1}, \cdots T_{\mu+\varrho}, \cdots$$

je ein Punkt *innerhalb* Π' und Π'' liegt; es gibt also auch Punkte dieser Mengen *außerhalb* Π' und Π''. Wählt man nun aus jeder Menge $T_{\mu+\varrho}$ je einen solchen Punkt aus, so liegt auch ihr Grenzpunkt nicht innerhalb Π' oder Π'', während er andrerseits zu T_ω gehört. Dies ist aber ein Widerspruch und daraus ist zu folgern, daß T_ω nicht in getrennte Bestandteile zerfallen kann. Falls also die Menge T_ω nicht etwa aus einem einzelnen Punkt besteht, muß sie zusammenhängend sein.

Einige Beispiele mögen folgen: Zieht man innerhalb eines Winkels parallele, von den Schenkeln begrenzte Strecken, die sich gegen den Scheitel verdichten, so besteht T_ω aus dem Scheitelpunkt. Nimmt man statt des Winkels ein Rechteck und läßt die Strecken sich gegen eine seiner Seiten verdichten, so wird T_ω aus einer Strecke bestehen. Man kann also auch Mengen konstruieren, bei denen T_ω eine endliche Zahl von Punkten und Strecken enthält. Nimmt man auf einer Geraden beliebige gegen einen Punkt sich verdichtende Intervalle δ_i an, errichtet in ihren Endpunkten die Lote und setzt in jeden, über einem Intervall δ_i stehenden von zwei Loten begrenzten Streifen unendlich viele parallele Strecken, die sich gegen einen inneren Punkt von δ_i als einzigen Grenzpunkt verdichten, so hat man eine Menge, bei der T_ω aus unendlich vielen Punkten besteht. Man kann dies auch so abändern, daß die über δ_i stehenden parallelen Strecken die beiden Endpunkte von δ_i als Grenzpunkte haben. Wenn man nun die Intervalle δ_i auf der Geraden so anordnet, daß sie eine perfekte Menge bestimmen, so wird T_ω eine nirgends dichte perfekte lineare Menge sein. Analog läßt sich eine Menge konstruieren, für die T_ω eine abgeschlossene, lineare Menge allgemeinster Art ist und es ist klar, daß man statt der

Geraden auch ein beliebiges Kurvenstück als Träger von T_ω verwenden kann. Eine Menge T_ω von noch allgemeinerer Struktur werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

§ 4.

Die Verallgemeinerung des Cantorschen Haupttheorems.

Wir betrachten zunächst eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{T}$, die keinerlei isolierte Bestandteile enthält, weder Punkte noch zusammenhängende Mengen, und demnach *perfekt* ist. Wir nehmen überdies an, sie sei auch selber *nicht* zusammenhängend, und lasse sich deshalb in zwei Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ zerlegen. Keine von ihnen kann zusammenhängend sein, denn sonst enthielte ja $\mathfrak{T}$ einen isolierten, zusammenhängenden Bestandteil. Es läßt sich deshalb auch jede der beiden Mengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ in zwei Bestandteile zerlegen, deren keiner zusammenhängend ist. Diese Bestandteile seien $\mathfrak{T}_{11}$, $\mathfrak{T}_{12}$, $\mathfrak{T}_{21}$, $\mathfrak{T}_{22}$. Von ihnen gilt das gleiche, wir gelangen also hier zu einem Zerlegungsprozeß, der niemals aufhören kann. Dies gilt auch bezüglich jeder der Teilmengen $\mathfrak{T}_i$, $\mathfrak{T}_{ik}$, $\cdots$ also folgt:

V. *Wenn eine ebene perfekte Menge nicht zusammenhängend ist und auch keine isolierten, zusammenhängenden Bestandteile enthält, so läßt sie sich auf vielfache Art in beliebig viele perfekte Mengen zerlegen, die immer wieder die gleiche Struktur besitzen, wie sie selbst.*

Ein einfaches Beispiel einer solchen Menge bilden die Lote, die man auf einer Geraden in den Endpunkten einer nirgends dichten, perfekten Menge errichtet.

Übrigens schließt der obige Satz nicht aus, daß die Menge $\mathfrak{T}$ geschlossene Kurven enthält. Ein einfaches Beispiel erhält man folgendermaßen: Auf dem Radius eines Kreises k verteile man Intervalle so, daß sie eine perfekte, nirgends dichte Menge bestimmen, und lege durch die Endpunkte jedes Intervalles Kreisbögen, die mit dem Kreis k konzentrisch sind und deren Länge bei der Annäherung an die Peripherie von k gegen den ganzen Kreisbogen konvergiert, bei der Annäherung gegen den Mittelpunkt aber gegen Null. Das gleiche kann man auch auf der Verlängerung des Radius außerhalb von k vornehmen. Man kann sogar auch Mengen dieser Art konstruieren, bei denen die in ihnen vorhandenen, geschlossenen Kurven in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Man kann von mehreren oder auch unendlich vielen Kreisen ausgehen, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen, und in ihnen die gleichen Konstruktionen vornehmen. Oder aber man kann die vorige Verteilung für eine unbegrenzte Reihe konzentrischer Kreise wiederholen und dann die Figur gegen einen oder beliebig viele dieser Kreise spiegeln. Wir kommen bei der Unter-

suchung der durch eine abgeschlossene Menge bewirkten Gebietsteilung hierauf noch einmal zurück. (§ 7.)

Sei nunmehr $\mathfrak{S}$ eine abgeschlossene ebene Menge, die isolierte Bestandteile enthält. Enthält sie auch isolierte Punkte, so sei J die von ihnen gebildete Menge. Enthält sie isolierte, zusammenhängende Bestandteile, so seien dies

$$T,\ T',\ T'',\ \ \cdot\cdot T^{(\nu)}\cdots,$$

die zusammen die Menge $\mathfrak{T} = \{T^{(\nu)}\}$ ausmachen; dann setzen wir

$$\mathfrak{S} = J + \mathfrak{T} + \mathfrak{S}_1 = J + \sum \mathfrak{T}_\nu^{(\nu)} + \mathfrak{S}_1.$$

Die Menge $\mathfrak{S}_1$ wird nur existieren, wenn es unendlich viele isolierte Punkte oder Mengen $T^{(\nu)}$ gibt, dann aber auch notwendig; sie enthält jedenfalls den Grenzpunkt von J resp. die Grenzmenge $T^{(\omega)}$ aller Mengen $T^{(\nu)}$ als Bestandteil. Sie braucht aber nicht ausschließlich aus der Menge $T^{(\omega)}$ zu bestehen, vielmehr wird sie im allgemeinsten Fall den Typus einer beliebigen abgeschlossenen Menge besitzen. Daß sie abgeschlossen ist, folgt unmittelbar aus ihrer Definition; daß sie auch einzelne Punkte enthalten kann, lassen die oben in § 3 angeführten Beispiele erkennen. In diesen Beispielen ist übrigens $\mathfrak{S}_1$ mit $T^{(\omega)}$ identisch. Fügt man jedoch bei diesen Beispielen der Menge $\mathfrak{S}$ die Gerade, auf der die Intervalle δ_i liegen, ganz oder teilweise hinzu, so hat man Mengen $\mathfrak{S}$, bei denen $\mathfrak{S}_1$ nicht mit $T^{(\omega)}$ identisch ist. Endlich ist zu bemerken, daß wenn $T^{(\omega)}$ zusammenhängend ist, oder einen zusammenhängenden isolierten Bestandteil besitzt, es in $\mathfrak{S}_1$ keinen isolierten Bestandteil zu geben braucht, dem $T^{(\omega)}$ angehört. Ein solches Beispiel erhält man, wenn man für $\mathfrak{S}_1$ die Lote wählt, die man in den Punkten einer nirgends dichten linearen Menge errichtet, und für $T^{(\nu)}$ Strecken, die sich gegen eines dieser Lote verdichten.

Man unterwirft jetzt die Menge $\mathfrak{S}_1$ der gleichen Behandlung, die wir eben auf $\mathfrak{S}$ angewendet haben. Besitzt sie einen isolierten Punkt oder einen isolierten, zusammenhängenden Bestandteil, so spaltet man alle diese Bestandteile von ihr ab und erhält eine Gleichung

$$\mathfrak{S}_1 = J_1 + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{S}_2 = J_1 + \sum \mathfrak{T}_1^{(\nu)} + \mathfrak{S}_2, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{S}_2$ nur existiert, falls die Punkte von J_1 resp. die Mengen von $\mathfrak{T}_1$ in unendlicher Anzahl vorhanden sind, dann aber auch notwendig. Auch $\mathfrak{S}_2$ ist eine abgeschlossene Menge, auch sie kann wieder isolierte Punkte oder isolierte zusammenhängende Bestandteile besitzen. Dann zerlegt man sie ebenso und kann diesen Prozeß immer weiter fortsetzen; für jedes $\mathfrak{S}_\mu$ findet sich eine Gleichung

$$\mathfrak{S}_\mu = J_\mu + \mathfrak{T}_\mu + \mathfrak{S}_{\mu+1} = J_\mu + \sum T_\mu^{(\nu)} + \mathfrak{S}_{\mu+1}. \tag{3}$$

Mengen dieser Art erhält man, wenn man in den oben erwähnten Bei-

spielen jede isolierte Strecke durch unendlich viele ersetzt, die sich gegen sie verdichten, und dies wiederholt ausführt.

Der vorstehende Abspaltungsprozeß kann bis zu transfiniten Ordnungszahlen fortgesetzt werden. Naturgemäß kommt dies nur dann in Frage, wenn für jedes μ die Menge $\mathfrak{T}_\mu$ unendlich viele Bestandteile enthält. Es gibt aber eine bestimmte transfinite Ordnungszahl, für die er sein Ende erreicht. Diese Tatsache bildet das genaue Analogon des Cantorschen Hauptheorems, das sie als speziellen Fall unter sich enthält, und kann folgendermaßen bewiesen werden.

Aus den Mengen

$$\mathfrak{T},\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \cdots\ \mathfrak{T}_\mu$$

denke man sich *je einen* Bestandteil *beliebig* herausgegriffen und bezeichne ihn durch

$$T,\ T_1,\ T_2,\ \cdots\ T_\mu.$$

Wie wir oben sahen, gehört kein Punkt der Menge $\mathfrak{S}_1$ einer der Mengen $T^{(\nu)}$ an. Die beiden Mengen T und $\mathfrak{S}_1$ haben daher einen von Null verschiedenen Abstand und wir setzen $\varrho(T, \mathfrak{S}_1) = \delta$. Da $T_1,\ T_2, \cdots T_\mu$ sämtlich Bestandteile von $\mathfrak{S}_1$ sind, so ist dann auch für *jedes* $\lambda \geqq 1$

$$\varrho(T, T_\lambda) \geqq \delta. \tag{4}$$

Ebenso folgt, daß kein Punkt von T_1 der Menge $\mathfrak{S}_2$ angehört: wird $\varrho(T_1, \mathfrak{S}_2) = \delta_1$ gesetzt, so ist für $\lambda \geqq 2$

$$\varrho(T_1,\ T_\lambda) \geqq \delta_1. \tag{5}$$

So kann man fortfahren; setzt man $\varrho(T_{\mu-1}, \mathfrak{S}_\mu) = \delta_\mu$, so ist auch

$$\varrho(T_{\mu-1}, T_\mu) \geqq \delta_\mu; \tag{6}$$

man hat also auch

$$\varrho(T, T_\mu) \geqq \delta,\quad \varrho(T_1, T_\mu) \geqq \delta_1, \cdots \varrho(T_{\mu-1}, T_\mu) \geqq \delta_\mu. \tag{7}$$

Nun sei δ' die *kleinere* der beiden Größen δ und δ_1, ebenso δ'' die *kleinste* der drei Größen $\delta,\ \delta_1,\ \delta_2$ und schließlich $\delta^{(\mu)}$ die kleinste sämtlicher $\delta,\ \delta_1, \cdots \delta_\mu$. Bestimmt man dann $\varepsilon,\ \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\mu$ so, daß

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\delta,\quad \varepsilon_1 < \frac{1}{2}\delta',\ \cdots\ \varepsilon_\mu < \frac{1}{2}\delta^{(\mu)}$$

ist und schließt jede Menge T_λ mit der sie im Abstand ε_λ approximierenden Figur Π_λ ein, so folgt aus der Definitionseigenschaft dieser Figuren, daß je zwei der von den Π_λ eingeschlossenen Gebiete

$$\Gamma,\ \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \cdots \Gamma_\mu,\ \cdots$$

außerhalb voneinander liegen.

Diese Eigenschaft läßt sich von μ auf $\mu + 1$ unmittelbar übertragen. Ist nämlich wieder $T_{\mu+1}$ irgend eine Menge von $\mathfrak{S}_{\mu+1}$ und ist

$$\varrho(T_\mu, \mathfrak{S}_{\mu+1}) = \delta_{\mu+1},$$

so ist sicher auch

$$\varrho(T_\mu, T_{\mu+1}) \geqq \delta_{\mu+1}$$

man hat also auch

$$\varrho(T, T_{\mu+1}) \geqq \delta, \quad \varrho(T_1, T_{\mu+1}) \geqq \delta_1, \cdots \varrho(T_\mu, T_{\mu+1}) \geqq \delta_{\mu+1},$$

und wenn man mit $\delta^{(\mu+1)}$ die *kleinste* aller Größen δ, $\delta_1, \cdots \delta_{\mu+1}$ bezeichnet und $\varepsilon_{\mu+1} < \frac{1}{2}\delta^{(\mu+1)}$ wählt, so wird die Figur $\Pi_{\mu+1}$, die $T_{\mu+1}$ im Abstand $\varepsilon_{\mu+1}$ approximiert, die Eigenschaft haben, daß ihr Inneres außerhalb aller der Gebiete $\Gamma, \Gamma_1, \cdots \Gamma_\mu$ liegt.

Diese Eigenschaft läßt sich aber auch von $\{\mu\}$ auf ω übertragen.*) Wenn nämlich auch die Menge $\mathfrak{T}_\omega$ unendlich viele isolierte zusammenhängende Bestandteile enthält, so hat man die Gleichung

$$(8) \qquad \mathfrak{S}_\omega = \mathfrak{J}_\omega + \sum T_\omega^{(\nu)} + \mathfrak{S}_{\omega+1} = \mathfrak{J}_\omega + \mathfrak{T}_\omega + \mathfrak{S}_{\omega+1}.$$

Ist nun T_ω die Grenzmenge aller Mengen

$$T, T_1, T_2, \cdots T_\mu, \cdots$$

so wird T_ω nur zu *einem* Summanden von $\mathfrak{T}_\omega$ gehören. Sei T_ω' ein solcher Bestandteil von $\mathfrak{T}_\omega = \sum T_\omega^{(\nu)}$, dem kein Punkt von T_ω angehört, und sei

$$\varrho(T_\omega, T_\omega') = \delta_0.$$

Da T_ω' auch Bestandteil der Menge $\mathfrak{S}_1$ ist, so gilt die Gleichung (4) auch, wenn wir T_λ durch T_ω' ersetzen; das gleiche gilt für die Gleichung (5) usw. Es hat also T_ω' von jedem T_ν einen von Null verschiedenen Abstand.

Seien die Abstände

$$(9) \qquad \varrho(T, T_\omega') = \delta', \quad \varrho(T_1, T_\omega') = \delta_1', \cdots \varrho(T_\mu, T_\omega') = \delta_\mu', \cdots$$

so kann die untere Grenze aller δ_μ' nicht Null sein. Wählt man nämlich in den Mengen T_μ Punkte

$$t, t_1, t_2, \cdots t_\mu, \cdots$$

so, daß für sie

$$\varrho(t, T_\omega') = \delta', \quad \varrho(t_1, T_\omega') = \delta_1', \cdots \varrho(t_\mu, T_\omega') = \delta_\mu', \cdots$$

ist, so müßte sonst der Abstand ihres Häufungspunktes t_ω von T_ω' kleiner als jede beliebige Größe sein, der Punkt t_ω müßte also T_ω' angehören. Dies ist aber ausgeschlossen, da t_ω zu T_ω gehört.

Sei nun δ_0' die untere Grenze aller δ_μ', so kann man, wenn man jetzt die obigen Größen ε_μ noch der Beschränkung unterwirft sämtlich kleiner als $\frac{1}{2}\delta_0'$ zu sein, um T_ω' eine approximierende Figur Π_ω' im Abstand $\varepsilon_0' < \frac{1}{2}\delta_0'$, so zeichnen, daß alle Gebiete

$$\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_\mu, \cdots \Gamma_\omega$$

außerhalb voneinander liegen. Der Schluß, daß man jede neue Figur Π so zeichnen kann, daß das zugehörige Gebiet Γ außerhalb aller bereits

*) Vgl. hierzu meinen Bericht, S. 45 ff.

vorhandenen Gebiete liegt, gilt also nicht allein beim Fortgang von μ zu $\mu + 1$, sondern auch beim Fortgang von $\{\mu\}$ zu ω. Er ist daher auf jede transfinite Zahl ausdehnbar*). Da nun aber gemäß einem Cantorschen Satz die Zahl der voneinander verschiedenen und außerhalb voneinander liegenden Gebietsteile endlich oder abzählbar ist, so muß unser Verfahren nach einer endlichen oder abzählbaren Menge von Schritten sein Ende erreichen. Damit ist die Behauptung erwiesen, also folgt:

VI. *Jede abgeschlossene Menge läßt sich durch wiederholte Abspaltung isolierter Punkte oder isolierter, zusammenhängender Mengen so reduzieren, daß zuletzt eine perfekte Menge übrig bleibt, die keine isolierten Bestandteile mehr enthält, und zwar gibt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, für die dieser Reduktionsprozeß sein Ende erreicht.*

Man hat also die Gleichung

$$\mathfrak{S} = \sum_{\nu=0,1,2,\cdots,\omega,\cdots} J_\nu + \sum_{\nu=0,1,2,\cdots,\omega,\cdots} \mathfrak{T}_\nu + \mathfrak{T}_\alpha,$$

wofür ich im Anschluß an die Cantorsche Schreibweise noch setze

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R} + \mathfrak{T}_\alpha,$$

wo $\mathfrak{R}$ abzählbar ist und $\mathfrak{T}_\alpha$ keine isolierten Bestandteile mehr enthält; die Menge $\mathfrak{T}_\alpha$ ist daher entweder zusammenhängend oder sie hat den im Satze V ausgesprochenen Typus. Auch hier ist klar, daß die Menge $\mathfrak{T}_\alpha$ nicht bloß aus Grenzpunkten solcher Punkte zu bestehen braucht, die der Menge $\mathfrak{R}$ angehören.

Übrigens liefert die obige Darlegung auch einen neuen einfachen Beweis des Cantorschen Theorems selbst.

§ 5.

Die geschlossene Kurve.

Die weitere Analyse der Struktur und der Eigenschaften der perfekten Mengen beruht auf einigen Begriffen und Sätzen, die ich im folgenden zusammenstelle.

Ist s ein Punkt einer nirgends dichten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{S}$, so liegen in jeder Nähe von s Punkte der Komplementärmenge $\mathfrak{M}$. Der Punkt s heißt daher ein *Grenzpunkt* des *Gebietes* $\mathfrak{M}$. Umgekehrt besteht aber auch der Satz:

Die gesamte Grenze eines Gebietes $\mathfrak{M}$ ist eine abgeschlossene nirgends dichte Menge $\mathfrak{S}$.

In der Tat folgt aus der Definition der Grenzpunkte sofort, daß die Menge $\mathfrak{S}$ nirgends dicht und abgeschlossen ist. Man bezeichnet $\mathfrak{S}$ in

*) Vergl. Cantor: Diese Annalen Bd. 21 S. 576, sowie meinen Bericht über Mengenlehre, S. 45 ff.

dieser Hinsicht als *Gebietsgrenze* und nennt die Punkte von $\mathfrak{M}$ selbst *innere* Punkte des Gebietes $\mathfrak{M}$. Übrigens erfordert der Satz und die Definition nicht, daß $\mathfrak{M}$ ein zusammenhängendes Gebiet ist.

Nehmen wir nun insbesondere an, daß $\mathfrak{M}$ ein zusammenhängendes Gebiet ist, so besteht der Satz:

Ist $\mathfrak{M}$ ein zusammenhängendes Gebiet, ist $\mathfrak{S}$ seine volle Grenze und besteht die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M} + \mathfrak{S} + \mathfrak{M}_1,$$

so bleibt das Gebiet $\mathfrak{M}$ zusammenhängend, wenn man ihm diejenigen Punkte von $\mathfrak{S}$ hinzufügt, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{M}$, aber nicht von $\mathfrak{M}_1$ sind.

Seien $\mathfrak{S}'$ diejenigen Punkte von $\mathfrak{S}$, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{M}$ und nicht von $\mathfrak{M}_1$ sind, so ist zu zeigen, daß

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + \mathfrak{S}$$

eine zusammenhängende Menge ist. Dazu betrachte man einen Punkt s' von $\mathfrak{S}'$, so gibt es um s' einen Kreis, der ganz dem Gebiet $\mathfrak{M}'$ angehört; es sind also je zwei Punkte dieses Kreises miteinander verbindbar. Andrerseits liegen im Inneren dieses Kreises Punkte von $\mathfrak{M}$, und da diese mit einem beliebigen Punkte m von $\mathfrak{M}$ verbindbar sind, so folgt dies auch für den Punkt s'. Dies gilt für jeden Punkt s' von $\mathfrak{S}'$, also ist $\mathfrak{M}'$ eine zusammenhängende Menge.

Wir beweisen nunmehr den nachstehenden, für die weiteren Schlüsse grundlegenden Satz:

VII. *Zerfällt das Innere eines Polygons in zwei getrennte Gebiete $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$, deren jedes zusammenhängend ist, so gibt es Punkte, die sowohl zur Grenze von $\mathfrak{A}$, wie zur Grenze von $\mathfrak{I}$ gehören, und diese bilden eine nirgends dichte perfekte zusammenhängende Menge T.*

Zunächst zeigen wir die Existenz der Menge T. Sei $\mathfrak{P}$ das Polygon, sei ferner $\mathfrak{S}_a$ die volle Grenze von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}_i$ die volle Grenze von $\mathfrak{I}$. Wenn nun $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ keine gemeinsamen Punkte hätten, so sei

$$\varrho(\mathfrak{S}_a, \mathfrak{P}) = \delta_a, \quad \varrho(\mathfrak{S}_i, \mathfrak{P}) = \delta_i, \quad \varrho(\mathfrak{S}_a, \mathfrak{S}_i) = \delta,$$

und sei δ_0 die kleinste der drei Größen δ, δ_i, δ_a. Konstruiert man dann im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta_0$ die zu $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ gehörigen Polygonfiguren Π_a und Π_i, so liegen sie innerhalb $\mathfrak{P}$ und es müßte unter allen ihnen angehörigen Randpolygonen mindestens je eines geben, so daß zwei Punkte dieser Polygone durch einen Weg l verbindbar sind, der nur zu $\mathfrak{I}$ resp. $\mathfrak{A}$ gehört. Seien P_i und P_a diese Polygone. Von einem Punkt $\mathfrak{m}_i$ von P_i gäbe es alsdann einen Weg zu $\mathfrak{S}_i$ und von einem Punkt $\mathfrak{m}_a$ von P_a einen Weg zu $\mathfrak{S}_a$, und diese Wege bilden mit l zusammen einen Weg, der Punkte von $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ enthalten würde, was unmöglich ist. Damit ist die Existenz der Menge T nachgewiesen.

Aus ihrer Definition folgt nunmehr leicht, daß sie nirgends dicht

und abgeschlossen ist. Sie kann aber auch keinen isolierten Punkt enthalten, denn in dessen Umgebung würden Punkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ liegen, die verbindbar wären. Endlich muß T auch zusammenhängend sein. Zerfiele nämlich T in zwei Teilungen T_1 und T_2, so konstruieren wir wieder die innerhalb $\mathfrak{P}$ gelegenen approximierenden Figuren Π_1 und Π_2. Unter ihren Randpolygonen gäbe es mindestens eins, es sei P, so daß innen und außen von ihm Punkte von T lägen, während es selbst nicht zu T gehört. Da nun jeder Punkt von T Grenzpunkt von $\mathfrak{A}$, wie von $\mathfrak{J}$ ist, so lägen innerhalb und außerhalb des Polygons Punkte von $\mathfrak{A}$, wie von $\mathfrak{J}$. Nun sind je zwei Punkte von $\mathfrak{A}$ durch einen zu $\mathfrak{A}$ gehörigen Weg verbindbar; dies gilt daher auch für einen innerhalb und einen außerhalb von P gelegenen Punkt von $\mathfrak{A}$ und da diese Wege P kreuzen, so muß P zu $\mathfrak{A}$ gehören. Ebenso könnte man folgern, daß P zu $\mathfrak{J}$ gehört, was nicht möglich ist.

Eine jede, den Bedingungen des vorstehenden Satzes genügende Menge soll geschlossene Kurve heißen. Durch

$$C, \quad \mathfrak{J}(C), \quad \mathfrak{A}(C)$$

soll die *Kurve*, ihr *Inneres* und *Äußeres* bezeichnet werden. Ferner soll jede zusammenhängende Teilmenge von C ein *zusammenhängender Kurvenbogen* oder kurz ein *Kurvenbogen* heißen.

Zur Kurve C konstruieren wir jetzt gewisse approximierende Polygone, und zwar in folgender Weise: Sei m_0 derjenige Punkt von $\mathfrak{J}(C)$, dessen Abstand ϱ_0 von C ein Maximum ist, und sei $\varepsilon < \frac{1}{2}\varrho_0$, so konstruieren wir die die Kurve C im Abstand ε approximierende Polygonfigur Π. Diese kann noch sehr vielgestaltet sein. Es gibt aber ein wohl definiertes einfaches Polygon P, das Bestandteil von Π ist und den Punkt m_0 einschließt. Innerhalb dieses Polygons liegen alle diejenigen Punkte m von $\mathfrak{J}(C)$, die mit m_0 durch Wege l verbindbar sind, so daß für jeden Punkt von l

$$\varrho(l, C) > \varepsilon$$

ist. Man kann daher ε so wählen, daß jeder beliebige Punkt m' innerhalb des zugehörigen Polygons P fällt. Ist nämlich l' der von m_0 nach m' führende Weg und ist

$$\varrho(l', C) = \varrho',$$

so hat man $\varepsilon < \frac{1}{2}\varrho'$ zu wählen. Denkt man sich also eine gegen Null konvergierende Reihe von Größen

$$\varepsilon > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots,$$

so werden die zugehörenden einfachen Polygone

$$P, P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots$$

immer größere Teile von $\mathfrak{I}(C)$ *einschließen* und für $\lim \nu = \infty$ hat man

$$\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{I}(P_\nu) = \mathfrak{I}(C).$$

Diese Polygone nenne ich approximierende *innere* Polygone. Ebenso kann man eine Reihe von einfachen Polygonen

$$Q, Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu, \cdots$$

bestimmen, die immer größere Teile von $\mathfrak{A}(C)$ *ausschließen* und zwar so, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \mathfrak{A}(Q_\nu) = \mathfrak{A}(C)$$

ist; sie sollen approximierende *äußere* Polygone heißen.

Die Reihe dieser Polygone hat überdies die Eigenschaft, daß

$$C = \lim_{\nu=\infty} P_\nu = \lim_{\nu=\infty} Q_\nu$$

ist. In der Tat folgt unmittelbar, daß wenn man auf den Polygonen P_ν Punkte

$$p_1, p_2, p_3, \cdots, p_\nu, \cdots$$

beliebig annimmt, *jeder* zu ihnen gehörige Grenzpunkt zu C gehört. Andrerseits ist jeder Punkt c von C Grenzpunkt einer gewissen Reihe von Punkten

$$i_1, i_2, i_3, \cdots, i_\nu, \cdots,$$

die zu $\mathfrak{I}$ gehören und nur ihn als Grenzpunkt besitzen. Diese Punkte bestimmen gewisse Polygone

$$P', P'', P''', \cdots, P^{(\nu)}, \cdots$$

so daß P' das erste Polygon ist, zu dessen Innerem i_1 gehört, P'' das erste, zu dessen Innerem i_2 gehört usw. Ist dann p' derjenige Punkt des Polygons P', der am nächsten zu i_1 liegt, p'' der analoge Punkt von P'' usw., so werden auch die Punkte

$$p', p'', \cdots, p^{(\nu)}, \cdots$$

den Punkt c zum Grenzpunkt haben. Wir sagen noch, daß die Kurve C die beiden Gebiete $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}$ voneinander trennt. Also folgt:

VIII. *Zu jeder geschlossenen Kurve gibt es eine Reihe innerer und äußerer approximierender, einfacher Polygone von der Art, daß die Polygone gegen die Kurve, und das Innere resp. Äußere dieser Polygone gegen das Innere resp. Äußere der Kurve konvergieren.*

Über die Breite des zwischen P_ν und Q_ν liegenden Gebietes kann auch hier nichts ausgesagt werden. Sie kann für *jedes* ν ganz oder teilweise oberhalb einer festen endlichen Größe bleiben. Schon die Kurve $y = \sin \frac{1}{x}$ liefert ein Beispiel, bei dem die Ringbreite für *jedes* ν stellenweise größer als 2 bleibt. Ein vorzügliches Beispiel liefert aber die kürzlich von Herrn Osgood*) beschriebene Kurve, die einen meßbaren

*) Transactions of the Amer. Math. Soc. Bd. 4, S. 107 (1903).

Flächeninhalt nicht umschließt. Der Umstand, daß dieser nicht meßbar ist, beruht gerade darauf, daß die Breite des sie einschließenden polygonalen Ringgebietes nirgends unter eine gewisse von Null verschiedene Größe sinkt, wie klein man auch ε_ν wählen mag.

§ 6.

Die Zerlegungs- und Zusammensetzungssätze für geschlossene Kurven.

Es handelt sich jetzt darum, für die geschlossenen Kurven und die durch sie begrenzten Gebiete die Sätze abzuleiten, die denen über Zerlegung und Zusammensetzung der Polygone entsprechen. Naturgemäß beschränken wir uns auf die einfachsten Fälle, da durch deren wiederholte Anwendung die andern sich ergeben. Zu diesem Zweck genügt es, zwei geschlossene Kurven C und C' zu betrachten und alle möglichen Lagen zu erörtern, die sie zueinander haben können.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir zunächst auch den Fall, daß C und C' keinen Punkt gemein haben, alsdann sei δ ihr Abstand. Konstruiert man nun die Polygone P, Q, P', Q', die C und C' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ von außen und innen approximieren, so haben keine zwei von ihnen einen Punkt gemein. Sind daher Γ und Γ' die von ihnen begrenzten Gebiete, so liegen sie entweder außerhalb voneinander, oder das eine liegt innerhalb des andern. Im ersten Fall liegen auch die Gebiete $\mathfrak{I}(C)$ und $\mathfrak{I}(C')$ außerhalb voneinander, im zweiten ist das eine ein Teilgebiet des andern, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Im ersten Fall hat man noch

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{I}(C) + \mathfrak{I}(C') + \mathfrak{A}'',$$

wo $\mathfrak{A}''$ zweifach zusammenhängend ist. Als Querschnitt, der $\mathfrak{A}''$ einfach zusammenhängend macht, kann man den Verbindungsweg zweier Punkte m und m' nehmen, die beliebig auf Q resp. Q' liegen, sowie die von ihnen zu C resp. C' führenden Wege. Im zweiten Fall hat man analog, falls C' innerhalb von C liegt,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{I}(C') + \mathfrak{A}(C) = \mathfrak{I}'',$$

wo $\mathfrak{I}''$ wieder zweifach zusammenhängend ist.

Wenn C und C' gemeinsame Punkte besitzen, so wollen wir zunächst annehmen, daß *kein* Punkt von C' *außerhalb* von C liegt. Dann kann auch *kein innerer* Punkt von C' *äußerer* Punkt von C sein. Ist nämlich a ein Punkt von $\mathfrak{A}(C)$, und Q ein die Kurve C approximierendes äußeres Polygon, das a ausschließt, so liegt C' innerhalb von Q und falls $\varrho(Q, C') = \eta$ ist, wird auch das Polygon Q', das C' im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\eta$

von außen approximiert, innerhalb von Q liegen. Es kann daher kein Punkt von $\mathfrak{I}(C')$ außerhalb Q liegen, und da Q ein beliebiges Polygon war, so ist damit die Behauptung bewiesen, es ist also *jeder innere* Punkt von C' auch *innerer* Punkt von C und damit *jeder äußere* Punkt von C zugleich *äußerer* Punkt von C'. Dann sind die beiden Gebiete

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}(C') \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(C)$$

immer noch zusammenhängende Gebiete. Sind nämlich i und i_1 zwei innere Punkte von C' und ist l' ein sie verbindender Weg, der also aus inneren Punkten von C' besteht, so ist ja jeder dieser Punkte innerer Punkt für C und C' zugleich, woraus die Behauptung für $\mathfrak{I}'$ folgt. Ebenso folgt sie für $\mathfrak{A}(C)$.

Ist nun *jeder äußere* Punkt von C' auch äußerer Punkt von C, so sind C und C' identisch. Wenn also C und C' verschieden sind, so muß es äußere Punkte von C' geben, die innere Punkte von C sind. Sie mögen die Menge $\mathfrak{I}''$ bilden. Seien i'' und i_1'' zwei von ihnen, seien die Abstände

$$\varrho(i'', C) = \delta, \quad \varrho(i'', C') = \delta', \quad \varrho(i_1'', C) = \delta_1, \quad \varrho(i_1'', C') = \delta_1'$$

und sei δ_0 die kleinste dieser vier Größen; konstruiert man dann das Polygon P, das C von innen im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta_0$ approximiert, und das Polygon Q', das C' in gleichem Abstand von außen approximiert, so wird i'' und i_1'' sowohl innerhalb P, wie außerhalb Q' liegen. Man sieht nun zunächst, daß sich die Polygone P und Q' durchdringen. Denn sonst läge notwendig Q' innerhalb P, also auch C' innerhalb C, was nicht der Fall ist.

Die sich durchdringenden Polygone teilen die Ebene in eine endliche Zahl von Gebieten. Deren gibt es vier Arten, die wir in leichtverständlicher Bezeichnung

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'), \quad (\mathfrak{A}\mathfrak{I}'), \quad (\mathfrak{I}\mathfrak{A}'), \quad (\mathfrak{I}\mathfrak{I}')$$

nennen wollen. Dabei enthält $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$ alle diejenigen Gebietsteile, deren Punkte sowohl zu $\mathfrak{A}(P)$ wie zu $\mathfrak{A}(Q')$ gehören usw. Insbesondere gehören die Punkte i'' und i_1'' beide zu $(\mathfrak{I}\mathfrak{A}')$, während jeder Punkt, den C und C' gemein haben, dem Gebiet $(\mathfrak{A}\mathfrak{I}')$ angehört.

Es ist leicht zu zeigen, *daß die Zahl der Teilgebiete in die* $(\mathfrak{I}\mathfrak{A}')$ *zerfällt, gleich der Zahl derer ist, in die* $(\mathfrak{A}\mathfrak{I}')$ *zerfällt.**) Wir bezeichnen noch die Gesamtheit der ersteren durch J und die Gesamtheit der letzteren durch G. In J sind i'' und i_1'' enthalten, in G jeder zu C und C' gehörige Punkt. Wir bezeichnen ferner durch $\mathfrak{P}_g$ den gesamten

*) Ebenso ist die Zahl der Gebiete $(\mathfrak{I}\mathfrak{I}')$ gleich der von $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')$.

Umfang von G und durch $\mathfrak{P}_i$ den gesamten Umfang von J. Jeder dieser Umfänge gehört teilweise zu P und teilweise zu Q'. Ist π ein Schnittpunkt von P und Q', so können wir setzen

$$(1) \qquad P = \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{p}_g + \Sigma\mathfrak{p}_i, \qquad Q' = \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{q}_g' + \Sigma\mathfrak{q}_i',$$
$$\mathfrak{P}_g = \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{p}_g + \Sigma\mathfrak{q}_g', \qquad \mathfrak{P}_i = \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{p}_i + \Sigma\mathfrak{q}_i'.$$

Nunmehr nehme man $\varepsilon_\nu < \frac{1}{2}\varepsilon$ beliebig an, so liegt P_ν außerhalb P und Q_ν' innerhalb Q_ν. Es liegt demnach auch jeder Punkt, der zum Gebiete G_ν gehört, also auch G_ν selbst, innerhalb von G. Ganz analog folgt, daß J innerhalb von J_ν liegt. Wenn wir also ε_ν gegen Null konvergieren lassen, so können *neue* Gebietsteile von G, *außerhalb* der schon vorhandenen, bei wachsendem ν niemals auftreten; dagegen ist es wohl möglich, daß mit wachsendem ν solche Gebietsteile *verschwinden*.

Es sind nun folgende Fälle möglich: Gibt es ein ν, so daß alle Gebietsteile von G_ν verschwunden sind, so gibt es auch ein Q_ν', das ganz innerhalb von P_ν liegt. Wir kommen also auf den Fall zurück, daß C und C' keinen Punkt gemein haben. Wenn daher C und C' gemeinsame Punkte haben, so gibt es eine unbegrenzte Folge von Gebieten,

$$G, G_1, G_2, \cdots, G_\nu, \cdots,$$

so daß jedes folgende innerhalb des vorhergehenden liegt, und alle Punkte die in sämtlichen G_ν enthalten sind, sind gemeinsame Punkte von C und C'. Bezeichnen wir sie durch C_g und beachten, daß die in allen G_ν enthaltenen Punkte zugleich die Grenzmenge der Umfänge aller G_ν darstellen, so folgt

$$(2) \qquad C_g = \lim \mathfrak{P}_g.$$

Ebenso definieren wir je eine Teilmenge C_i und C_i' von C resp. C' durch die Gleichungen

$$(3) \qquad C_i = \lim \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{p}_i, \qquad C_i' = \lim \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{q}_i'.$$

Jedes G_ν besteht aus einer endlichen Zahl getrennter Gebiete; sie seien

$$G_{\nu 1}, G_{\nu 2}, \cdots, G_{\nu\lambda}.$$

Sei nun $G_{\nu i}$ ein Teilgebiet, das mit wachsendem ν verschwindet, für das also eine Zahl N existiert, so daß, wenn $\varrho > N$ ist, kein Punkt von $G_{\nu i}$ mehr zu G_ϱ gehört. Dann können wir jedes derartige $G_{\nu i}$ aus G_ν tilgen. Sei

$$G_\nu' = \{G_{\nu 1}', G_{\nu 2}', \cdots, G_{\nu\mu}'\}$$

die so reduzierte Gebietsmenge, so wird nunmehr jedes $G_{\nu+\varrho}'$ aus *mindestens* μ *getrennten* Teilgebieten bestehen. Analog besteht J_ν aus λ Teilgebieten

$$J_{\nu 1}, J_{\nu 2}, \cdots, J_{\nu\lambda},$$

und wenn das Gebiet $G_{\nu i}$ für $\nu = \varrho$ verschwunden ist, so bewirkt dies, daß für $\nu = \varrho$ zwei der vorstehenden Teilgebiete sich zu einem Gesamt-

gebiet vereinigt haben. Wenn wir von je zwei solchen Gebieten nur eines beibehalten, so entsteht eine reduzierte Gebietsmenge

$$J_\nu' = \{J_{\nu 1}', J_{\nu 2}', \cdots, J_{\nu \mu}'\},$$

so daß nun auch jedes $J_{\nu+\varrho}'$ aus *mindestens* μ *getrennten* Teilgebieten besteht, und zwar so, daß je zwei von ihnen für jedes ϱ voneinander getrennt bleiben. Es ist klar, daß es genügt, statt G_ν und J_ν die Gebietsmengen G_ν' und J_ν' in Betracht zu ziehen.

Nun kann zunächst jedes G_ν' ein einziges, zusammenhängendes Gebiet sein. Alsdann ist gemäß Satz IV auch C_ν eine zusammenhängende Menge. Die Kurven C und C' haben daher einen zusammenhängenden Kurvenbogen gemein, der übrigens auch ein Punkt sein kann. Umgekehrt ist klar, daß, nur wenn jedes G_ν' ein zusammenhängendes Gebiet ist, C und C' einen zusammenhängenden Kurvenbogen gemein haben können. Gemäß dem angeführten Polygonsatz ist ferner auch jedes J_ν', also auch $\mathfrak{F}''$ selbst ein einziges, zusammenhängendes Gebiet. Umgekehrt folgt auf die gleiche Weise, daß wenn jedes J_ν' ein zusammenhängendes Gebiet ist, dies auch für jedes G_ν' zutrifft. Übrigens sind auch C_i und C_i' zusammenhängende Mengen, wie wir am Ende dieses Paragraphen beweisen werden; sie bilden entweder je eine geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen, also folgt:

IX. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' außerhalb der geschlossenen Kurve C und haben C und C' einen Kurvenbogen gemein, so zerlegt die Kurve C' das Innere von C in zwei durch sie getrennte Gebiete, deren jedes einfach zusammenhängend ist und umgekehrt. Das eine dieser Gebiete ist zugleich das Innere von C'.*

Die Punktmenge C_g besteht ihrer Definition nach aus solchen Punkten, die Grenzpunkte entweder nur von $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{A}$ oder aber gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{A}$ sind; diese sind zugleich die Grenzpunkte der Punkte π_ν. Setzt man

$$C_g = C_{ig} + C_{ia} \tag{4}$$

wo C_{ig} die Punkte darstellt, die Grenzpunkte von $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}''$ und $\mathfrak{A}$ sind, so ist C_{ig} eine abgeschlossene Menge. Die Menge C_{ia} ist nicht abgeschlossen; wie die Beispiele zeigen, kann sie sich auf Null reduzieren. Die Menge C_{ig} ist ihrer Definition nach auch Bestandteil von C_i und C_i', wie die Gleichungen (3) unmittelbar erkennen lassen.

Besteht nicht jedes Gebiet G_ν' aus einem zusammenhängenden Bestandteil, so gibt es ein erstes, das in mindestens zwei getrennte Bestandteile zerfällt. Es kann dann wieder jedes folgende auch nur in zwei Bestandteile zerfallen; dann schließt man, daß C_g in zwei verschiedene Kurvenbögen zerfällt, und daß demgemäß auch $\mathfrak{F}''$ sich in zwei verschiedene

Gebiete spaltet. Dies gilt dann auch für C_i und C_i', wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen werden.

In dieser Weise kann man fortfahren. Die Zahl der Gebietsteile, aus denen G_ν' besteht, kann mit wachsendem ν beliebig groß werden; es werden dann auch die den Kurven C und C' gemeinsamen Punkte in mehrere resp. unbegrenzt viele Teilmengen zerfallen. Ebenso spaltet sich $\mathfrak{J}''$ in die entsprechenden Teilgebiete, und umgekehrt, was einer ausführlichen Darstellung nicht bedarf. Man kann demgemäß folgenden Satz aussprechen:

X. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' innerhalb C und haben C und C' n Kurvenbögen gemein, so zerlegt C' das Innere von C in $n+1$ durch sie getrennte Gebiete, deren jedes einfach zusammenhängend ist, und umgekehrt.*

Ich gebe noch einige Beispiele zu den einfachsten Fällen und bemerke zunächst, daß sich die Menge C_g, die C und C' gemeinsam ist, nicht nur auf einen Punkt, sondern auch auf eine endliche resp. unendliche Zahl isolierter Punkte reduzieren kann. Wählt man z. B. C als einen Kreis, C' als einen inneren Berührungskreis, so ist C_g ein Punkt, während C_i mit C und C_i' mit C' identisch ist; ferner ist C_{ig} mit C_g identisch, also $C_{ia}=0$. Errichtet man über zwei angrenzenden Intervallen s_1 und s_2 einer Quadratseite nach innen zwei außerhalb voneinander liegende Dreiecke mit den Spitzen S_1 und S_2 und setzt in jedes Dreieck einen sich gegen die Grundlinie verdichtenden Linienzug, so stellen diese beiden Linienzüge nebst der Strecke $S_1 S_2$ eine Kurve C' dar. Die Kurve C ist das Quadrat und C_g besteht aus den Intervallen s_1 und s_2, während wiederum C_i' mit C' und C_i mit C identisch ist. Die Intervalle s_1 und s_2 bilden zugleich die Menge C_{ig}, die gemeinsame Grenze von $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{J}''$ und $\mathfrak{A}$ ist, während Punkte, die nur zur Grenze von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}'$ gehören, nicht existieren, so daß $C_{ia}=0$ ist. Dies bleibt im wesentlichen bestehen, falls man das Intervall s_1 durch den Endpunkt von s_2 ersetzt. Wenn man jedoch s_1 und s_2 nicht aneinander grenzend wählt, so besteht C_{ia} aus den inneren Punkten des zwischen s_1 und s_2 liegenden Intervalls. Beispiele, in denen C_g in *mehrere* Punkte oder eigentliche Kurvenbögen zerfällt, lassen sich analog zu dem vorstehenden Beispiel ebenfalls leicht aufstellen.

Analog beweist man auch die Sätze über die Zusammensetzung zweier Gebiete, die außerhalb voneinander liegen und durch geschlossene Kurven begrenzt sind, die einen oder mehrere Kurvenbögen gemein haben. Sie entsprechen dem Fall, daß C und C' gemeinsame Punkte besitzen aber *kein* Punkt von C' innerhalb von C liegt. Man zeigt dann zunächst, daß *kein innerer* Punkt von C' *innerer* Punkt von C sein kann. Daraus folgt, daß $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(C)$ und $\mathfrak{J}'=\mathfrak{J}(C')$ zusammenhängende Gebiete sind, während der übrige Teil von $\mathfrak{M}$ in Teilgebiete zerfällt, die man mit den Polygonen

Q und Q', die C und C' von außen approximieren, in gleicher Weise erörtern kann, wie im vorigen Fall. Man gelangt dadurch zu folgendem Satz:

XI. *Liegt kein Punkt der geschlossenen Kurve C' innerhalb von C, und haben C und C' einen Kurvenbogen gemein, so zerlegt C' das Äußere von C in zwei zusammenhängende Teilgebiete, von denen das eine zugleich das Innere von C' ist und umgekehrt. Haben C und C' n Kurvenbögen gemein, so zerfällt das Äußere von C in $n+1$ solcher Teilgebiete, und umgekehrt.*

Hieraus fließt endlich noch der folgende Satz, der als Umkehrung der vorstehenden angesehen werden kann, und überdies die Ausdehnung des Satzes VII auf geschlossene Kurven darstellt.

XII. *Wenn das Innere $\mathfrak{J}$ einer geschlossenen Kurve C in zwei Gebiete $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist, so bilden die gemeinsamen Grenzpunkte von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ entweder eine geschlossene Kurve oder einen zusammenhängenden Kurvenbogen.*

Zunächst folgert man, wie beim Beweis von Satz VII, daß gemeinsame Grenzpunkte von $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ wirklich existieren. Sei $\mathfrak{T}$ die von ihnen gebildete Menge. Falls nun erstens $\mathfrak{T}$ keinen Punkt mit C gemein hat, so besteht $\mathfrak{T}$ ihrer Definition gemäß aus inneren Punkten von C. Ist dann $\varrho(\mathfrak{T}, C) = \delta$, so liegt $\mathfrak{T}$ auch innerhalb des Polygons P, das die Kurve C von innen im Abstand $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$ approximiert. Alsdann folgt aus Satz VII unmittelbar, daß $\mathfrak{T}$ eine innerhalb von C gelegene geschlossene Kurve ist.

Wenn jedoch $\mathfrak{T}$ Punkte mit C gemein hat, so sei C_1 die Menge aller dieser Punkte. Wir setzen dann

$$\mathfrak{T} = C_1 + \mathfrak{T}', \qquad C = C_1 + C''.$$

Aus der Gleichung

$$\mathfrak{E} = C + \mathfrak{A} + \mathfrak{J}$$

folgt daher

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{T} + C''$$

und zwar bestehen die Punkte von C'' aus denen, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}_1$, resp. nur von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}_2$ sind. Wir setzen demgemäß noch

$$C'' = C_1'' + C_2''$$

und erhalten die Gleichung:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{T} + C_1'' + C_2''.$$

Nun sind

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + \mathfrak{J}_1 + C_1'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{J}_2 + C_2''$$

zusammenhängende Gebiete, was ebenso gezeigt wird, wie der im Beginn von § 5 bewiesene Hilfssatz. In der Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{T} + C_2''$$

sind daher $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ zusammenhängende Gebiete, während jeder Punkt von $\mathfrak{T} + C_2''$ gemeinsamer Grenzpunkt von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ ist. Daher ist gemäß Satz VII

$$C' = \mathfrak{T} + C_2''$$

eine geschlossene Kurve. Kein Punkt dieser Kurve liegt außerhalb von C; es greifen also für die Beziehungen von C und C' die Erörterungen dieses Paragraphen Platz. Da nun C' das Innere von C in zwei Gebiete zerlegt, so folgt, daß C' entweder ein Kurvenbogen oder eine geschlossene Kurve ist.

Ähnlich lassen sich die Sätze über die Teilung des Kurveninnern in mehr als zwei Gebiete ableiten. Analog zu Satz XII beweist man noch den folgenden Satz:

Wenn das Äußere einer geschlossenen Kurve C in zwei Gebiete $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerfällt, deren jedes zusammenhängend ist, so bilden die gemeinsamen Grenzpunkte von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ entweder eine geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen.

Mittelst dieser Sätze kann man nun auch die Art der oben definierten Mengen

$$C_i = \lim \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{p}_i \quad \text{und} \quad C_i' = \lim \Sigma\pi + \Sigma\mathfrak{q}_i'$$

bestimmen. Falls nämlich Satz X statt hat, falls also die Kurve C' das Innere von C in zwei Gebietsteile zerlegt, so gibt es nach dem vorstehenden Satz eine geschlossene Kurve oder einen zusammenhängenden Kurvenbogen, der die Teilung bewirkt. Daraus folgt, *daß C_i' mit C' identisch ist, oder ein zusammenhängender Kurvenbogen von C'.* Ähnlich folgert man, daß auch C_i mit C identisch ist oder ein Kurvenbogen. Ebenso folgert man, daß wenn C_g in zwei verschiedene Kurvenbögen zerfällt, auch C_i und C_i' sich in je zwei verschiedene Kurvenbögen spaltet, die die gleiche Lage zueinander haben, wie dies bei Polygonen der Fall ist.

Endlich gelangt man mittelst der vorstehenden Resultate auch zu Beziehungen für Kurven C und C', die sich beliebig durchdringen, was einer näheren Ausführung nicht bedarf.

§ 7.

Gebietsgrenze, Zusammenhangszahl und Gebietsteilung.

Die vorstehenden Entwickelungen bilden die Grundlage aller weiteren Erörterungen. Die Probleme, die noch zu erledigen sind, sind wesentlich zweierlei Art. Erstens kann man von einer beliebig gegebenen Menge $\mathfrak{M}$ ausgehen und fragen, welches die Gestalt ihrer Gebietsgrenze und die Art ihres Zusammenhanges ist, falls sie ein zusammenhängendes Gebiet darstellt; zweitens kann man von einer beliebig gegebenen Menge $\mathfrak{S}$ ausgehen und nach der durch sie bewirkten Gebietsteilung fragen. Beide Aufgaben

hängen eng miteinander zusammen. Es mag genügen für einige einfache Fälle die Lösung in Kürze abzuleiten.

Die volle Gebietsgrenze $\mathfrak{S}$ einer zusammenhängenden Menge $\mathfrak{M}$ ist eine abgeschlossene Menge und hat daher stets den in § 4 abgeleiteten Typus, d. h. es ist

$$\mathfrak{S} = \Sigma J_\nu + \Sigma \mathfrak{T}_\nu + \mathfrak{T}_\alpha.$$

Sei zunächst $\mathfrak{M}$ ein sich *unbegrenzt weit* erstreckendes Gebiet. Dann ist zu unterscheiden, ob unter den Mengen $\mathfrak{T}_\nu$ solche vorkommen, in die geschlossene Kurven eingehen oder nicht. Gehört zu $\mathfrak{S}$ eine geschlossene Kurve, so kann ihr Inneres nicht zu $\mathfrak{M}$ gehören. Nun kann eine geschlossene Kurve in $\mathfrak{S}$ entweder so auftreten, daß sie selbst mit einem T_ν identisch ist, oder Bestandteil einer zusammenhängenden Menge T_ν ist. Diese kann dann entweder nur diese eine geschlossene Kurve enthalten oder aber beliebig viele geschlossene Kurven, von denen je zwei außerhalb voneinander liegen und einen Punkt oder einen Kurvenbogen gemein haben, wie es den Erörterungen von § 7 entspricht. Das gleiche trifft auch für die Menge $\mathfrak{T}_\alpha$ zu, falls sie zusammenhängend ist und eine oder mehrere geschlossene Kurven enthält. Übrigens kann die Menge $\mathfrak{T}_\alpha$, falls in sie eine oder mehrere oder auch unendlich viele geschlossene Kurven eingehen, auch eine Menge des ersten Typus sein; hierfür, sowie für die Art und Weise, in welcher die übrigen Bestandteile von $\mathfrak{S}$ zu diesen Kurven liegen, verweise ich auf die Ausführungen von § 4.

Bezeichnen wir noch eine der eben genannten geschlossenen Kurven durch C_ν und ihr Inneres durch $\mathfrak{J}(C_\nu)$, so erhält man noch die Gleichung

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{M} + \Sigma \mathfrak{J}(C_\nu) + \mathfrak{S}_c + \mathfrak{S}_m,$$

wo $\mathfrak{S}_c$ alle Punkte enthält, die zur Grenze der sämtlichen Gebiete $J(C_\nu)$ gehören und $\mathfrak{S}_m$ der übrige Bestandteil von $\mathfrak{S}$ ist.

Die gleichen Verhältnisse liegen vor, wenn es sich um ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{M}$ handelt, das aus *dem Inneren einer geschlossenen Kurve* C besteht. Hier tritt zur vollen Grenze von $\mathfrak{M}$ noch die Kurve C als äußere Gebietsgrenze hinzu. Ihre Beziehung zur Gesamtmenge $\mathfrak{S}$ unterliegt wieder den allgemeinen Erörterungen von § 4. Sie kann entweder mit einer der in einem $\mathfrak{T}_\nu$ enthaltenen Mengen resp. mit $\mathfrak{T}_\alpha$ identisch sein oder aber ein Bestandteil einer solchen Menge sein, insbesondere falls sie ein Bestandteil von $\mathfrak{T}_\alpha$ ist, so kann $\mathfrak{T}_\alpha$ auch wieder eine Menge des ersten Typus sein.

Es ist klar, daß man auf ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{M}$ den Begriff der *Zusammenhangszahl* übertragen kann. Ich beschränke mich im wesentlichen auf die Bemerkung, daß die Zusammenhangszahl unendlich groß werden und sich sogar durch transfinite Ordnungszahlen ausdrücken kann. Handelt es sich z. B. um eine Menge $\mathfrak{T}$, wie sie dem

Satz V entspricht, so umgebe man die Teilmengen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ mit den approximierenden Figuren Π_1 und Π_2 und konstruiere von einem Punkt m_1 von Π_1 den zu $\mathfrak{T}_1$ führenden Weg, ebenso von einem Punkt m_2 von Π_2 den bezüglichen Weg zu $\mathfrak{T}_2$ (§ 1). Diese beiden Wege bestimmen dann mit dem von m_1 zu m_2 führenden Weg einen Querschnitt. In gleicher Weise hat man für jede weitere Teilung zu verfahren; alle so bestimmten Querschnitte werden dann $\mathfrak{M}$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandeln. Handelt es sich um eine abgeschlossene Menge vom allgemeinsten Typus, so hat man für die successive Anbringung von Querschnitten gerade die im Satz VI ausgeführte Abspaltung isolierter Mengen vorzunehmen, und die bezüglichen Querschnitte so lange zu legen, bis der Abspaltungsprozeß sein Ende erreicht. Ist dann die schließlich übrig bleibende Menge $\mathfrak{T}_\alpha$ zusammenhängend, so ist man am Ziel, ist sie nicht zusammenhängend, so hat man außerdem noch die für eine solche Menge nötigen Querschnitte anzubringen.

Ein einfaches Beispiel des ersten Falles bildet die oben S. 140 genannte Menge der Lote, die man auf einer Geraden in den Punkten einer perfekten, nirgends dichten Menge errichtet. Übrigens bemerke ich, daß nicht jede Menge dieser Art eine *zusammenhängende* Komplementärmenge besitzt. Die oben S. 141 genannten Beispiele zeigen, daß $\mathfrak{M}$ in beliebig viele getrennte Bestandteile zerfallen kann.

Die Frage, welches die zu einer beliebigen Menge $\mathfrak{S}$ gehörige Gebietsteilung ist, bedarf an sich nur noch in dem Falle einer Erledigung, daß ihre Komplementärmenge nicht zusammenhängend ist. Teilweise ist sie übrigens durch das vorstehende schon beantwortet. Wir wollen sie noch in dem einfachsten Falle etwas eingehender behandeln. Der einfachste Fall ist der, daß $\mathfrak{M}$ in zwei Teilgebiete zerfällt. Alsdann läßt sich das eine Teilgebiet dadurch definieren, daß ihm die Punkte des Quadrats $\mathfrak{q}$ angehören, in dem $\mathfrak{S}$ enthalten ist. Dies bezeichnen wir als das *äußere* Gebiet $\mathfrak{A}$; die andere Teilmenge heißt das *innere* Gebiet $\mathfrak{J}$. Es ist also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} + \mathfrak{J} + \mathfrak{S}.$$

Wir setzen noch

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a' + \mathfrak{S}_i' + \mathfrak{S}_{ai},$$

wo $\mathfrak{S}_a'$ diejenigen Punkte bedeutet, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{A}$ sind, und $\mathfrak{S}_i'$ diejenigen, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ sind. Dann sind gemäß § 5 die beiden Mengen

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \mathfrak{S}_a', \qquad \mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \mathfrak{S}_i'$$

zusammenhängend, ferner ergibt sich

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}' + \mathfrak{J}' + \mathfrak{S}_{ai},$$

also folgt unmittelbar gemäß Satz VII, daß $\mathfrak{S}_{ai}$ eine geschlossene Kurve C darstellt. Also ergibt sich:

XIII. *Zerfällt die Komplementärmenge einer abgeschlossenen, nirgends dichten Menge in zwei getrennte Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$, *deren jedes zusammenhängend ist, so gibt es eine wohl definierte, geschlossene Kurve* C, *der alle gemeinsamen Grenzpunkte von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$ *angehören, und die die beiden Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$ *voneinander trennt.*

Setzt man noch

$$\mathfrak{S}_a = C + \mathfrak{S}_a', \qquad \mathfrak{S}_i = C + \mathfrak{S}_i',$$

so stellen $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ die volle Grenze von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ dar und sind daher abgeschlossene Mengen.

Für die zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ sowie für ihre vollen Grenzen $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ greifen die Bemerkungen Platz, die wir im Beginn dieses Paragraphen für eine zusammenhängende Menge gemacht haben. Für $\mathfrak{J}$ ist C die äußere Randkurve, für $\mathfrak{A}$ ist es das Quadrat q, in dem $\mathfrak{S}$ enthalten ist, während C eine der inneren Randkurven darstellt. Sei noch T diejenige Menge, der die Kurve C angehört, und man setze

$$T = C + T_a' + T_i',$$

so ist T_a' ein Bestandteil von $\mathfrak{S}_a$ und T_i' ein solcher von $\mathfrak{S}_i$. Keine der beiden Mengen T_a' und T_i' ist abgeschlossen, die ihnen fehlenden Grenzpunkte gehören zu C. Werden sie durch C_a resp. C_i bezeichnet, so ist jede dieser beiden Mengen, wie auch

$$T_a = C_a + T_a', \qquad T_i = C_i + T_i'$$

eine abgeschlossene Menge. Übrigens kann C_a resp. C_i auch mit C identisch sein.

Konstruiert man z. B. zu den Seiten eines Quadrats außen und innen eine sich gegen die Quadratseiten verdichtende Menge paralleler Strecken, von denen keine zwei miteinander oder mit dem Quadrat einen Punkt gemein haben, so bildet das Quadrat die Kurve C und ist mit den Mengen $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ identisch, die sämtlichen Parallelen bilden die Mengen $\mathfrak{S}_a'$ und $\mathfrak{S}_i'$, während T_a', C_a, T_i' und C_i nicht existieren. Errichtet man dagegen auf einer Quadratseite in den Punkten je einer perfekten, nirgends dichten Menge Lote nach außen und innen, so hat man eine einzige, zusammenhängende Menge. C ist das Quadrat, während $\mathfrak{S}_a'$ und $\mathfrak{S}_i'$ mit T_a' und T_i' identisch sind und mit C_a resp. C_i zusammen die sämtlichen äußeren resp. inneren Lote ausmachen. Die Mengen C_a und C_i bilden die eben genannten perfekten linearen Mengen. Die Mengen T_a und T_i stellen je eine Menge dar, die dem Satz V entspricht. Endlich stellt bei dem im Beginn von § 4 genannten Beispiel C den Grundkreis dar, während $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_i$ je eine Menge ist, die Satz V entspricht. Dieses Beispiel läßt sich beliebig verallgemeinern, indem man in eine gegebene Menge immer wieder neue Mengen einsetzt, die sich gegen einzelne Bestandteile der ersten

verdichten. Hier greifen dieselben einfachen Methoden Platz, mittelst derer man Punktmengen zu bilden pflegt, deren Ableitung eine immer höhere Ordnung besitzt.

Die Fälle, in denen $\mathfrak{M}$ in mehr als zwei Gebiete zerfällt, lassen sich in ähnlicher Weise behandeln. Besteht $\mathfrak{M}$ zunächst aus drei Gebieten, so hat man

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A} + \mathfrak{J} + \mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{A}$ wieder dasjenige Gebiet ist, dem die Punkte von $\mathfrak{q}$ zugehören. Man setze nun

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \mathfrak{M}', \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}_a + \mathfrak{S}',$$

wo $\mathfrak{S}_a$ die volle Grenze von $\mathfrak{A}$ ist, also jeder Punkt von $\mathfrak{S}'$ Grenzpunkt nur von $\mathfrak{M}'$ ist. Man kann dann weiter schreiben

$$\mathfrak{M}' + \mathfrak{S}' = \mathfrak{M}_1, \qquad \mathfrak{S}_a = C_a + \mathfrak{S}_a',$$

wo $\mathfrak{S}_a'$ die Punkte enthält, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{A}$ sind. Setzt man dann noch

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{S}_a' = \mathfrak{A}',$$

so ist $\mathfrak{A}'$ gemäß § 5 zusammenhängend. Man erhält noch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}' + C_a + \mathfrak{M}_1$$

und hat nun zu unterscheiden, ob $\mathfrak{M}_1$ zusammenhängend ist oder nicht.

Im ersten Fall beweist man, analog zu den obigen Entwickelungen, daß C_a eine geschlossene Kurve ist, deren Inneres $\mathfrak{M}_1$ ist, und daß dies durch eine ebenfalls geschlossene Kurve oder einen Kurvenbogen in zwei Teilgebiete

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \mathfrak{S}_i', \qquad \mathfrak{K}' = \mathfrak{K} + \mathfrak{S}_k'$$

zerfällt, wo $\mathfrak{S}_i'$ und $\mathfrak{S}_k'$ diejenigen Teilmengen von $\mathfrak{S}$ sind, die Grenzpunkte nur von $\mathfrak{J}$ oder nur von $\mathfrak{K}$ sind.

Im zweiten Fall, wenn also $\mathfrak{M}_1$ nicht zusammenhängend ist, folgert man, daß C_a in zwei geschlossene Kurven C_i und C_k zerfällt, die außerhalb voneinander liegen, und deren Inneres die Gebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{K}'$ sind, usw.

Wie zu erwarten war, führt also unsere Analyse auf die nämlichen Fälle, die wir in § 6 bei der Kombination von zwei geschlossenen Kurven als einfachste Möglichkeiten erkannten.

Der Vollständigkeit halber erwähne ich noch, daß $\mathfrak{M}$, wie ich bereits in meinem ersten Beitrag anführte, in unendlich viele Teilmengen zerfallen kann, man hat eine Gleichung

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \Sigma \mathfrak{J}_\nu,$$

wo $\mathfrak{A}$ wieder das äußere Gebiet bedeutet, dem die Punkte von $\mathfrak{q}$ zugehören.

Diese Betrachtungen lassen sich auf die Fälle, daß $\mathfrak{M}$ in beliebig viele Gebiete zerfällt, ohne Mühe ausdehnen.

§ 8.

Die Struktur der allgemeinsten abgeschlossenen ebenen Mengen.

Wir haben bisher von der Menge $\mathfrak{S}$ angenommen, sie sei nirgends dicht. Ist $\mathfrak{S}$ eine Menge anderer Art, so enthält sie Punkte, in deren Umgebung sie überall dicht ist. Es hat keine Schwierigkeit die Struktur der Menge $\mathfrak{S}$ in diesem Fall zu beschreiben. Dies soll der Vollständigkeit halber hier in Kürze geschehen. Wir setzen dann

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}_1,$$

wo $\mathfrak{U}$ die Menge derjenigen Punkte darstellt, in deren Umgebung $\mathfrak{S}$ überall dicht ist. Sei u_1 irgend einer von ihnen. Es gibt dann sicher Punkte u, die mit u_1 durch einen Weg verbindbar sind, dessen sämtliche Punkte zu U gehören, sie mögen die Menge U_1 bilden. Diese Menge ist zusammenhängend und es sei $\mathfrak{S}_u$ die zugehörige Gebietsgrenze*). Für diese Gebietsgrenze gelten die allgemeinen Erörterungen der vorstehenden Paragraphen, nur mit der Maßgabe, daß Punkte, die Grenzpunkte von U_1 allein sind, in $\mathfrak{S}_u$ offenbar nicht auftreten können. Es kommen also für die Gebietsteilung nur geschlossene Kurven in Frage und es gibt daher eine oder mehrere resp. auch unendlich viele geschlossene Kurven, die das Gebiet U_1 begrenzen und natürlich zur Menge $\mathfrak{S}$ gehören. Die so definierte Kurvenmenge sei $\mathfrak{C}_1$; sie besitzt jedenfalls eine äußere Randkurve C_a'. Gibt es noch andere Punkte, in deren Umgebung $\mathfrak{S}$ überall dicht ist, so sei u_2 einer von ihnen. Alle mit u_2 verbindbaren Punkte definieren dann ebenso ein zusammenhängendes Gebiet U_2 und es gibt eine Kurvenmenge $\mathfrak{C}_2$, die die volle Grenze von U darstellt, die aus einer oder mehreren oder auch aus unendlich vielen Kurven bestehen kann und eine äußere Randkurve C_a'' besitzt.

So kann man fortfahren und erhält eine abzählbare Zahl solcher Gebietsteile, in denen $\mathfrak{S}$ überall dicht ist, und deren Grenzkurven im übrigen jede beliebige Lage zueinander haben können.

Nach Abscheidung aller Gebiete

$$U_1, U_2, \cdots, U_\nu, \cdots$$

bleibt von $\mathfrak{S}$ noch die nirgends dichte Menge $\mathfrak{S}_1$, der die Grenzpunkte der Gebiete U_ν naturgemäß angehören. Sie ist offenbar abgeschlossen und kann eine Menge des allgemeinsten Typus sein, was einer näheren Ausführung nicht bedarf. Man erhält also schließlich

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \Sigma U_\nu = \mathfrak{S}' + \Sigma \mathfrak{C}_\nu + \Sigma U_\nu,$$

wo jedes U_ν ein zusammenhängendes Gebiet darstellt, aber $\mathfrak{S}'$ keine abgeschlossene Menge mehr sein kann. Es hat keine Schwierigkeit, auf die Natur der Menge $\mathfrak{S}'$ näher einzugehen.

*) Die Bezeichnung ist so zu verstehen, daß $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{S}_u$ keinen Punkt gemein haben.

Über das Dirichletsche Prinzip.*)

Von

David Hilbert in Göttingen.

Inhalt.

Seite

§ 1. Darlegung des Problems 162
§ 2. Hilfssatz über Dirichletsche Integrale 163
§ 3. Allgemeiner Hilfssatz über gleichmäßige Konvergenz 165
§ 4. Hilfssatz über das Verschwinden eines gewissen Doppelintegrals bei willkürlicher Wahl einer unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion 166
§ 5. Konstruktion der gesuchten Potentialfunktion auf Grund des Dirichletschen Prinzips 169
§ 6. Beweis der Existenz der Funktion v 173
§ 7. Existenz der Funktion u und Beweis ihrer Potentialeigenschaft 175
§ 8. Beweis für die vorgeschriebene Unstetigkeit der Funktion u auf der Kurve C 180
§ 9. Der Wert des Dirichletschen Integrals der Potentialfunktion u auf der Riemannschen Fläche 181
§ 10. Beweis für das reguläre Verhalten der Potentialfunktion u in den unendlichfernen Punkten und in den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche 184

Unter dem Dirichletschen Prinzip verstehen wir diejenige Schlußweise auf die Existenz einer Minimalfunktion, welche Gauß (1839), Thomson (1847), Dirichlet (1856) und andere Mathematiker zur Lösung sogenannter Randwertaufgaben angewandt haben und deren Unzulässigkeit zuerst von Weierstraß erkannt worden ist. Daß dieses Prinzip dennoch zur Auffindung von strengen und einfachen Existenzbeweisen dienen kann, habe ich in einem Vortrage**) in der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

*) Abdruck aus der Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1901.

**) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII, 1900.

hervorgehoben; meine damaligen Andeutungen sind seitdem von Ch. A. Noble*) für einfache bestimmte Integrale und von E. R. Hedrick**) für gewisse Fälle von Doppelintegralen ausgeführt worden.

Im folgendem soll ein dem Dirichletschen Prinzip nachgebildetes Verfahren dargelegt werden, bei welchem wir nicht, wie früher, die Lösung der Randwertaufgabe für irgend ein spezielles Gebiet voraussetzen. Das neue Verfahren gestattet daher weitgehende Verallgemeinerungen auf die Lösung von Randwertaufgaben für gewisse aus Variationsproblemen entspringende partielle Differentialgleichungen oder für Systeme von solchen Differentialgleichungen. Vor allem aber scheinen mir die folgenden Entwicklungen ein methodisches Interesse zu bieten, insofern sie zeigen, wie die modernen Hilfsmittel der Analysis und insbesondere der Variationsrechnung imstande sind, den der geometrischen und physikalischen Anschauung entnommenen Grundgedanken des Dirichletschen Prinzips in genauem Anschluß an die anschauliche Bedeutung desselben derart zu verfolgen, daß aus demselben ein streng mathematischer Beweis für die Existenz der Minimalfunktion entsteht.

§ 1.

Darlegung des Problems.

Durch das Dirichletsche Prinzip hat insbesondere Riemann die Existenz der überall endlichen Integrale auf einer vorgelegten Riemannschen Fläche zu beweisen gesucht. Ich bediene mich im folgenden dieses klassischen Beispiels zur Darlegung meines strengen Beweisverfahrens.

Auf der Ebene der komplexen Zahlen sei eine Riemannsche Fläche F gegeben mit einer gewissen endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten und einer gewissen endlichen Anzahl von Blättern. Sodann sei auf der Riemannschen Fläche F eine Kurve C gegeben, die im Endlichen verläuft, keinen Verzweigungspunkt trifft und, ohne die Fläche F zu zerstückeln, in sich zurückkehrt. Wir nehmen diese Kurve C als einen Polygonzug an, der aus geradlinigen, teils zur x-Achse, teils zur y-Achse parallelen Stücken besteht.

Eine Funktion u der beiden Veränderlichen x, y, die in einem gewöhnlichen Punkte der Riemannschen Fläche nebst sämtlichen Ableitungen stetig ist und der Differentialgleichung

*) Eine neue Methode in der Variationsrechnung, Inauguraldissertation, Göttingen 1901.

**) Über den analytischen Charakter der Lösungen von Differentialgleichungen, Inauguraldissertation, Göttingen 1901, Kapitel V.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv \Delta u = 0$$

genügt, heiße eine in diesem Punkte reguläre Potentialfunktion.

Sind a, b die Koordinaten eines r-fachen Verzweigungspunktes der Riemannschen Fläche F und verhält sich die Potentialfunktion u überall in der Umgebung dieses Verzweigungspunktes regulär, so setze man in u an Stelle von x, y bezüglich den reellen und den mit i multiplizierten Bestandteil des Ausdruckes

$$a + ib + (\xi + i\eta)^r;$$

wenn dann u in eine Potentialfunktion von ξ, η übergeht, die sich auch im Punkte $\xi = 0$, $y = 0$ regulär verhält, so heißt die ursprüngliche Potentialfunktion von x, y in dem Verzweigungspunkte a, b regulär.

Wenn eine Potentialfunktion u in der Umgebung eines unendlichfernen Punktes unserer Riemannschen Fläche sich regulär verhält und durch die Transformation

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

in eine Potentialfunktion der Veränderlichen ξ, η übergeht, die sich im Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ regulär verhält, so heiße die ursprüngliche Funktion u von x, y in jenem unendlichfernen Punkte regulär.

Wenn endlich eine Potentialfunktion u in der Umgebung der Punkte der Kurve C zu beiden Seiten regulär ist, auf der Kurve C aber sich in der Weise unstetig verhält, daß die Werte der Potentialfunktion u auf der einen Seite, um die Konstante 1 vermehrt, genau die reguläre Fortsetzung der Potentialfunktion u auf der anderen Seite der Kurve C bilden, so sagen wir, die Potentialfunktion u erleide beim Übergange von der einen auf die andere Seite den Sprung 1.

Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, die Existenz einer Potentialfunktion u auf der vorgelegten Riemannschen Fläche F nachzuweisen, die sich in allen Punkten dieser Fläche F einschließlich der unendlichfernen Punkte und der Verzweigungspunkte regulär verhält und überdies beim Übergange über die gegebene Unstetigkeitskurve C den Sprung 1 erleidet. Mit der Lösung dieser Aufgabe ist bekanntlich der Nachweis für die Existenz der überall endlichen Integrale auf der Riemannschen Fläche F geführt.

§ 2.

Hilfssatz über Dirichletsche Integrale.

Wir erörtern in diesem und den beiden folgenden Paragraphen einige einfache Hilfssätze. Der erste Hilfssatz behandelt gewisse Ungleichungen

zwischen bestimmten Integralen, wenn das sogenannte Dirichletsche Integral für die in Betracht kommende Funktion einen bestimmten endlichen Wert hat. Wir wollen stets unter dem Dirichletschen Integral für eine vorgelegte Funktion U das über ein gewisses Gebiet G der xy-Ebene zu erstreckende Doppelintegral

$$D = \int_{(G)} \int \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

verstehen.

Hilfssatz 1. Es sei in der xy-Ebene ein Rechteck R gegeben, dessen Seiten parallel zur x-Achse bezw. zur y-Achse laufen und die Längen l bezw. l' besitzen; die Ecken dieses Rechteckes mögen die Koordinaten

$$a, b; \quad a + l, b; \quad a + l, b + l'; \quad a, b + l'$$

haben. Ferner bezeichne $U(x, y)$ eine Funktion der Veränderlichen x, y, die im Inneren und auf den Seiten des Rechtecks R stückweise analytisch ist und es werde

$$D = \int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\,dy$$

gesetzt: dann gelten folgende drei Formeln:

$$\text{I} \qquad \int_a^{a+l} U(x, b)\,dx = \int_a^{a+l} U(x, b + l')\,dx + \vartheta \left(D + \tfrac{1}{4} l l'\right)$$

$$\text{II} \qquad \int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} U(x, y)\,dx\,dy = l' \int_a^{a+l} U(x, b)\,dx + \vartheta' l' \left(D + \tfrac{1}{4} l l'\right)$$

$$\text{III} \qquad l \int_b^{b+l'} U(a, y)\,dy = l' \int_a^{a+l} U(x, b)\,dx + \vartheta''(l + l') \left(D + \tfrac{1}{4} l l'\right);$$

darin bedeuten ϑ, ϑ', ϑ'' gewisse den Ungleichungen

$$-1 \leqq \vartheta \leqq +1, \quad -1 \leqq \vartheta' \leqq +1, \quad -1 \leqq \vartheta'' \leqq +1$$

genügende Zahlen.

„Stückweise analytisch" heiße eine stetige Funktion, wenn sie aus einer endlichen Anzahl von analytischen Funktionen zusammengesetzt ist, die in stückweise analytischen Kurven stetig aneinander grenzen und einschließlich dieser Grenzkurven sich regulär verhalten.

Beweis. Aus der Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^2 - \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| + \tfrac{1}{4} \geqq 0$$

folgt durch Integration nach y zwischen den Grenzen b, $b + l'$

$$\int_b^{b+l'} \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| dy \leqq \int_b^{b+l'} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dy + \frac{1}{4} l'$$

und hieraus durch Integration nach x zwischen den Grenzen a, $a + l$:

$$\int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| dx\,dy \leqq D + \frac{1}{4} ll'.$$

Mit Benutzung von

$$\left| \int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} \frac{\partial U}{\partial y}\, dx\,dy \right| \leqq \int_a^{a+l} \int_b^{b+l'} \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| dx\,dy$$

erhalten wir

$$\left| \int_a^{a+l} U(x, b + l')\, dx - \int_a^{a+l} U(x, b)\, dx \right| \leqq D + \frac{1}{4} ll'$$

und damit ist die Formel I des Hilfssatzes 1 bewiesen.

Die Formeln II und III sind unmittelbare Folgerungen aus Formel I.

§ 3.

Allgemeiner Hilfssatz über gleichmäßige Konvergenz.

Bei der Herstellung der gesuchten Potentialfunktion u werden wir folgenden, leicht zu beweisenden Hilfssatz gebrauchen, dessen wesentlicher Inhalt bekannt ist.*)

Hilfssatz 2. Es sei G ein im Endlichen gelegenes Gebiet der xy-Ebene und

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

seien eine unendliche Reihe von Funktionen von x, y mit folgenden Eigenschaften:

1. jede der Funktion v_h sei innerhalb und auf dem Rande des Gebietes G stetig und einmal nach x sowie nach y differentiierbar;

2. die ersten Ableitungen von v_h innerhalb und auf dem Rande von G liegen absolut genommen unterhalb einer endlichen Größe A, die von x, y und von h unabhängig ist:

wenn dann die Funktionen

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

*) Bendixson, Öfversigt of kongl. Vetenskaps-Akademius Forhandlinger, Bd. 54, sowie Townsend, Begriff und Anwendung des Doppellimes, Inauguraldissertation, Göttingen 1900, S. 34.

für jeden Punkt einer in G überall dichten Punktmenge gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, so konvergieren sie für jeden beliebigen Punkt in G und auf dem Rande von G gegen einen endlichen Grenzwert und zwar gleichmäßig für das Gebiet G.

Der Limes

$$\lim_{h=\infty} Lv_h$$

stellt mithin eine in G einschließlich des Randes stetige Funktion von x, y dar.

§ 4.

Hilfssatz über das Verschwinden eines gewissen Doppelintegrals bei willkürlicher Wahl einer unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion.

Hilfssatz 3. Es sei in der xy-Ebene ein Rechteck R gegeben, dessen Seiten parallel zur x-Achse bezw. zur y-Achse laufen und die Längen l bezw. l' besitzen; die Ecken dieses Rechteckes mögen die Koordinaten

$$a,\ b \quad a+l,\ b; \quad a+l,\ b+l'; \quad a,\ b+l'$$

haben. Ferner sei ζ eine Funktion von x, y, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. die Ableitungen

$$\frac{\partial^{m+n}\zeta}{\partial x^m \partial y^n}, \quad (m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

existieren im Rechteck R einschließlich der Seiten desselben und sind daselbst stetig.

2. für $x = a$ und $x = a + l$ ist identisch für alle Werte von y

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0$$

und für $y = b$, $y = b + l'$ ist identisch für alle Werte von x

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = 0;$$

wenn dann $F(x, y)$ eine Funktion von x, y bezeichnet, die in R einschließlich der Seiten stetig verläuft, und wenn das über R erstreckte Integral

$$\int_{(R)}\int \frac{\partial^6\zeta}{\partial x^3 \partial y^3} F(x,y)\, dx\, dy$$

für alle den Bedingungen 1. und 2. genügenden Funktionen ζ verschwindet, so hat die Funktion F notwendig die Form

$$F = X + X'y + X''y^2 + Y + Y'x + Y''x^2,$$

wo X, X', X'' stetige Funktionen von x allein und Y, Y', Y'' stetige Funktionen von y allein bedeuten.

Beweis: Es seien s, σ, a, a', a'' irgend solche Zahlen, daß die sämtlichen Ausdrücke

$$(s + \varepsilon\sigma + ea + e'a' + e''a''$$
$$(\varepsilon,\ e,\ e',\ e'' = 0,1)$$

Werte darstellen, die $\geqq a$ und $\leqq a + l$ sind. Desgleichen seien t, τ, β, β', β'' irgend solche Zahlen, daß die sämtlichen Ausdrücke

$$t + \varepsilon\tau + e\beta + e'\beta' + e''\beta''$$
$$(\varepsilon,\ e,\ e',\ e'' = 0,1)$$

Werte darstellen, die $\geqq b$ und $\leqq b + l'$ sind. Wir definieren dann eine Funktion ξ von x allein und eine Funktion η von y allein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi &= 0 && \text{für } x \leqq s\\
&&& \text{und } \text{„ } x \geqq s + \sigma\\
\xi &= (x-s)\,(s+\sigma-x) && \text{„ } s \leqq x \gtrless s + \sigma\\
\eta &= 0 && \text{für } y \leqq t\\
&&& \text{und } \text{„ } y \geqq t + \tau\\
\eta &= (y-t)\,(t+\tau-y) && \text{„ } t \leqq y \leqq t + \tau.
\end{aligned}$$

Endlich führen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein, worin $A(x)$, $B(y)$ irgend welche Ausdrücke des Arguments x bezw. y bedeuten:

$$\begin{aligned}
d_x^{(\alpha)}A &= A(x+\alpha) - A(x),\\
d_x^{(\alpha')}A &= A(x+\alpha') - A(x),\\
d_x^{(\alpha'')}A &= A(x+\alpha'') - A(x),\\
d_y^{(\beta)}B &= B(y+\beta) - B(y),\\
d_y^{(\beta')}B &= B(y+\beta') - B(y),\\
d_y^{(\beta'')}B &= B(y+\beta'') - B(y).
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$\zeta = \int_a^x\int_a^x\int_a^x d_x^{(-\alpha)}d_x^{(-\alpha')}d_x^{(-\alpha'')}\xi\,dx\,dx\,dx \cdot \int_b^y\int_b^y\int_b^y d_y^{(-\beta)}d_y^{(-\beta')}d_y^{(-\beta'')}\eta\,dy\,dy\,dy$$

besitzt dann offenbar alle oben vorgeschriebenen Eigenschaften und nach der Voraussetzung des zu beweisenden Hilfssatzes ist daher

$$\int_a^{a+l}\int_b^{b+l'} d_x^{(-\alpha)}d_x^{(-\alpha')}d_x^{(-\alpha'')}\xi \cdot d_y^{(-\beta)}d_y^{(-\beta')}d_y^{(-\beta'')}\eta \cdot F(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Setzen wir zunächst

$$(1) \qquad \int_b^{b+l'} d_y^{(-\beta)} d_y^{(-\beta')} d_y^{(-\beta'')} \eta \cdot F(x,y)\,dy = (x),$$

so haben wir

$$(2) \qquad \int_a^{a+l} d_x^{(-\alpha)} d_x^{(-\alpha')} d_x^{(-\alpha'')} \xi \cdot G(x)\,dx = 0$$

oder

$$\int_a^{a+l} \xi \cdot d_x^{(\alpha)} d_x^{(\alpha')} d_x^{(\alpha'')} G(x)\,dx = 0$$

und, indem wir hier auf das Integral linker Hand den Mittelwertsatz für bestimmte Integrale anwenden, folgt unter Fortlassung des Faktors:

$$\int_0^{\sigma} x(\sigma - x)\,dx:$$

die Gleichung

$$d_s^{(\alpha)} d_s^{(\alpha')} d_s^{(\alpha'')} G(s + \vartheta s) = 0, \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

Der Grenzübergang für $\sigma = 0$ führt uns zu der Gleichung

$$(3) \qquad d_s^{(\alpha)} d_s^{(\alpha')} d_s^{(\alpha'')} G(s) = 0.$$

Setzen wir in (1) statt x die Variable s ein und wenden wir dann die Operation $d_s^{(\alpha)} d_s^{(\alpha')} d_s^{(\alpha'')}$ auf (1) an, so folgt vermöge (3) die Gleichung

$$\int_b^{b+l'} d_y^{(-\beta)} d_y^{(-\beta')} d_y^{(-\beta'')} \eta \cdot d_s^{(\alpha)} d_s^{(\alpha')} d_s^{(\alpha'')} F(s,y)\,dy = 0$$

und genau wie vorhin die Gleichung (3) aus (2) folgte, so gewinnen wir jetzt aus (4) die Gleichung

$$d_t^{(\beta)} d_t^{(\beta')} d_t^{(\beta'')} d_s^{(\alpha)} d_s^{(\alpha')} d_s^{(\alpha'')} F(s,t) = 0.$$

Diese Formel gilt identisch für alle Zahlen s, α, α', α'', t, β, β', β'', wenn nur die sämtlichen Ausdrücke

$$s + e\alpha + e'\alpha' + e''\alpha'', \quad t + e\beta + e'\beta' + e''\beta''$$
$$(e,\ e',\ e'' = 0,1)$$

noch in die Intervalle a bis $a + l$ bezw. b bis $b + l'$ fallen. Aus diesem Umstande folgt ohne Schwierigkeit, daß $F(x,y)$ die im Hilfssatze 3 behauptete Gestalt haben muß.

§ 5.
Konstruktion der gesuchten Potentialfunktion auf Grund des Dirichletschen Prinzips.

Entsprechend dem Grundgedanken des Dirichletschen Prinzips werden wir im folgenden auf unserer Riemannschen Fläche F Systeme von stückweise analytischen Funktionen $U(x, y)$ ins Auge fassen, deren jede auf der Kurve C den Sprung 1 erleidet und für welche das über die gesamte Riemannsche Fläche F erstreckte Dirichletsche Integral einen endlichen Wert besitzt. Dabei wird, wie in Hilfssatz 1 in § 2, eine Funktion als „stückweise analytisch" bezeichnet, wenn sie aus einer endlichen Anzahl von analytischen Funktionen zusammengesetzt ist, die in stückweise analytischen Kurven stetig aneinandergrenzen und einschließlich dieser Grenzkurven sich regulär verhalten. Daß es auf unserer Riemannschen Fläche F Funktionen $U(x, y)$ von der verlangten Beschaffenheit gewiß gibt, erkennen wir leicht auf folgende Weise. Wir konstruieren auf der Riemannschen Fläche F in genügender Nähe neben C einen C nicht schneidenden und ebenfalls geschlossenen Polygonzug C^*, dessen Teilstücke den geradlinigen Stücken von C bezüglich parallel sind, so daß das von C und C^* begrenzte ringförmige Gebiet von Verzweigungspunkten frei bleibt und es möglich wird, aus linearen Funktionen von x, y stückweise eine Funktion zusammenzusetzen, die im Inneren dieses ringförmigen Gebietes stetig ist und auf C den Wert 1, auf C^* den Wert 0 annimmt. Setzt man U in dem zwischen C und C^* gelegenen Gebiete gleich dieser stückweise linearen Funktion und definiert man U in allen übrigen Punkten der Riemannschen Fläche gleich 0, so erfüllt U offenbar die gestellten Forderungen.

Nunmehr bezeichnen wir mit d die untere Grenze der Werte der Dirichletschen Integrale aller möglichen Funktionen $U(x, y)$ und denken uns dann eine solche unendliche Reihe von Funktionen $U(x, y)$ ausgewählt, etwa

$$U_1, U_2, U_3, \cdots, \tag{5}$$

deren Dirichletsche Integrale gegen d konvergieren. Endlich sei D eine Zahl, die größer als alle Werte der Dirichletschen Integrale der Funktionen (5) ausfällt.

Wenn wir eine Funktion U um irgend eine Konstante vermehren, so ändert sich der Wert des Dirichletschen Integrals dadurch nicht. Es bezeichne S auf der Riemannschen Fläche irgend eine geradlinige endliche zur x-Achse parallele Strecke, die keinen Verzweigungspunkt enthält und die Kurve C nicht trifft; dann denken wir uns jede der Funk-

tionen (5) um je eine solche Konstante vermehrt, daß die Integrale der veränderten Funktionen, über die Strecke S erstreckt, sämtlich verschwinden. Behalten wir für die veränderten Funktionen die ursprüngliche Bezeichnung U_h bei, so genügen sie den folgenden Bedingungen:

$$\int_{(F)}\int \left\{\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy < D, \quad (h = 1, 2, 3, \cdots$$

$$\lim_{h=\infty} \int_{(F)}\int \left\{\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_h}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = d,$$

$$\int_{(S)} U_h\,dx = 0, \quad (h = 1, 2, 3, \cdots).$$

Man könnte zeigen, daß die Werte unserer Funktionen

$$U_1,\ U_2,\ U_3, \cdots \tag{6}$$

nicht notwendig für jeden Punkt der Riemannschen Fläche gegen einen Grenzwert konvergieren und daß es auch im allgemeinen nicht möglich ist, aus dieser Funktionenreihe (6) eine solche unendliche Reihe auszuwählen, deren Werte für jeden Punkt der Riemannschen Fläche gegen einen Grenzwert konvergieren. Hingegen wird sich aus den Funktionen (6) eine unendliche Reihe derart auswählen lassen, daß die Doppelintegrale dieser Funktionen über gewisse auf der Riemannschen Fläche gelegene Rechtecke stets gegen einen Grenzwert konvergieren und diese Grenzwerte werden uns dann zur Konstruktion der gesuchten Potentialfunktion dienen.

Wir fixieren in den verschiedenen Blättern der Riemannschen Fläche sämtliche derartige Punkte, deren Koordinaten rationale Zahlen sind. Sodann fassen wir alle diejenigen auf der Riemannschen Fläche gelegenen Rechtecke R ins Auge, deren Ecken derartige Punkte sind und deren Seiten parallel zur x-Achse und y-Achse laufen, die überdies so gelegen sind, daß in ihrem Inneren oder auf den Seiten kein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche und auch kein Punkt der Kurve C enthalten ist. Diese Rechtecke R bilden eine abzählbare Menge und seien in die unendliche Reihe

$$R_1,\ R_2,\ R_3, \cdots \tag{7}$$

angeordnet.

Wir betrachten nun irgend eines der Rechtecke (7), etwa das Rechteck R_k und bilden auf der Riemannschen Fläche eine endliche Kette von Rechtecken, deren erstes ein Reckteck mit der Seite S und deren letztes das Rechteck R_k ist und in welcher jedes folgende Rechteck mit dem vorhergehenden eine Seite gemein hat. Da die Integrale der Funktionen (6) über die Strecke S sämtlich verschwinden, so schließen wir, indem wir

die Formeln I und III des Hilfssatzes 1 in § 2 auf die Rechtecke unserer Kette anwenden und unter D die vorhin eingeführte obere Grenze der Dirichletschen Integrale verstehen, daß die über die Seiten von R_k erstreckten Integrale der Funktionen U_h absolut genommen gewiß unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, welche nur von der Gestalt und Lage des Rechteckes R_k, nicht aber von dem Index h, d. h. nicht von der Auswahl der Funktion U_h aus der Reihe (6) abhängt. Wenden wir dann noch die Formel II des Hilfssatzes 1 in § 2 auf das Rechteck R_k an, so folgt, daß auch das über dieses Rechteck erstreckte Doppelintegral der Funktion U_h, d. h. das Integral

$$\int_{(R_k)}\int U_h\,dx\,dy$$

absolut genommen unterhalb einer endlichen vom Index h unabhängigen Grenze liegen muß.

Diese Betrachtung setzt uns in den Stand, in der Reihe der Funktionen (6) die gewünschte Auswahl zu treffen.

Wir betrachten zunächst das Rechteck R_1. Da die über dieses Rechteck erstreckten Doppelintegrale

$$\int_{(R_1)}\int U_h\,dx\,dy \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

absolut genommen sämtlich unter einer endlichen Grenze bleiben, so ist es leicht möglich eine unendliche Anzahl aus den Funktionen U_h der unendlichen Reihe (6) auszuwählen, etwa die Funktionen

$$U_1',\ U_2',\ U_3',\ \cdots \tag{8}$$

derart, daß die Doppelintegrale dieser Funktionen sich einem bestimmten endlichen Grenzwerte nähern und mithin

$$\lim_{h=\infty}\int_{(R_1)}\int U_h'\,dx\,dy$$

existiert. Jetzt heben wir aus der Funktionenreihe (8) eine solche unendliche Anzahl von Funktionen, etwa die Funktionen

$$U_1'',\ U_2'',\ U_3'',\ \cdots \tag{9}$$

heraus derart, daß die über das Rechteck R_2 erstreckten Doppelintegrale dieser Funktionen sich einem bestimmten endlichen Grenzwerte nähern und mithin

$$\lim_{h=\infty}\int_{(R_2)}\int U_2''\,dx\,dy$$

existiert. Entsprechend wählen wir aus der Funktionenreihe (9) eine unendliche Anzahl von Funktionen

$$U_1''', U_2''', U_3''', \cdots$$

aus derart, daß

$$\lim_{h=\infty} \int_{(R_k)} \int U_h''' dx dy$$

existiert u. s. f.

Setzen wir nun

$$u_1 = U_1', \quad u_2 = U_2'', \quad u_3 = U_3''', \cdots$$

so ist offenbar die unendliche Funktionenreihe

$$u_1, u_2, u_3, \cdots \tag{10}$$

eine derartige, daß für jedes Rechteck R_k aus der unendlichen Reihe (7)

$$\lim_{h=\infty} \int_{(R_k)} \int u_h dx dy$$

existiert.

Die Funktionenreihe (10) wird uns die Konstruktion der gesuchten Potentialfunktion auf der Riemannschen Fläche in folgender Weise ermöglichen.

Es sei ein Rechteck R auf der Riemannschen Fläche gegeben, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen laufen und die Längen l bezw. l' besitzen, die Koordinaten der Ecken dieses Rechteckes seien

$$a, b; \quad a+l, b; \quad a+l, b+l'; \quad a, b+l',$$

und x, y seien die Koordinaten eines Punktes im Inneren oder auf einer Seite dieses Rechteckes R. Wir setzen zur Abkürzung

$$v_h = \int_a^x \int_b^y u_h dx dy$$

und beweisen dann folgende Tatsachen.

I. Es existiert stets der Grenzwert

$$\text{I.} \qquad v(x,y) = \lim_{h=\infty} v_h = \lim_{h=\infty} \int_a^x \int_b^y u_h dx dy$$

und zwar konvergieren die Funktionen v_h gleichmäßig für alle Punkte x, y im Inneren oder auf einer Seite des Rechteckes R gegen jenen Grenzwert; die durch jenen Grenzwert I dargestellte Funktion ist daher eine stetige Funktion von x, y in R.

II. Die durch den Grenzwert I dargestellte Funktion von x, y ist beliebig oft differentiierbar und zwar definiert

$$\text{II.} \quad u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \lim_{h=\infty} \int_a^x \int_b^y u_h dx dy = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}} \lim_{h=\infty} \frac{1}{\varepsilon \eta} \int_x^{x+\varepsilon} \int_y^{y+\eta} u_h dx dy$$

im Rechteck R die gesuchte Potentialfunktion auf der Riemannschen Fläche F.

§ 6.

Beweis der Existenz der Funktion v.

Zum Beweise der aufgestellten Behauptungen I und II dienen die folgenden Entwicklungen.

Es sei R_k ein bestimmt ausgewähltes Rechteck in der unendlichen Reihe (7) mit den Ecken a, b; $a+l, b$; $a+l, b+l'$; $a, b+l'$ und x, y seien die Koordinaten eines Punktes im Inneren oder auf den Seiten dieses Rechteckes. Wir haben erkannt, daß die über die Seiten von R_k erstreckten Integrale der Funktionen U_h unterhalb einer endlichen von h unabhängigen Grenze liegen; wir nennen diese Grenze G_k. Da die Funktionen u_h unter den Funktionen U_h enthalten sind, so gelten mithin Gleichungen von der Form

$$\int_a^{a+l} u_h\,dx = \vartheta^* G_k,$$

$$\int_b^{b+l'} u_h\,dy = \vartheta^{**} G_k,$$

worin ϑ^*, ϑ^{**} Zahlen sind, die den Ungleichungen

$$-1 \leqq \vartheta^* \leqq +1, \quad -1 \leqq \vartheta^{**} \leqq +1$$

genügen. Wenden wir nun die Formel III des Hilfssatzes 1 in § 2 auf das Rechteck mit den Ecken

$$a, b; \quad a+l, b; \quad a+l, y; \quad a, y$$

an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} l\int_b^y u_h(a,y)\,dy &= (y-b)\int_a^{a+l} u_h(x,b)\,dx + \vartheta''(l+y-b)\left(D+\tfrac{1}{4}l(y-b)\right), \\ &= \vartheta l' \cdot \vartheta^* G_k + \vartheta'''(l+l')\left(D+\tfrac{1}{4}ll'\right), \\ (-1 \leqq \vartheta \leqq +1, \quad -1 \leqq \vartheta'' \leqq +1 \; -1 \leqq \vartheta''' \leqq +1) & \end{aligned}$$

und diese Gleichung zeigt, daß der absolute Wert des einfachen Integrals

$$\int_b^y u_h(a,y)\,dx$$

unterhalb einer gewissen endlichen Grenze liegt, die weder von h noch von der Ordinate des Punktes x, y in R_k abhängig ist. Hieraus folgt unmittelbar, wenn wir die Formel I des Hilfssatzes 1 in § 2 auf das Rechteck mit den Ecken

$$a, b; \quad x, b; \quad x, y; \quad a, y$$

anwenden, daß auch der absolute Wert des einfachen Integrales

$$\int_b^y u_h(x, y)\, dy$$

unterhalb einer gewissen endlichen Grenze liegt, die weder von h noch von der Lage des Punktes x, y in R_k abhängt.

Das gleiche wird in analoger Weise von dem einfachen Integral

$$\int_a^x u_h(x, y)\, dx$$

gezeigt.

Wenn die Koordinaten x, y rationale Zahlen sind, so gehört das aus den Ecken

$$a, b; \quad x, b; \quad x, y; \quad a, y$$

gebildete Rechteck selbst zu den Rechtecken (7); in diesem Falle existiert mithin nach § 5 der Grenzwert

$$\lim_{h=\infty} v_h = \lim_{h=\infty} \int_a^x \int_b^y u_h\, dx\, dy.$$

Da andererseits nach dem eben Bewiesenen die Ableitungen von v_h nach x, y:

$$\frac{\partial v_h}{\partial x} = \int_b^y u_h\, dy, \quad \frac{\partial v_h}{\partial y} = \int_a^x u_h\, dx$$

absolut genommen sämtlich unterhalb einer von h und von x, y unabhängigen Grenze bleiben, so erfüllt die unendliche Reihe der Funktionen

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

alle Bedingungen des Hilfssatzes 3 in § 3; nach diesem Hilfssatze konvergieren also diese Funktionen gleichmäßig in R_k gegen eine Grenzfunktion:

$$v(x, y) = \lim_{h=\infty} v_h;$$

diese Gleichung definiert mithin eine in R_k stetige Funktion der Variabeln x, y. Damit ist die Behauptung I in § 5 bewiesen für den Fall, daß wir ein Rechteck R_k aus der Reihe (7) der Betrachtung zugrunde legen.

Wählen wir nun statt dieses Rechteckes R_k ein beliebiges Rechteck, dessen Seiten parallel zur x-Achse und zur y-Achse laufen und das keinen Verzweigungspunkt und keinen Punkt der Kurve C enthält, etwa das Rechteck R mit den Ecken

$$\alpha, \beta; \qquad \alpha + \lambda, \beta; \qquad \alpha + \lambda, \beta + \lambda'; \qquad \alpha, \beta + \lambda'$$

und bezeichnen wir mit x, y einen in diesem Rechteck R gelegenen Punkt, so erweist sich auch von der Funktionenreihe

$$v_h = \int_\alpha^x \int_\beta^y u_h \, dx \, dy$$

die Behauptung I in § 5 leicht als zutreffend, wenn wir ein Rechteck R_k in der Reihe (7) wählen, welches das Rechteck R im Inneren enthält und dann auf R_k die eben bewiesene Behauptung I anwenden.

§ 7.

Existenz der Funktion u und Beweis ihrer Potentialeigenschaft.

Wir gehen nun zum Beweise der Behauptung II in § 5 über. Zu dem Zwecke erörtern wir zunächst folgende Eigenschaft unserer Funktionenreihe (10).

Es sei R irgend ein Rechteck auf unserer Riemannschen Fläche mit den Ecken

$$a, b; \quad a + l, b; \quad a + l, b + l'; \quad a, b + l',$$

welches keinen Verzweigungspunkt und keinen Punkt der Kurve C enthält. Wenn dann ζ irgend eine stückweise analytische Funktion von x, y bedeutet, die nebst ihren ersten Ableitungen nach x, y innerhalb des Rechteckes R einschließlich seiner Seiten stetig ist und auf den Seiten von R verschwindet, so gilt stets die Gleichung

$$\lim_{h=\infty} \int_{(R)} \int \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_h}{\partial y} \right\} dx \, dy = 0, \tag{11}$$

wo das Doppelintegral über das Rechteck R zu erstrecken ist.

Zum Beweise dieser Behauptung nehmen wir im Gegenteil an, es ließe sich aus unserer Funktionenreihe (10)

$$u_1, u_2, u_3, \cdots$$

eine unendliche Reihe

$$u_1', u_2', u_3', \cdots$$

der Art herausgreifen, daß für alle h

$$\int_{(R)} \int \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h'}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_h'}{\partial y} \right\} dx \, dy \geqq \varrho \quad \text{oder} \quad \leqq \varrho$$

wäre, wo ϱ im ersten Fall eine positive, im zweiten Falle eine negative, von h unabhängige Zahl bedeutet. Dann setzen wir

$$\varkappa = \frac{\varrho}{\iint\limits_{(R)} \left\{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy}$$

und definieren auf unserer Riemannschen Fläche F eine stetige Funktion ζ, so daß ζ in R mit der vorgelegten Funktion ζ übereinstimmt und außerhalb überall den Wert 0 hat. Die Funktionen

$$u_h' - \varkappa\zeta, \qquad (h = 1, 2, 3, \cdots)$$

sind dann stückweise analytische Funktionen auf F, die in C den Sprung I erleiden, und das über F erstreckte Dirichletsche Integral für diese Funktion erhält den Wert

$$\iint\limits_{(F)} \left\{\left(\frac{\partial (u_h' - \varkappa\zeta)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (u_h' - \varkappa\zeta)}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$$

$$= \iint\limits_{(F)} \left\{\left(\frac{\partial u_h'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_h'}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy - 2\varkappa \iint\limits_{(R)} \left\{\frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial u_h'}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{\partial u_h'}{\partial y}\right\} dx\,dy + \varkappa\varrho^2$$

und folglich würden wir für alle h

$$\iint\limits_{(F)} \left\{\left(\frac{\partial (u_h' - \varkappa\zeta)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial (u_h' - \varkappa\zeta)}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy \leqq d_h - \varkappa\varrho^2,$$

erhalten, wo d_h das über F erstreckte Dirichletsche Integral für u_h' bedeutet und also auf Grund der Festsetzung in § 5 d_h sich bei wachsendem h der Grenze d nähert. Da

$$\varkappa\varrho^2 = \frac{\varrho^2}{\iint\limits_{(R)} \left\{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy}$$

eine positive, von h unabhängige Zahl wird, so wäre mithin d gewiß nicht die untere Grenze aller möglichen Werte von Dirichletschen Integralen. Dieser Widerspruch zeigt die Unzulässigkeit unserer Annahme und damit ist der Beweis für unsere obige Behauptung erbracht.

Die eben bewiesene Gleichung (11) entspricht der Forderung des Verschwindens der ersten Variation in der gewöhnlichen Variationsrechnung.

Um nun den Grenzübergang für $h = \infty$ unter dem Integralzeichen in (11) ausführen zu können, wenden wir das Mittel der partiellen Integration an, aber nicht, indem wir wie in der gewöhnlichen Variationsrechnung nach Lagrange die Ableitungen der Variation ζ fortschaffen,

sondern wir schaffen im Gegenteil die Ableitungen von u_h fort und führen statt derselben mehrfache Integrale von u_h ein.

Die Variation ζ sei von nun an eine stückweise analytische Funktion von x, y, die folgende Bedingung erfüllt.

1. Die Ableitungen

$$\frac{\partial^{m+n}\zeta}{\partial x^m \partial y^n}, \qquad (m, n = 0, 1, 2, 3)$$

existieren im Rechteck R einschließlich der Seiten desselben und sind daselbst stetig.

2. Für $x = a$ und $x = a + l$ ist identisch für alle Werte von y

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0,$$

Für $y = b$ und $y = b + l'$ ist identisch für alle Werte von x

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0.$$

Indem wir dann die Formel für partielle Integration wiederholt für die Integration nach x und nach y in Anwendung bringen, gelangen wir, unter a^*, b^* irgend zwei bezüglich zwischen den Grenzen a, $a + l$ und b, $b + l'$ gelegene Zahlen verstanden, zu folgenden Gleichungen

$$\int_a^{a+l} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} dx = -\int_a^{a+l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} u_h dx$$

$$\int_a^{a+l} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} u_h dx = -\int_a^{a+l} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \cdot \int_{a^*}^{x} u_h dx \cdot dx$$

und ferner, wenn

$$v_h = \int_{a^*}^{x} \int_{b^*}^{y} u_h dx dy$$

gesetzt wird:

$$\int_b^{b+l'} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \cdot \int_{a^*}^{x} u_h dx \cdot dy = -\int_b^{b+l'} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3 \partial y} v_h dy$$

$$\int_b^{b+l'} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^3 \partial y} v_h dy = -\int_b^{b+l'} \frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^3 \partial y^2} \cdot \int_b^{y} v_h dy \cdot dy$$

$$\int_b^{b+l'} \frac{\partial^5 \zeta}{\partial x^3 \partial y^2} \cdot \int_b^{y} v_h dy \cdot dy = -\int_b^{b+l'} \frac{\partial^6 \zeta}{\partial x^3 \partial y^3} \int_b^{y} \int_b^{y} v_h dy dy \cdot dy.$$

Mithin ist

$$\int\int_{(R)} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} dx\,dy = -\int\int_{(R)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot \int_b^y \int_b^y v_h\,dy\,dy \cdot dx\,dy.$$

Ebenso finden wir

$$\int\int_{(R)} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_h}{\partial y} dx\,dy = -\int\int_{(R)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot \int_a^x \int_a^x v_h\,dx\,dx \cdot dx\,dy.$$

Die Addition der beiden letzten Formeln liefert

$$\int\int_{(R)} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_h}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

$$= -\int\int_{(R)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \int_b^y \int_b^y v_h\,dy\,dy + \int_a^x \int_a^x v_h\,dx\,dx \right\} dx\,dy.$$

Wenden wir nun die Behauptung I in § 5, die in § 6 bereits bewiesen worden ist, auf diejenigen vier Rechtecke an, in welche das Rechteck R durch die beiden Geraden

$$x = a^*, \quad y = b^*$$

zerlegt wird, so erkennen wir, daß die Funktionenreihe

$$v_1, v_2, v_3, \cdots$$

gleichmäßig im Rechteck R einschließlich der Seiten desselben konvergiert. Die Grenzfunktion

$$v(x, y = \underset{h=\infty}{L} v_h = \underset{h=\infty}{L} \int_{a^*}^{x} \int_{b^*}^{y} u_h\,dx\,dy$$

ist mithin in R stetig und da wegen der gleichmäßigen Konvergenz die Reihenfolge des Grenzüberganges für $h = \infty$ und der Integrationsprozesse vertauscht werden darf, so haben wir

$$\underset{h=\infty}{L} \int\int_{(R)} \left\{ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial u_h}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

$$= -\underset{h=\infty}{L} \int\int_{(R)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \int_b^y \int_b^y v_h\,dy\,dy + \int_a^x \int_a^x v_h\,dx\,dx \right\} dx\,dy$$

$$= -\int\int_{(R)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} \left\{ \int_b^y \int_b^y v\,dy\,dy + \int_a^x \int_a^x v\,dx\,dx \right\} dx\,dy.$$

Unter Benutzung dieser Umformung und bei Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$w(x,y)=\int_a^x\int_a^x\int_b^y\int_b^y v\,dx\,dx\,dy\,dy$$

drückt sich die in Formel (11) ausgesprochene Behauptung wie folgt aus.

Die Funktion $w(x, y)$ ist von der Art, daß für jede beliebige den Bedingungen 1. und 2. genügende Funktion ζ stets das über R erstreckte Doppelintegral

$$\iint_{(R)}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\,\partial y^2}\,\Delta w\,dx\,dy$$

den Wert 0 hat.

Da Δw eine stetige Funktion von x, y ist, so folgt hieraus nach Hilfssatz 3 in § 4, daß Δw notwendig die Gestalt hat

$$\Delta w = Xy^2 + X'y + X'' + Yx^2 + Y'x + Y'', \tag{12}$$

wo X, X', X'' stetige Funktionen der Variabeln x allein und Y, Y', Y'' stetige Funktionen der Variabeln y allein bedeuten. Setzen wir

$$z = w - \int_a^x\int_a^x\{Xy^2+X'y+X''\}\,dx\,dx + 2\int_a^x\int_a^x\int_a^x\int_a^x X\,dx\,dx\,dx\,dx$$
$$-\int_b^y\int_b^y\{Yx^2+Y'x+Y''\}\,dy\,dy + 2\int_b^y\int_b^y\int_b^y\int_b^y Y\,dy\,dy\,dy\,dy,$$

so geht die Gleichung (12) über in die Gleichung

$$\Delta z = 0$$

und diese zeigt, daß z eine innerhalb R reguläre Potentialfunktion ist. Da eine reguläre Potentialfunktion nach den beiden Veränderlichen x, y beliebig oft differentiiert werden kann und alle ihre Ableitungen ebenfalls reguläre Potentialfunktionen sind, so folgt, daß auch

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} = v - 2X - 2Y$$

eine innerhalb R reguläre Potentialfunktion ist.

Setzen wir in dem Ausdruck $v - 2X - 2Y$ insbesondere $y = b^*$ ein und berücksichtigen, daß v für $y = b^*$ identisch in x verschwindet, so folgt, daß X notwendig eine analytische und also nach x differentiierbare Funktion sein muß; ebenso folgt durch Einsetzen von $x = a^*$ in jenen Ausdruck, daß Y eine analytische und also nach y differentiierbare Funktion sein muß. Mithin ist die Funktion v analytisch und also gewiß nach x und nach y differentiierbar: setzen wir

$$u(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

so erhellt, daß u ebenfalls eine innerhalb R reguläre Potentialfunktion ist.

Die hieraus zu entnehmende Formel

$$u(x, y) = \underset{\substack{\varepsilon=0 \\ \eta=0}}{L} \underset{h=\infty}{L} \frac{1}{\varepsilon\eta} \int_x^{x+\varepsilon} \int_y^{y+\eta} u_h \, dx \, dy$$

zeigt, daß der Wert der Funktion u von der Wahl der Zahlen a^*, b^* unabhängig ist und mithin definiert diese Formel auf der ganzen Riemannschen Fläche F eine Potentialfunktion, die gewiß überall im Endlichen sich regulär verhält, wenn man von den Punkten der Kurve C und den Verzweigungsstellen absieht.

Um zu erkennen, daß $u(x, y)$ die gesuchte Potentialfunktion der gegebenen Riemannschen Fläche F ist, erübrigt noch zu zeigen, daß $u(x, y)$ in dem in § 1 festgesetzten Sinne beim Übergange über die Kurve C den Sprung 1 erleidet und daß u auch in den unendlichfernen Punkten und in den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche F in dem in § 1 festgesetzten Sinne sich regulär verhält.

§ 8.

Beweis für die verlangte Unstetigkeit der Potentialfunktion u auf der Kurve C.

Der Nachweis für das verlangte unstetige Verhalten auf der Kurve C läßt sich sehr einfach führen. Wir ändern zu dem Zwecke die Kurve C auf der Riemannschen Fläche F in der Weise ab, wie wir dies im § 5 getan haben, indem wir die einzelnen geradlinigen Stücke des Polygonzuges C parallel mit sich nach der Seite hin verschieben, nach welcher die Vermehrung der Funktionswerte um 1 eintritt, und gleichzeitig jedes geradlinige Stück in geeigneter Weise verlängern oder verkürzen, so daß die abgeänderten Stücke wiederum einen geschlossenen Polygonzug bilden, den wir C^* nennen. Wir treffen die Abänderung so, daß in dem zwischen C und C^* gelegenen ringförmigen Gebiete kein Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche zu liegen kommt. Nunmehr führen wir unsere gesamte Betrachtung für den Polygonzug C^* anstatt wie früher für den Polygonzug C aus. Wir bezeichnen der Kürze halber eine Funktion, die innerhalb des von C und C^* begrenzten ringförmigen Gebietes den konstanten Wert 1 hat und sonst überall auf der Riemannschen Fläche verschwindet, mit 1^*. Aus jeder beliebigen Funktion U, die auf der Riemannschen Fläche F stetig verläuft und nur in C den Sprung 1

erleidet, gewinnen wir dann offenbar durch Subtraktion der Funktion 1* eine Funktion, die auf der Riemannschen Fläche F stetig verläuft und nur in C^* den Sprung 1 erleidet und wir können offenbar für die neue Betrachtung von vornherein die Funktionenreihe

$$u_1 - 1^*,\ u_2 - 1^*,\ u_3 - 1^*, \cdots$$

zugrunde legen, wo $u_1, u_2, u_3, \cdots$ die in den vorigen Entwickelungen gewonnenen und zur Konstruktion unserer Potentialfunktion u verwandten Funktionen (10) bedeuten. Unser Verfahren zeigt dann, daß sich aus dieser Funktionenreihe eine Auswahl

$$u_1' - 1^*,\ u_2' - 1^*,\ u_3' - 1^*, \cdots$$

muß treffen lassen, derart, daß der durch die Formel

$$u^* = \underset{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}}{L}\ \underset{h=\infty}{L} \int_x^{x+\varepsilon}\int_y^{y+\eta} (u_h' - 1^*)\, dx\, dy$$

definierte Ausdruck eine Potentialfunktion darstellt, die nur in den Punkten des Polygonzuges C^* unstetig ist. Nun ist aber jener Ausdruck u^* offenbar gleich $u - 1^*$ und mithin $u - 1^*$ eine auf C reguläre Potentialfunktion, d. h. u erleidet in dem in § 1 festgesetzten Sinne beim Übergange über die Kurve C den Sprung 1.

§ 9.

Der Wert des Dirichletschen Integrals der Potentialfunktion u auf der Riemannschen Fläche.

Um das Verhalten der gefundenen Potentialfunktion u in den unendlichfernen Punkten und in den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche F zu beurteilen, ist es zuvor nötig, zu zeigen, daß die Funktion u das ins Auge gefaßte Dirichletsche Variationsproblem löst, daß der Wert des über die gesamte Riemannsche Fläche erstreckten Dirichletschen Integrals für diese Funktion wirklich gleich der in § 5 mit d bezeichneten Grenze aller möglichen Werte der über F erstreckten Dirichletschen Integrale wird.

Beim Nachweise hierfür bedienen wir uns der folgenden Tatsache:

Es sei R irgend ein Rechteck auf unserer Riemannschen Fläche mit den Ecken

$$a, b;\quad a + l, b;\quad a + l, b + l';\quad a, b + l',$$

welches keinen Verzweigungspunkt und keinen Punkt der Kurve C enthält und $f(x, y)$ sei eine in R einschließlich der Seiten von R reguläre analytische Funktion: wird dann zur Abkürzung

$$\omega_h = u_h - u$$

gesetzt, so behaupte ich, daß stets die Gleichung gilt

$$\lim_{h=\infty} \int_a^x \int_b^y f(x,y) \cdot \omega_h \, dx \, dy = 0.$$

$$(a \leqq x \leqq a+l, \quad b \leqq y \leqq b+l')$$

und zwar konvergiert das Doppelintegral *gleichmäßig* für alle in R gelegenen Punkte x, y gegen den Wert 0.

Zum Beweise dieser Behauptung formen wir das Doppelintegral wie folgt um

$$\int_a^x \int_b^y f \cdot \omega_h \, dx \, dy = f \int_a^x \int_b^y \omega_h \, dx \, dy - \int_b^y \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \int_a^x \int_b^y \omega_h \, dx \, dy \cdot dy$$

$$- \int_a^x \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \int_a^x \int_b^y \omega_h \, dx \, dy \cdot dx + \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} \cdot \int_a^x \int_b^y \omega_h \, dx \, dy \cdot dx \, dy$$

und bedenken dann, daß das Doppelintegral

$$\int_a^x \int_b^y \omega_h \, dx \, dy = \int_a^x \int_b^y u_h \, dx \, dy - \int_a^x \int_b^y u \, dx \, dy$$

gleichmäßig für alle in R gelegenen Punkte x, y gegen den Wert 0 konvergiert.

Wir wollen nun zeigen, daß das über die gesamte Riemannsche Fläche F erstreckte Dirichletsche Integral für die Potentialfunktion u einen *endlichen* Wert besitzt, der gewiß nicht größer als d ist. Im entgegengesetzten Falle nämlich müßte es gewiß auch möglich sein, auf der Riemannschen Fläche F ein ganz im Endlichen gelegenes, von Verzweigungspunkten und Punkten der Kurve C freies Gebiet G abzugrenzen, so daß das über G erstreckte Dirichletsche Integral für die Funktion u größer als d ausfällt und zwar nehmen wir an, es sei das über G erstreckte Dirichletsche Integral $\geqq d + p$, wo p eine gewisse positive Zahl bedeutet. Dann konstruieren wir einen Polygonzug P, der aus einer endlichen Anzahl geradliniger zur x-Achse oder zur y-Achse paralleler Stücke besteht derart, daß das Gebiet G auf der Riemannschen Fläche ganz in das Innere des durch diesen Polygonzug P begrenzten Polygones zu liegen kommt. Endlich wählen wir noch eine positive Größe δ so klein, daß das Gebiet G auch innerhalb jedes solchen Polygonzuges $P_{\xi\eta}$ enthalten bleibt, der aus P durch eine Parallelverschiebung:

$$x' = x + \xi, \quad 0 \leqq \xi \leqq \delta$$
$$y' = y + \eta, \quad 0 \leqq \eta \leqq \delta$$

hervorgeht. Offenbar sind dann die über das Innere der Polygonzüge $P_{\xi\eta}$ erstreckten Dirichletschen Integrale für die Funktion u ebenfalls sämtlich $\geqq d+p$; wir können daher aus der Identität

$$\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

$$=\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy+2\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right\}dx\,dy$$

$$+\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\left(\frac{\partial \omega_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

in der die Doppelintegrale über das Innere des Polygones $P_{\xi\eta}$ zu erstrecken sind, die Ungleichung entnehmen

$$\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\geqq d+p+2\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right\}dx\,dy.$$

Um so mehr ist

$$(13)\qquad \iint\limits_{(F)}\left\{\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy\geqq d+p+2\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right\}dx\,dy$$

wenn das Doppelintegral linker Hand über die ganze Riemannsche Fläche F erstreckt wird. Andererseits gilt die Formel

$$\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right\}dx\,dy=-\int\limits_{(P_{\xi\eta})}\frac{\partial u}{\partial t}\,\omega_h\,ds-\iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\Delta u\,\omega_h\,dx\,dy;$$

hierin ist das erste Integral rechter Hand über den Polygonzug $P_{\xi\eta}$ zu erstrecken, wobei s, t die Variabeln x, $\pm y$ bezüglich y, $\pm x$ bedeuten, jenachdem die betreffende Polygonseite zur x-Achse oder zur y-Achse parallel läuft. Wegen $\Delta u=0$ gewinnen wir die Formel

$$(14)\qquad \iint\limits_{(P_{\xi\eta})}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_h}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_h}{\partial y}\right\}=-\int\limits_{(P_{\xi\eta})}\frac{\partial u}{\partial t}\,\omega_h\,ds.$$

Nun lehrt die am Anfang dieses Paragraphen erkannte Tatsache, daß, wenn wir das Integral rechter Hand in (14) nach ξ und η zwischen den Grenzen 0 und δ integrieren und dann zur Grenze $h=\infty$ übergehen,

sich Null ergibt und mithin gilt das gleiche für die linke Seite, d. h. wir haben

$$\lim_{k=\infty} \int_0^\delta \int_0^\delta \int\int_{(P_{\xi\eta})} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega_k}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega_k}{\partial y} \right\} dx\, dy \cdot d\xi\, d\eta = 0.$$

Integrieren wir nun die Gleichung (13) nach ξ und η zwischen den Grenzen 0 und δ und gehen dann zur Grenze $h = \infty$ über, so erhalten wir

$$\delta^2 d \geqq \delta^2 (d + p)$$

und diese Ungleichung enthält wegen $p > 0$ einen Widerspruch. Unsere Annahme ist mithin unzulässig, d. h. das über die gesamte Riemannsche Fläche F erstreckte Integral für die Potentialfunktion u besitzt einen endlichen Wert, der gewiß nicht größer als d ist.

Dieser Wert kann auch nicht kleiner als d sein, da unserer anfänglichen Festsetzung zufolge d die untere Grenze aller möglichen Werte der Dirichletschen Integrale für die in Betracht kommenden Funktionen bezeichnet. Das über F erstreckte Dirichletsche Integral für die Funktion u hat daher genau den Wert d und mithin löst die Potentialfunktion u das Dirichletsche Variationsproblem.

§ 10.

Beweis für das reguläre Verhalten der Potentialfunktion u in den unendlichfernen Punkten und in den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche.

Um zu beweisen, daß die gefundene Funktion u auch in den unendlichfernen Punkten und in den Verzweigungspunkten der Riemannschen Fläche F in dem in § 1 festgesetzten Sinne sich regulär verhält, bedenken wir, daß bei der in § 1 angegebenen Transformation das vorgelegte Dirichletsche Integral wieder in ein Dirichletsches Integral übergeht und mithin das über die transformierte Riemannsche Fläche erstreckte Dirichletsche Integral den gleichen endlichen Wert besitzt, wie das über die ursprünglich vorgelegte Fläche F erstreckte Integral. Bei der in § 1 angegebenen Transformation gehen die Verzweigungspunkte, bezw. die unendlichfernen Punkte der Riemannschen Fläche F in gewöhnliche Punkte über und mithin haben wir nach der dort getroffenen Festsetzung nur nötig zu zeigen, daß die transformierte Potentialfunktion u^* in einem gewöhnlichen Punkte P sich regulär verhalten muß, falls sie in der Umgebung dieses Punktes P eindeutig und regulär ist und ein endliches Dirichletsches Integral aufweist. Hierzu benutzen wir die aus

dem Laurentschen Satze leicht zu folgernde Tatsache, daß u^* in der Umgebung von P eine Reihenentwickelung von der Gestalt

$$u^*(x,y) = (a + \alpha l r)$$
$$+ \left(a_1 r + \frac{\alpha_1}{r}\right)\cos\varphi + \left(a_2 r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2}\right)\cos 2\varphi + \left(a_3 r^3 + \frac{\alpha_3}{r^3}\right)\cos 3\varphi + \cdots$$
$$+ \left(b_1 r + \frac{\beta_1}{r}\right)\sin\varphi + \left(b_2 r^2 + \frac{\beta_2}{r^2}\right)\sin 2\varphi + \left(b_3 r^3 + \frac{\beta_3}{r^3}\right)\sin 3\varphi + \cdots$$

besitzen muß, wo r die Entfernung des Punktes x, y von P und φ den Winkel bezeichnet, den die Verbindungsgrade zwischen diesen Punkten mit der x-Achse einschließt und wo $a, \alpha, a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, a_3, \alpha_3, \cdots b_1, \beta_1, b_2, \beta_2, b_3, \beta_3, \cdots$ Konstante bedeuten. Es mögen $r, r' > r$ zwei besondere Werte bezeichnen, für welche jene Reihenentwickelung konvergiert, die von den mit r und r' um P geschlagenen Kreisen gebildet wird. Das über diesen Kreisring erstreckte Dirichletsche Integral für die Potentialfunktion u^* ist bekanntlich nach dem Greenschen Satz durch die Integrale über die Peripherie jener beiden Kreise ausdrückbar; man erhält für dasselbe den Wert

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{\partial u^*}{\partial r} r\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \left[u^* \frac{\partial u^*}{\partial r}\right]_{r=r'} r'\, d\varphi.$$

Da das Dirichletsche Integral über die gesamte Fläche erstreckt einen endlichen Wert d haben soll, so muß auch

$$\int_0^{2\pi} u^* \frac{\partial u^*}{\partial r} r\, d\varphi$$

bei abnehmendem r, absolut genommen, unterhalb einer endlichen Größe A bleiben und daraus entnehmen wir, daß das Integral

$$\int_{r'}^{r}\int_0^{2\pi} u^* \frac{\partial u^*}{\partial r}\, d\varphi \cdot dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u^{*2}\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[u^{*2}\right]_{r=r'} d\varphi$$

absolut genommen unterhalb der Grenze

$$\int_r^{r'} \frac{A}{r}\, dr = Al\frac{r'}{r}$$

bleibt, d. h. das Integral

$$\int_0^{2\pi} u^{*2}\, d\varphi$$

muß bei abnehmendem r absolut genommen unterhalb einer Größe von der Form

$$2Al\frac{1}{r}+B$$

bleiben, wo B eine geeignet gewählte Konstante ist. Wegen

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u^{*2}d\varphi = 2(a+\alpha l r)^2+\left(a_1 r+\frac{\alpha_1}{r}\right)^2+\left(a_2 r^2+\frac{\alpha_2}{r^2}\right)^2+\cdots$$
$$+\left(b_1 r+\frac{\beta_1}{r}\right)^2+\left(b_2 r^2+\frac{\beta_2}{r^2}\right)^2+\cdots$$

folgt aber hieraus, daß die Konstanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \beta_1, \beta_2, \cdots$ sämtlich gleich 0 sind, d. h. die Potentialfunktion u^* verhält sich auch im Punkte P regulär.

Göttingen, den 18. September 1901.

Hamiltonsche Gruppen.

Von

Ernst Wendt in Bremen.

Nicht kommutative Gruppen, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, hat Herr Dedekind*) *„Hamiltonsche"* genannt. Die kleinste dieser Gruppen ist eine Gruppe achter Ordnung, welcher Herr Dedekind den Namen *„Quaternionengruppe"* gegeben hat. Ihren Aufbau will ich im folgenden als bekannt voraussetzen. Dagegen will ich hier die Resultate, welche Herr Dedekind in bezug auf die allgemeinsten *Hamiltonschen* Gruppen gewonnen hat, in modifizierter und, wie ich glaube, einfacherer Weise herleiten.

Der eigentlichen Diskussion will ich zwei Sätze vorausschicken, die vielfach Anwendung bei gruppentheoretischen Untersuchungen finden und im folgenden benutzt werden sollen.

Hilfssatz I: *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Normalteiler einer Gruppe* $\mathfrak{G}$, *und ist ihr größter gemeinsamer Teiler* $\mathfrak{D}$, *so besteht zwischen irgend zwei Elementen* A *und* B *von* $\mathfrak{A}$ *bezw.* $\mathfrak{B}$ *eine Relation von der Form*

$$B^{-1}AB = AD,$$

wo D *ein Element in* $\mathfrak{D}$ *bedeutet, und die Ordnung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist* $\frac{a \cdot b}{d}$, *wo* a, b, d *die Ordnungszahlen* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ *bezeichnen.*

Für $\mathfrak{D} = 1$ ergibt sich hieraus der

Hilfssatz II: *Haben zwei Normalteiler einer Gruppe außer der Einheit kein Element gemeinsam, so ist jedes Element des einen mit jedem Element des andern vertauschbar.*

Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine Hamiltonsche Gruppe. Sind $p_1, p_2, \cdots$ die verschiedenen in der Ordnung von $\mathfrak{G}$ aufgehenden Primzahlen und $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$ die höchsten darin enthaltenen Potenzen derselben, so besitzt $\mathfrak{G}$ nach dem

*) Math. Ann. Bd. 48, S. 548.

Sylowschen Satze Untergruppen von den Ordnungszahlen $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$. Da diese nach der über $\mathfrak{G}$ gemachten Voraussetzung Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein müssen und je zwei derselben außer 1 kein Element gemeinsam haben können, so ist nach Hilfssatz II jedes Element des einen mit jedem Element des andern vertauschbar. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller dieser Gruppen ist daher deren direktes Produkt, dessen Ordnung gleich $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots$, also gleich der Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist, und das demnach, da es ja in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmen muß.

Satz III: *Jede Hamiltonsche Gruppe ist das direkte Produkt von Gruppen von Primzahlpotenzordnung.*

Es bedeute jetzt $\mathfrak{G}$ eine Hamiltonsche Gruppe, welche zur Ordnung eine Primzahlpotenz p^α hat. Die Ordnung jedes in einer solchen Gruppe enthaltenen Elementes ist, da sie in p^α aufgehen muß, eine Potenz von p. Es sei A ein Element von der Ordnung p^k und B ein solches von der Ordnung p^{k_1}, und es sei $k_1 \geqq k$. Die durch die Potenzen von A und B gebildeten zyklischen Gruppen mögen $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ heißen; ihre Ordnungen sind dann p^k resp. p^{k_1}. Ihr größter gemeinsamer Divisor $\mathfrak{D}$, der als Untergruppe einer zyklischen Gruppe selbst zyklisch sein muß und deren Elemente Potenzen von A und B zugleich sind, möge die Ordnung p^l haben. Es handelt sich um die Aufstellung der Bedingungen, unter denen A nicht mit B vertauschbar ist. Zunächst ist klar, daß zu dem Ende l von k verschieden sein muß, denn im Falle $l = k$ wäre ja $\mathfrak{A}$ ein Teiler von $\mathfrak{B}$. Es sei demgemäß $l < k$ vorausgesetzt. Ist $\mathfrak{C}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, also die durch Komposition von A und B erzeugte Gruppe, so ist, da ja $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sind, nach Hilfssatz I:

$$B^{-1}AB = AD_1, \tag{1}$$

wo D_1 ein Element in $\mathfrak{D}$ bedeutet, und die Ordnung von $\mathfrak{C}$ ist gleich p^{k_1+k-l}. Die niedrigste in $\mathfrak{D}$ enthaltene Potenz von B ist die $p^{k_1-l\text{te}}$. Wird diese mit D bezeichnet, so kann D als erzeugendes Element der zyklischen Gruppe $\mathfrak{D}$ aufgefaßt werden, und es muß, da die $p^{k-l\text{te}}$, aber keine niedere Potenz von A zu $\mathfrak{D}$ gehört, $A^{p^{k-l}} = D^u$ sein, wo u relativ prim zu p ist.

Da D_1 als Element von $\mathfrak{D}$ Potenz von A und B zugleich ist, so muß es mit A und B vertauschbar sein. Es folgt daher für beliebige positive oder negative ganze Zahlen σ und τ:

$$B^{-\tau}A^\sigma B^\tau = A^\sigma D_1^{\sigma\cdot\tau}, \tag{2}$$

woraus sich für $\sigma = p^{k-l}$, $\tau = 1$

$$D_1^{p^{k-l}} = 1 \tag{3}$$

ergibt, und weiter für positive ganze Zahlen ϱ:

$$(4) \qquad (B^\tau A^\sigma)^\varrho = B^{\varrho\cdot\tau} A^{\varrho\cdot\sigma} D_1^{\sigma\cdot\tau\cdot\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}}.$$

Setzt man hierin

$$\sigma = 1, \quad \tau = -u\cdot p^{k_1-k}; \quad \varrho = p^{k-l},$$

so erhält man, wenn man noch die folgenden Bezeichnungen einführt,

$$(5) \qquad A_1 = B^{-u\cdot p^{k_1-k}} A, \quad \text{also} \quad A = B^{u\cdot p^{k_1-k}} A_1,$$

$$v = -\frac{u\cdot(p^{k-l}-1)}{2}$$

und ferner von den Gleichungen

$$(6) \qquad B^{p^{k_1-l}} = D; \quad A^{p^{k-l}} = D^u$$

Gebrauch macht,

$$(7) \qquad A_1^{p^{k-l}} = D_1^{p^{k_1-l}\cdot v}.$$

Das Element A_1 gehört zufolge seiner Definition der durch A und B erzeugten Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung p^{k_1+k-l} an. Weil sich ferner nach (5) A durch Komposition von A_1 und B darstellen läßt, so ergibt sich, daß man an Stelle von A und B auch A_1 und B als Erzeugende der Gruppe $\mathfrak{G}$ ansehen kann. Ihrer Ordnung kann daher auch die Form $p^{k_1+k'-l'}$ gegeben werden, wo $p^{k'}$ die Ordnung von A_1 und $p^{l'}$ die Ordnung des größten gemeinsamen Divisors $\mathfrak{D}'$ der beiden durch A_1 und B erzeugten zyklischen Gruppen bedeutet. Infolgedessen ist $k-l = k'-l'$, also $k' \geqq k-l$.

Ist nun p von 2 verschieden, so ist v eine ganze Zahl, und es folgt aus Gleichung (7) mit Hilfe von (3)

$$(8) \qquad A_1^{p^{k-l}} = 1,$$

weil ja $k_1 - l \geqq k - l$ ist. Da hiernach $k' \leqq k-l$ ist, so muß $k' = k-l$, also $l' = 0$ und $\mathfrak{D}' = 1$ sein. Nach Hilfssatz II ist demnach A_1 mit B vertauschbar, also $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe. Die ihr angehörigen Elemente A und B müssen daher miteinander vertauschbar sein. Somit gilt der

Satz IV: *Hamiltonsche Gruppen, deren Ordnung die Potenz einer von 2 verschiedenen Primzahl ist, existieren nicht.*

Falls $p = 2$ ist, läßt sich die Gleichung (8) nicht allgemein schließen, weil v keine ganze Zahl ist, wohl aber in dem Falle, daß $k_1 > k$ ist, weil dann $k_1 - l - 1 > k - l - 1$, also $k_1 - l - 1 \geqq k - l$ und daher

$$2^{k_1-l}\cdot v = -u\cdot 2^{k_1-l-1}\cdot(2^{k-l}-1)$$

durch 2^{k-l} teilbar ist. In derselben Weise wie vorher im Falle $p > 2$ ergibt sich dann die Vertauschbarkeit von A und B und sonach der folgende

Satz V: *In einer Hamiltonschen Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, sind Elemente von ungleicher Ordnung miteinander vertauschbar.*

Um nun noch den Fall $k_1 = k$ zu erledigen, erhebe man beide Seiten der Gleichung (7) ins Quadrat. Dann findet man mit Hilfe von (3)

$$A_1^{2^{k-l+1}} = D_1^{2^{k-l} \cdot 2v} = 1,$$

weil $2v$ eine ganze Zahl ist. Ist nun $l \geqq 2$, also $k - l + 1 \leqq k - 1$, so folgt aus der letzten Gleichung, daß die Ordnung von A_1 ein Teiler von 2^{k-1} ist. Ist aber $l = 1$, also die Ordnung von $\mathfrak{D}$ gleich 2, und gleichzeitig $k > 2$, so ergibt sich aus Gleichung (7) $A_1^{2^{k-1}} = 1$, weil dann die Zahl $2^{k-1} \cdot v = 2^{k-2} \cdot 2v$ noch durch 2 teilbar ist und D_1 als Element von $\mathfrak{D}$ der Bedingung $D_1^2 = 1$ genügt. In den vorliegenden Fällen ist also die Ordnung von A_1 kleiner als die von B, nach Satz V müssen demnach A_1 und B permutabel sein. Aus der Vertauschbarkeit von A_1 und B folgt aber, wie vorhin gezeigt wurde, auch die von A und B. Ist schließlich $l = 0$, so ist $\mathfrak{D} = 1$, also auch $D_1 = 1$ und infolgedessen A mit B vertauschbar.

Nach diesen Untersuchungen können also im Falle $p = 2$ zwei Elemente A und B nur dann nicht permutabel sein, wenn gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $k > l$, $k_1 = k$, $l = 1$, $k \leqq 2$, die sich in die einfacheren umgestalten lassen: $l = 1$, $k_1 = k = 2$. Da in diesem Falle D_1 mit D übereinstimmen muß, so läßt sich der Satz aussprechen:

Satz VI: *In einer Hamiltonschen Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von 2 ist, müssen zwei nicht vertauschbare Elemente die folgenden Gleichungen befriedigen*

$$A^2 = B^2 = D; \quad D^2 = 1, \tag{9}$$
$$AB = BAD,$$

wobei man die letzte Gleichung auch in der Form schreiben kann

$$BA = ABD.$$

Durch zwei auf diese Weise definierte Elemente A und B wird nach den Untersuchungen des Herrn Dedekind tatsächlich eine Hamiltonsche Gruppe, nämlich eine *Quaternionengruppe* erzeugt. Es muß also $\mathfrak{G}$ mindestens eine Quaternionengruppe $\mathfrak{R}$ als Teiler besitzen, weil sonst ja alle Elemente in $\mathfrak{G}$ permutabel wären. Die erzeugenden Elemente von $\mathfrak{R}$ mögen A und B heißen und den Gleichungen (9) genügen.

Bedeutet jetzt R ein Element in $\mathfrak{G}$, welches mit allen Elementen der Quaternionengruppe $\mathfrak{R}$ vertauschbar ist, so muß für das Element BR die Gleichung bestehen

$$(BR)^{-1} A (BR) = R^{-1}(B^{-1}AB)R = R^{-1}(AD)R = AD,$$

d. h. die Elemente BR und A sind nicht permutabel. Das ist aber nach Satz VI nur möglich, wenn $(BR)^2$ oder B^2R^2 oder $DR^2 = D$, also $R^2 = 1$ ist. Mit allen Elementen von $\mathfrak{R}$ vertauschbare Elemente können demnach nur die Ordnung 2 haben. Dieselben müssen, da nach Satz VI nicht permutable Elemente die Ordnung 4 haben, auch mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sein. Ihre Gesamtheit stellt infolgedessen eine Abelsche Gruppe dar. Zu dieser gehört auch das einzige in $\mathfrak{R}$ enthaltene Element 2^{ter} Ordnung, nämlich D, aber weiter kein Element in $\mathfrak{R}$, und sie kann daher nach bekannten Eigenschaften der Abelschen Gruppen aufgefaßt werden als das direkte Produkt der die Elemente D und 1 enthaltenden Gruppe $\mathfrak{D}$ und einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{P}$, die mit $\mathfrak{R}$ außer 1 kein Element gemeinsam hat, also ist in $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ enthalten.

Alle diejenigen Elemente von $\mathfrak{G}$, die nicht mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, dürfen nicht gleichzeitig mit A und B vertauschbar sein, denn sonst wären sie ja mit *allen* Elementen der Gruppe $\mathfrak{R}$ vertauschbar, da diese durch A und B erzeugt wird, und müßten also nach Obigem die Ordnung 2 haben, während ihnen nach Satz VI die Ordnung 4 zukommt. Ist nun ein derartiges Element G etwa mit B nicht vertauschbar, so muß nach Satz VI $G^2 = B^2$, also nach Gleichung (9) $= D$ sein. Ist G weder mit A noch mit B vertauschbar, so bestehen nach Satz VI die Gleichungen

$$G^2 = A^2 = D; \quad GA = AGD,$$
$$G^2 = B^2 = D; \quad GB = BGD,$$

also ergibt sich

$$G(AB) = (GA)B = (AGD)B = A(GB)D = A(BGD)D = (AB)G,$$

d. h. G ist mit dem Element AB vertauschbar. Damit ist die Existenz eines in $\mathfrak{R}$ enthaltenen von D verschiedenen Elementes K, mit welchem G vertauschbar ist, gesichert. Weil $K^2 = D$ ist, findet man

$$(KG)^2 = K^2G^2 = D \cdot D = D^2 = 1.$$

Daraus folgt, daß das Element KG mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar ist, also dem direkten Produkt der Gruppen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}$ angehört und demnach in der Form $D^\delta P$ darstellbar ist, wo P ein Element aus $\mathfrak{P}$ bedeutet, und hieraus ergibt sich weiter, daß $G = K^{-1}D^\delta P = K'P$ selbst in dem Produkt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}$ enthalten ist und daß die Gruppe $\mathfrak{G}$, welche nach Obigem dieses Produkt als Teiler enthält, genau gleich demselben ist.

Faßt man dieses Resultat mit Satz III und Satz IV zusammen, so gelangt man zu folgendem

Satz VII: *Jede Hamiltonsche Gruppe ist das direkte Produkt einer Quaternionengruppe, einer Abelschen Gruppe, deren sämtliche*

Elemente die Ordnung 2 haben, und einer Abelschen Gruppe von ungerader Ordnung.

Dieses Ergebnis ist noch weitergehend als das des Herrn Dedekind. Auch die Umkehrung gilt:

Jedes derartige Produkt ist eine Hamiltonsche Gruppe.

Denn werden die Faktoren eines solchen Produktes bzhw. mit $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$ bezeichnet, so ist jedes demselben angehörige Element in G in der Form darstellbar KPR, wo K, P, R Elemente bzhw. von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{R}$ bedeuten, wo ferner K, P und R miteinander vertauschbar sind und wo die Ordnung von P gleich 2, die von R eine ungerade Zahl r und die von K gleich 1, 2 oder 4 ist, jenachdem $K = 1$ oder gleich dem in $\mathfrak{K}$ enthaltenen Element D zweiter Ordnung oder ein anderes Element von $\mathfrak{K}$ ist. Da $G^\sigma = K^\sigma P^\sigma R^\sigma$ ist, so ist $G^{2r} = D$, falls K vom 4^{ten} Grade ist, sonst $= 1$. Jede Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$, welche nur solche Elemente enthält, die mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbar sind, ist selbstverständlich ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Gehört aber zu $\mathfrak{G}_1$ ein nicht mit allen Elementen von $\mathfrak{G}$ vertauschbares Element $G = KPR$, so muß, da dann $G^{2r} = D$ ist, auch D in $\mathfrak{G}_1$ enthalten sein. Ist nun $G' = K'P'R' = P'R'K'$ irgend ein Element in $\mathfrak{G}$, so hat man

$$G'^{-1}GG' = K'^{-1}R'^{-1}P'^{-1}(KPR)P'R'K' = K'^{-1}(KPR)K'$$
$$= (K'^{-1}KK')PR = KDPR = (KPR)D = GD.$$

Alle zu G konjugierten Elemente sind demnach in $\mathfrak{G}_1$ enthalten, d. h. aber, $\mathfrak{G}_1$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Bremen, den 5. Dezember 1903.

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Aufl. In 2 Teilen. I. Teil: Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektiven Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. [XXIV u. 451 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 10.—, geb. n. ℳ 11.—

Föppl, Dr. Aug., Professor an der Königl. Technischen Hochschule zu München, früher Oberlehrer an der Städt. Gewerbeschule zu Leipzig, Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. gr. 8. Preis des ganzen Werkes in 4 Leinwand-Bänden n. ℳ 44.—

I. Band: Einführung i. d. Mechanik. (1. Aufl. 1898.) 2. Aufl. [XIV u. 412 S.] 1900. geh. n. ℳ 10.—
II. — Graphische Statik. (1. Aufl. 1900.) 2. Aufl. [XII u. 471 S.] 1903. geh. n. ℳ 10.—
III. — Festigkeitslehre. (1. Aufl. 1897.) 2. Aufl. [XVIII u. 512 S.] 1900. geh. n. ℳ 12.—
IV. — Dynamik. (1. Aufl. 1899.) 2. Aufl. 1901. [XV u. 506 S.] geh. n. ℳ 12.—

Fort, O. und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Aufl. besorgt von H. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] 1904. gr. 8. geh. n. ℳ 4.—, geb. n. ℳ 4.80.

Gantter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. ℳ 3.—
I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 6. Aufl. [IV u. 187 S.] 1903.
II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 5. Aufl. [X u. 186 S.] 1902.

Gauß, Carl Friedrich, Werke. Herausgegeben von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. gr. 4. kart.

Band I: Disquisitiones arithmeticae. 2. Abdr. [478 S.] 1870. n. ℳ 20.—
— II: Höhere Arithmetik. 2. Abdr. [523 S.] 1876. n. ℳ 16.— Nachtrag zum ersten Abdr. der 2 Bände. [32 S.] 1876. n. ℳ 2.—
— III: Analysis. 2. Abdr. [496 S.] 1876. n. ℳ 20.—
— IV: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 2. Abdr. [402 S.] 1880. n. ℳ 25.—
— V: Mathematische Physik. 2. Abdr. [642 S.] 1877. n. ℳ 25.—
— VI: Astronomische Abhandlungen und Aufsätze. 2. Abdr. [664 S.] 1874. n. ℳ 32.—
— VIII: Nachträge zur Arithmetik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie; insbesondere Grundlagen der Geometrie. [III u. 452 S.] 1900. n. ℳ 24.—
— IX: Geodätische Nachträge zu Band IV; insbesondere Hannoversche Gradmessung. [IV u. 328 S.] 1903. n. ℳ 26.—

Band VII wird außer dem neuen Abdruck der Theoria motus eine vollständige Darstellung von Gauß' ausgedehnten Arbeiten über astronomische Störungsrechnung bringen. Band X biographische Angaben und interessante Stücke des Briefwechsels bieten.

Geißler, Dr. Kurt, die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. [VIII u. 417 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 16.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. I. Teil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Mit 45 Figuren im Text. [X u. 452 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 16.—

Hamel, Dr. phil. Georg, Assistent für theoret. Mechanik, die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik. (Sonderabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 50. Band. 1904. 1. u. 2. Heft.) [57 S.] gr. 8. geh. ℳ 1.60.

Haentzschel, Dr. Emil, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule und am Köllnischen Gymnasium zu Berlin. Das Erdsphäroid und seine Abbildung. Mit 16 Text-Abbildungen. [VIII u. 140 S.] 1903. gr. 8. geh. n. ℳ 5.40.

Hilbert, Dr. David, o. Professor an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 175 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 5.20, geb. ℳ 5.60.

Klein, F., und A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8.
Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. geh. n. ℳ 5.60, in Leinwand geb. n. ℳ 6.60.
— II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. geh. n. ℳ 10.—, in Leinwand geb. n. ℳ 11.—
— III. Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] 1903. geh. n. ℳ 9.—

König, Julius, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. Aus dem Ungarischen übertragen vom Verfasser. [X u. 664 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 18.—, geb. n. ℳ 20.—

Koenigsberger, Leo, Carl Gustav Jakob Jacobi. Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. Mit einem Bildnis und dem Faksimile eines Briefes. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 16.—

——— Carl Gustav Jakob Jacobi. Rede zu der von dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Heidelberg veranstalteten Feier der hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages, gehalten am 9. August 1904. Mit einem Bildnis C. G. J. Jacobis. [II u. 40 S.] 4. 1904.

Kraner, Dr. Adolf, o. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 9 Textfiguren. gr. 8. 1903. [XXIV u. 309 S.] In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Mathematik. In zwei Teilen. II. Teil: Vorlesungen über Arithmetik. 2. Abschnitt: Vorlesungen über die Theorie der Determinanten. 1. Band: Erste bis einundzwanzigste Vorlesung. Bearbeitet und fortgeführt von Dr. Kurt Hensel. Mit 11 Fig. im Text. [XII u. 390 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 20.—, geb. n. ℳ 21.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, die Proportion des goldenen Schnittes als das geometrische Ziel der stetigen Entwicklung und die daraus hervorgehende Fünfgestalt mit ihrer durchgreifenden Fünfgliederung. Mit 15 Figuren auf 4 Tafeln. [36 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.60.

Lobatschefskijs, N. G., imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Dr. Heinrich Liebmann, Privatdozent an der Universität Leipzig. Mit 59 Figuren im Text und einer Tafel am Schluß. (A. u. d. Titel: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XIX. Heft.) gr. 8. 1904. [U. d. Pr.]

Müller, Conrad H., Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [93 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 2.—

Netto, Dr. Eugen, o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 19 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. Niels, Privatdozent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 14.—

Ostenfeld, A., Professor an der Technischen Hochschule zu Kopenhagen. Technische Statik. Vorlesungen über die Theorie der Tragkonstruktionen. Deutsche Ausgabe besorgt von D. Skouge. Mit 25 lithographierten Tafeln. [VIII u. 457 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.—

Pfeiffer, Dr. Emanuel, Professor an der Königl. Industrieschule zu München, physikalisches Praktikum für Anfänger. Dargestellt in 25 Arbeiten. Mit 47 in den Text gedruckten Abbildungen. [VIII u. 150 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.60.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geh. n. ℳ 4.80.

Reichel, Dr. Otto, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 30 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 2.40.

Salmon, George, Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zweiter Teil. Sechste Auflage. [XXIV u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 8.—, geb. ℳ 9.—

Schenk, Dr. ing. Julius, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 1.60.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1869 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

59. Band. 3. Heft.

Mit 6 Figuren im Text.

Ausgegeben am 27. Oktober.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer.
Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 3.40; 2. [112 S.] 1899. ℳ 3.40; 3. [128 S.] 1899. ℳ 3.80; 4. [160 S.] 1900. ℳ 4.80; 5. [208 S.] 1900. ℳ 6.40; 6. [272 S.] 1901. ℳ 7.20; 7. [128 S.] 1902. ℳ 3.60; 8. [XXXVIII u. 77 S.] 1904. ℳ 3.60

II. **Analysis**, 2 Teile, red. von H. Burkhardt.
I. Teil. Heft: 1. [168 S.] 1899. ℳ 4.80; 2./3. [248 S.] 1900. ℳ 7.60; 4. [160 S.] ℳ 4.80; 5. [128 S.] 1904. ℳ 4.—
II. Teil. Heft: 1. [176 S.] 1901. ℳ 5.20

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von Frz. Meyer.
II. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.60.
II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1904. ℳ 2.80.
III. Teil. Heft: 1. [168 S.] 1902. ℳ 5.40
——— Heft: 2/3. [256 S.] 1903. ℳ 6.80

IV. **Mechanik**, 4 Teile, red. von F. Klein.
I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. ℳ 3.40; 2. [156 S.] 1902. ℳ 4.60; 3. [136 S.] 1903. ℳ 4.60.
II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. ℳ 3.80; 2. [131 S.] 1903. ℳ 3.60.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld.
I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1903. ℳ 4.80.
II. Teil. Heft: 1. [180 S.] 1904. ℳ 5.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie u. Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.
VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie Generalregister.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 6.—

Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.
Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.
Rich. Hindy, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwendung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems".

Ahrens, Dr. W., Scherz und Ernst in der Mathematik. Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 322 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 6.—

Alexandroff, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow, Aufgaben aus der niederen Geometrie. Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuster, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 2.40.

Bauer, Dr. Gustav, Geheimrat, o. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, a. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 376 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungar. Naturwissenschaftl. Gesellschaft. Herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius Kőnig, Karl von Than. Redigiert von Josef Kürschák und Franz Schaffarik, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XIX. Band. [XIV u. 492 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 8.—

Blochmann, Dr. Rudolf in Kiel, die drahtlose Telegraphie in ihrer Verwendung für nautische Zwecke. Nach einem auf der 34. Jahresversammlung des Deutschen Nautischen Vereins in Berlin gehaltenen Vortrage dargestellt. [24 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ —.60.

Bolyai de Bolya, Joannes, Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova lidata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Josephus Kürschák, Maximilius Réthy, Béla Törökv de Zeperhegy, Academiae Scientiarum Hungaricae socios. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. n. ℳ 4.—

——— libellus post saeculum quam Joannes Bolyai de Bolya annum MDCCCII a. d. XVIII kalendas Ianuarias Claudiopoli natus est ad celebrandum memoriam ejus immortalem ex consilio ordinis Mathematicorum et Naturae Scrutatorum Regiae Litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Iosephinae Claudiopolitanae editus. [XV u. 155 S.] 4. 1903. geh. n. ℳ 6.—

[Fortsetzung auf der 2. Seite Umschlag.]

Sophus Lie.

Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen.

Aus dem Nachlasse herausgegeben

von

Friedrich Engel in Greifswald.

Bemerkungen des Herausgebers.

Das hier Mitgeteilte entstammt einem Manuskripte, das sich in dem umfangreichen handschriftlichen Nachlasse von Lie vorgefunden hat und das auf dem Umschlage die Überschrift trägt:

„Sophus Lie, Geometrie der Berührungstransformationen. Zweiter Band. Die Redaktion angefangen im Mai 1896".

Da ein beträchtlicher Teil der im Manuskript enthaltenen Aufzeichnungen nahezu druckfertig war, so erschien es nicht angebracht, die Veröffentlichung auf die Zeit zu verschieben, wo die geplante Gesamtausgabe der Lieschen Abhandlungen wirklich im Gange sein wird, zumal sich immer noch nicht auch nur annähernd bestimmen läßt, wann es dazu kommt. Die Angehörigen Lies haben deshalb die erwähnten Aufzeichnungen der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung zur Verfügung gestellt, und ich habe es übernommen, sie für den Druck fertig zu machen, soweit das tunlich war. Sie werden außer in den Mathematischen Annalen auch noch selbständig in Buchform erscheinen. Doch muß ich bemerken, daß ich diese Arbeit erst übernommen habe, nachdem ich mich vorher der Zustimmung meines Freundes Scheffers versichert hatte, dem ich als dem Mitherausgeber des ersten Bandes der Geometrie der Berührungstransformationen hier unbedingt den Vorrang gelassen haben würde, hätte er darauf bestanden. Jedenfalls möchte ich ihm hiermit auch öffentlich meinen Dank dafür aussprechen, daß er auf seine Ansprüche an die Herausgabe verzichtet und diese mir überlassen hat.

Es bleibt mir jetzt nur noch übrig, einige Mitteilungen über das Liesche Manuskript zu machen und die Grundsätze anzugeben, die ich bei der Vorbereitung für den Druck befolgt habe.

Das Manuskript besteht aus fünf Faszikeln von zum Teil nur einseitig beschriebenen Foliobogen. In dem ersten ist das Kapitel I enthalten und dieses war so gut wie druckfertig, ich brauchte nur die Nummern der Formeln, sowie der Sätze und Theoreme hinzuzufügen, außerdem hie und da die Sprache ein wenig zu verbessern, wobei ich mich übrigens auf das Allernötigste beschränkt habe. Das zweite Faszikel enthält in druckfertiger Redaktion die beiden ersten Paragraphen des Kapitels II (S. 241—271) und in vier Folioblättern den Anfang eines § 3, überschrieben: „Intermediäre Integralgleichungen der Monge-Ampèreschen Gleichungen". Da sich aber in dem dritten Faszikel eine vorläufige Ausarbeitung der Entwicklungen über Monge-Ampèresche Gleichungen vorfand, die ohne einschneidende Änderungen für den Druck zurecht gemacht werden konnte, so habe ich diese, in die zwei Paragraphen 3 und 4 geteilt, dem Kapitel II hinzugefügt. Auf S. 276, Z. 12 v. u.—278, Z. 2 habe ich dabei anstatt der vorläufigen Redaktion den vorhin erwähnten Anfang des von Lie projektierten § 3 eingeschaltet und außerdem auch noch einige in dem vierten Faszikel enthaltene Notizen verwertet (auf S. 287, Z. 12 v. u—289, Z. 12 v. u.). Da die Anordnung, welche Lie diesem Stoffe bei der endgültigen Redaktion zu geben beabsichtigte, doch nicht mehr zu ermitteln war, schien mir dieses Verfahren das einzig mögliche.

Außer der schon genannten vorläufigen Redaktion von Betrachtungen über Monge-Ampèresche Gleichungen enthält das dritte Faszikel noch viererlei: Erstens eine vorläufige Ausarbeitung von Kapitel I, die ganz unberücksichtigt bleiben konnte. Zweitens auf 31 Folioseiten eine vorläufige Redaktion eines Kapitels III, die ich hier, nur im einzelnen etwas näher ausgeführt, als Kapitel III mitteile. Drittens 16 Folioseiten mit Entwicklungen, die das vierte Kapitel bilden sollten und die sich auf den tetraedralen Komplex beziehen. Ich habe vorgezogen, diese zum Teil nur skizzierten Betrachtungen hier nicht mit aufzunehmen, weil in Lies handschriftlichem Nachlasse noch andere ausgedehnte Manuskripte über diese Theorien enthalten sind und es mir besser scheint, daß diese Untersuchungen später zusammen veröffentlicht werden. Dazu kommen endlich viertens 19 Folioseiten mit Notizen über infinitesimale Berührungstransformationen und über Monge-Ampèresche Gleichungen, die infinitesimale Berührungstransformationen gestatten, alles zu skizzenhaft, als daß es angebracht wäre, es zu veröffentlichen, bevor der übrige Nachlaß durchforscht ist.

Das vierte Faszikel enthält 55 S. mit Notizen des verschiedensten Inhalts, zum Teil erste ganz vorläufige Aufzeichnungen für Kapitel I—III. Einiges wenige daraus habe ich benutzen können, um die Darstellung in Kapitel II und III an einzelnen Punkten zu ergänzen. Das fünfte Faszikel

enthält ein Blatt mit Auszügen aus Briefen, die A. Mayer in früheren Jahren an Lie gerichtet hat.

So viel über die Beschaffenheit des Lieschen Manuskriptes. Ich habe mich bei den Abschnitten, die Lie selbst noch nicht in druckfertiger Fassung redigiert hatte, bemüht, die zum Teil recht knappe Darstellung des Manuskriptes so zu redigieren, daß alles möglichst leicht verständlich wurde. Zusätze, die ich zu diesem Zwecke für nötig hielt und die nicht bloß eine nähere Ausführung des im Manuskript ausdrücklich Gesagten sind, habe ich durch Einschließung in geschweifte Klammern { } gekennzeichnet.

Leipzig, den 9. Oktober 1903.

F. Engel.

Kapitel I.

Die Berührungstransformationen des Raumes und ihre Bestimmung.

Die beiden Begriffe Flächenelement und Elementverein, sowie den allgemeinen Begriff: Berührungstransformation des Raumes haben wir schon im ersten Bande dieses Werkes eingeführt. In diesem Kapitel zeigen wir nun, wie man *alle* Berührungstransformationen des Raumes findet. Dabei glauben wir, daß es für einige Leser nützlich sein wird, wenn wir zuerst an unsre Definitionen dieser fundamentalen Begriffe erinnern und gleichzeitig eine rein geometrische Bestimmung aller Elementvereine vorausschicken.

§ 1.

Die Einteilung aller Berührungstransformationen in drei Klassen.

Ein Punkt x, y, z und eine hindurchgehende Ebene

$$\mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0$$

bilden eine geometrische Figur, die von fünf Bestimmungsstücken, nämlich den Größen x, y, z, p, q, abhängt. Diese geometrische Figur bezeichnen wir als ein *Flächenelement* oder noch kürzer als ein *Element*. Die Bestimmungsstücke x, y, z, p, q dieser Figur nennen wir die *Koordinaten des Flächenelementes*. Der Inbegriff aller Flächenelemente des Raumes bildet eine fünfdimensionale Mannigfaltigkeit, die wir zuweilen als *den Raum der Flächenelemente* bezeichnen.

Wir sagen, daß *ein Flächenelement x, y, z, p, q mit dem unendlich be-*

nachbarten Elemente $x + dx,\ y + dy,\ z + dz,\ p + dp,\ q + dq$ *vereinigt liegt*, wenn die Ebene

$$\zeta - z - p(\xi - x) - q(\eta - y) = 0$$

des ersten Elementes den Punkt $x + dx,\ y + dy,\ z + dz$ des benachbarten Elementes enthält, und somit die Gleichung

$$dz - pdx - qdy = 0$$

besteht.

Eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten x, y, z, p, q bestimmen eine *Schar von Flächenelementen*. So zum Beispiel bestimmen zwei Gleichungen von der Form:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad q - Q(x, y, z, p) = 0$$

eine Schar von ∞^3 Elementen, deren Punkte auf der Fläche $\varphi = 0$ liegen und diese Fläche ausfüllen. Wählen wir einen bestimmten Punkt der Fläche $\varphi = 0$ und tragen die Koordinaten x, y, z dieses Punktes in die Gleichung $q - Q(x, y, z, p) = 0$ ein, so finden wir ∞^1 Wertsysteme p, q, die diese Relation erfüllen; die hiermit bestimmten ∞^1 Elemente umhüllen einen *Elementarkegel*, dessen Spitze der Punkt x, y, z ist. Wir drücken dies kurz so aus:

Zwei Gleichungen von der Form

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad q - Q(x, y, z, p) = 0$$

bestimmen eine Schar von ∞^3 Elementen, deren *Punktort* die Fläche $\varphi = 0$ ist. Jeder Punkt dieser Fläche ist die Spitze eines Elementarkegels, dessen ∞^1 Elemente der Schar angehören.

Liegen andererseits in den Elementkoordinaten zwei Gleichungen:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

vor, die von p und q frei sind, so definieren diese Gleichungen wiederum eine Schar von ∞^3 Elementen; jetzt aber ist der *Punktort* dieser Elemente keine Fläche sondern eine *Kurve;* die Schar besteht ja aus *allen* Elementen, deren Punkte auf der Kurve $F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0$ gelegen sind.

Liegen endlich zwei Gleichungen in x, y, z, p, q vor, die nach p und q aufgelöst werden können, so bestimmen die aufgelösten Gleichungen

$$p = P(x, y, z), \quad q = Q(x, y, z)$$

∞^3 Elemente, deren *Punktort der Raum* ist. Dabei macht es übrigens einen wesentlichen Unterschied, ob die Pfaffsche Gleichung

$$dz - pdx - qdy = 0$$

integrabel ist oder nicht, weil die ∞^3 Elemente sich nur im ersten Falle zu ∞^1 Flächen zusammenfassen lassen.

In entsprechender Weise *gehört zu jeder Schar von Flächenelementen ein bestimmter Punktort*, und dieser Punktort ist entweder ein Punkt oder

eine Kurve oder eine Fläche oder der Raum selbst. In jedem einzelnen Falle findet man die analytische Definition des betreffenden Punktorts, indem man zwischen den Gleichungen:

$$F_k(x, y, z, p, q) = 0, \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

der gegebenen Elementschar die Größen p und q eliminiert. Die hervorgehenden Gleichungen zwischen x, y, z allein bestimmen immer den gesuchten Punktort.

Benutzen wir den hiermit explizite eingeführten Begriff: *Punktort einer Elementschar*, so können wir sehr leicht diejenigen Elementscharen bestimmen, die wir im ersten Bande als *Elementvereine* bezeichnet haben. Erinnern wir uns nämlich unserer Definition, daß *eine Elementschar dann und nur dann einen Elementverein bildet, wenn jedes Element der Schar mit allen benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt*, so erkennen wir, daß die Elemente eines Vereines nie den Raum ausfüllen können; die Definition eines Vereines zeigt ja unmittelbar, daß alle Punkte $x + dx, y + dy, z + dz$ des zugehörigen Punktortes, die in der Umgebung eines beliebigen Punktes x, y, z dieses Ortes liegen, in einer *Ebene* enthalten sein müssen.

Der Punktort eines Elementvereins ist daher entweder eine Fläche oder eine Kurve oder ein Punkt.

Ist der Punktort des vorgelegten Elementvereins eine *Fläche* $z = \varphi(xy)$, so gehört jeder Punkt dieser Fläche einem und nur einem Elemente der Schar an; denn durch jeden nicht singulären Punkt einer Fläche geht eine und nur eine Ebene, die alle unendlich benachbarten Punkte der Fläche enthält. In diesem Falle besteht somit der Elementverein aus allen ∞^2 Elementen:

$$z = \varphi(xy), \quad p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

der Fläche $z = \varphi$.

Ist andererseits der Punktort eines vorgelegten Elementvereins eine Kurve, deren Gleichungen etwa die Form: $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$ besitzen, so gehören zu jedem Punkte P dieser Kurve jedenfalls nur solche Elemente, deren Ebenen die Kurve in P berühren. Nun gibt es aber für jeden Punkt P der Kurve ∞^1 Elemente, die diese Bedingung erfüllen, und daher enthält der gesuchte Elementverein höchstens ∞^2 Elemente, unter Umständen aber nur ∞^1 Elemente. Im ersten Falle besteht der Verein aus *allen* ∞^2 Elementen der Kurve und wird daher durch die Gleichungen

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z), \quad 1 - p\varphi'(z) - q\psi'(z) = 0$$

definiert. Im zweiten Falle besteht der Verein aus ∞^1 Elementen der Kurve, die dann einen *Elementstreifen* bilden.

Liegt endlich ein Elementverein vor, dessen Punktort der Punkt

$x = a$, $y = b$, $z = c$ ist, so sind wiederum zwei Fälle möglich, jenachdem der Verein ∞^2 oder nur ∞^1 Elemente umfaßt. Im ersten Falle sind:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

die Gleichungen des Vereins; im anderen Falle bilden die ∞^1 Elemente des Vereins einen *Elementarkegel.*

Ein Elementverein enthält daher nie mehr als ∞^2 Elemente; ein Verein mit ∞^2 Elementen besteht aus den Elementen einer Fläche oder aus den Elementen einer Kurve oder aus den Elementen eines Punktes.

Wenden wir uns jetzt zu dem Begriffe *Berührungstransformation des Raumes.*

Fünf Gleichungen von der Form

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die auch nach x, y, z, p, q auflösbar sind, bestimmen eine *Elementtransformation,* sie ordnen also jedem Elemente x, y, z, p, q des Raumes x, y, z ein Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 des Raumes x_1, y_1, z_1 zu. Eine Elementtransformation führt jede Elementschar in eine Elementschar über; dagegen ist es keineswegs sicher, daß eine vorgelegte Elementtransformation jeden Elementverein in einen Elementverein überführt. Unter den Elementtransformationen gibt es aber einige und zwar außerordentlich viele, die auch diese Eigenschaft besitzen, und diese Transformationen sind es, die wir als Berührungstransformationen bezeichnen.

Eine Transformation

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

in den Elementkoordinaten x, y, z, p, q heißt eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z, wenn sie jeden Elementverein des Raumes in einen Elementverein überführt.

Eine Elementtransformation ist daher eine Berührungstransformation, wenn sie unendlich benachbarte Elemente x, y, z, p, q und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $p + dp$, $q + dq$, die vereinigt liegen und somit die Pfaffsche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

erfüllen, in ebensolche Elemente überführt. Wir können daher unsere Definition auch rein *analytisch**) in der folgenden Weise formulieren:

*) Die im Texte gegebene *analytische* Definition des Begriffes Berührungstransformation ist die wahre Definition dieses Begriffes; die zuerst gegebene Definition ist im Grunde nur eine Deutung, nicht aber die einzig mögliche Deutung des Begriffes, wie wir im letzten Paragraphen dieses Kapitels eingehend zeigen werden.

Eine Transformation

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

in den Veränderlichen x, y, z, p, q ist dann und nur dann eine Berührungstransformation des Raumes x, y, z, wenn vermöge der Transformation eine Relation von der Form

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 = \varrho(x, y, z, p, q) \cdot (dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht.

Dabei leuchtet unmittelbar ein, daß die Größe ϱ nicht identisch gleich Null sein kann; bestände nämlich die Relation $dZ - P\,dX - Q\,dY = 0$ identisch in x, y, z, p, q, so wären die Größen X, Y, Z, P, Q durch endliche Relationen verknüpft, in denen x, y, z, p, q nicht explizite vorkämen.

Da eine Berührungstransformation jeden Elementverein in einen Elementverein und selbstverständlich Vereine mit ∞^2 Elementen in ebensolche überführt, so ergibt sich ohne weiteres, daß *alle Berührungstransformationen des Raumes in drei getrennte Kategorien zerfallen, jenachdem die Punkte des Raumes in Flächen, Kurven oder Punkte übergehen.*

In diesem Kapitel nehmen wir unseren Ausgangspunkt in dieser *Klassifikation aller Berührungstransformationen.* Dabei sehen wir zunächst von denjenigen Berührungstransformationen ab, die Punkte in Punkte überführen und daher faktisch *Punkttransformationen* des Raumes darstellen.

Zuerst geben wir elementare Methoden zur Bestimmung aller Berührungstransformationen. Sodann deuten wir die gefundenen Resultate durch einfache geometrische Betrachtungen; in § 4 und 5 des Kapitels stellen wir endlich *charakteristische Differentialgleichungen* auf, die in den folgenden Untersuchungen eine fundamentale Rolle spielen werden.

§ 2.

Bestimmung aller Berührungstransformationen, die Punkte in Flächen überführen.

Wir wenden uns jetzt zu der Bestimmung derjenigen Berührungstransformationen, die alle Elemente eines *Punktes* allgemeiner Lage in die Elemente einer *Fläche* überführen.

Die Elemente eines Punktes werden durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

definiert, in denen a, b und c Konstante bezeichnen. Die transformierten Elemente werden durch die *fünf* Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = X(a,b,c,p,q), & y_1 = Y(a,b,c,p,q), & z_1 = Z(a,b,c,p,q), \\ & p_1 = P(a,b,c,p,q), & q_1 = Q(a,b,c,p,q) \end{cases}$$

bestimmt, und wir finden dementsprechend den Punktort der ∞^2 transformierten Elemente, indem wir die Größen p und q zwischen den *drei* Gleichungen

$$x_1 = X(a,b,c,p,q), \quad y_1 = Y(a,b,c,p,q), \quad z_1 = Z(a,b,c,p,q)$$

eliminieren. Da nun dieser Punktort eine *Fläche* sein soll, so darf diese Elimination nur *eine* Gleichung:

$$\Omega(a,b,c,x_1,y_1,z_1) = 0$$

zwischen den Größen a, b, c, x_1, y_1, z_1 liefern.

Wenn aber der Punktort eines Elementvereins eine Fläche ist, so sind die Elemente des Vereins gerade die ∞^2 Elemente dieser Fläche.

Es hat sich also ergeben:

Satz 1. *Eine Berührungstransformation*

$$x_1 = X(x,y,z,p,q), \quad y_1 = Y(x,y,z,p,q), \quad z_1 = Z(x,y,z,p,q),$$
$$p_1 = P(x,y,z,p,q), \quad q_1 = Q(x,y,z,p,q)$$

führt dann und nur dann die ∞^3 Punkte des Raumes in ∞^3 Flächen über, wenn sich aus den Gleichungen der Transformation nur eine Relation

$$\Omega(x,y,z,x_1,y_1,z_1) = 0$$

zwischen den Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1 herleiten läßt. Faßt man in der Gleichung $\Omega = 0$ die Größen x, y, z als Parameter auf, so stellt $\Omega = 0$ ∞^3 Flächen des Raumes x_1, y_1, z_1 dar und zwar werden die ∞^3 Punkte des Raumes x, y, z von der vorgelegten Berührungstransformation in die soeben gefundenen Flächen übergeführt.

Löst man die Gleichungen einer Berührungstransformation

$$(1)\qquad x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

nach x, y, z, p, q auf, so bestimmen die aufgelösten Gleichungen

$$(3)\quad \begin{cases} x = \overline{X}(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1), & y = \overline{Y}(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1), & z = \overline{Z}(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1), \\ & p = \overline{P}(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1), & q = \overline{Q}(x_1,y_1,z_1,p_1,q_1) \end{cases}$$

offenbar wiederum eine Berührungstransformation. Diese neue Transformation heißt die *inverse* Transformation der ersten Berührungstransformation. *Zwei inverse Berührungstransformationen* sind insofern äquivalent, als sie *dieselbe Zuordnung* zwischen den Elementen der beiden Räume definieren; aufgefaßt als *Operationen* sind sie dagegen verschieden, weil die erste Transformation jedes Element x, y, z, p, q nach der Lage x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 bringt, während die inverse Transformation das Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 nach seiner ursprünglichen Lage x, y, z, p, q zurückführt.

Gibt die Elimination der Größen p, q, p_1, q_1 zwischen den Gleichungen (2) einer Berührungstransformation nur *eine* Relation:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen den Punktkoordinaten beider Räume, so liefert das äquivalente Gleichungssystem (3) der *inversen* Transformation ebenfalls nur eine Gleichung, nämlich $\Omega = 0$ zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1.

Es gilt daher der Satz:

Satz 2. *Führt eine Berührungstransformation des Raumes jeden Punkt* $x = a, y = b, z = c$ *in eine Fläche und zwar in die Fläche*

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

über, so führt auch die inverse Berührungstransformation jeden Punkt $x_1 = a_1, y_1 = b_1, z_1 = c_1$ *in eine Fläche und zwar in die Fläche*

$$\Omega(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0$$

über.

Wir können aber noch weiter gehen und beweisen, daß eine Berührungstransformation, deren Gleichungen eine und nur eine Relation

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 liefern, durch die Form der Gleichung $\Omega = 0$ vollständig bestimmt ist.

Um dies nachzuweisen, nehmen wir unseren Ausgangspunkt in der evidenten Bemerkung, daß zwei Elementvereine mit einem gemeinsamen Elemente von jeder Berührungstransformation in zwei Vereine mit einem gemeinsamen Elemente übergeführt werden müssen.

Da eine beliebig gewählte Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ mit jedem auf ihr gelegenen Punkte $x = a_0, y = b_0, z = c_0$ ein Element gemein hat, können wir schließen, daß die Fläche $\varphi = 0$ und ihr Punkt $x = a_0, y = b_0, z = c_0$ in zwei Elementvereine mit einem gemeinsamen Element übergehen. Da andererseits jeder auf $\varphi = 0$ gelegene Punkt in eine Fläche, nämlich in die Fläche $\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0$ übergeht, so erkennen wir, daß die der Fläche $\varphi = 0$ entsprechende Bildfigur mit einer jeden unter den ∞^2 Flächen

$$\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a_0, b_0, c_0) = 0 \tag{4}$$

ein Element gemein hat. Die gesuchte Bildfigur der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ ist somit das Umhüllungsgebilde der ∞^2 Flächen (4) und wird dementsprechend nach bekannten Regeln gefunden. Man bildet die Gleichungen

$$\Omega(a_0, b_0, c_0, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a_0, b_0, c_0) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial a_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial b_0} + \frac{\partial \Omega}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial b_0} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial b_0} = 0,$$

eliminiert zwischen ihnen die Größen:

$$a_0,\ b_0,\ c_0,\ \frac{\partial c_0}{\partial a_0},\ \frac{\partial c_0}{\partial b_0}$$

und findet so im allgemeinen nur *eine* Relation $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ zwischen x_1, y_1, z_1, die dann die *Bildfläche* der ursprünglich gegebenen Fläche $\varphi = 0$ darstellt. Gibt die Elimination *zwei* Relationen zwischen x_1, y_1, z_1, so führt die vorliegende Berührungstransformation die Fläche $\varphi = 0$ nicht in eine Fläche sondern in eine *Kurve* über.

Folglich hat sich ergeben:

Satz 3. *Führt eine Berührungstransformation jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ allgemeiner Lage in eine Fläche und zwar in die Fläche*

$$\Omega(a, b, c, x, y, z) = 0$$

über, so transformiert sie eine beliebig gegebene Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ im allgemeinen in eine Fläche, ausnahmsweise aber in eine Kurve oder gar in einen Punkt. Man findet die Gleichungen dieser Bildfigur in Cartesischen Koordinaten, indem man zwischen den sechs Gleichungen:

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a, b, c) = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a} = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial b} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial b} = 0,$$

die Größen $a, b, c, \frac{\partial c}{\partial a}, \frac{\partial c}{\partial b}$ eliminiert. Die hierdurch hervorgehenden Relationen zwischen x_1, y_1, z_1 stellen die gesuchte Bildfigur dar.

Wünscht man andererseits die vorgelegte Berührungstransformation auf eine *Kurve* mit den Gleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$, $\psi(x, y, z) = 0$ auszuführen, so bemerkt man, daß diese Kurve mit jedem auf ihr gelegenen Punkte ∞^1 Elemente gemein hat, die ein Büschel bilden. Daher hat auch die gesuchte Bildfigur mit einer jeden unter den ∞^1 Flächen:

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \varphi(a, b, c) = 0, \quad \psi(a, b, c) = 0 \tag{5}$$

einfach unendlich viele Elemente gemein. Also ist die Bildfigur das Umhüllungsgebilde der ∞^1 Flächen (5).

Die vorstehenden Entwicklungen zeigen, daß eine Berührungstransformation, deren Gleichungen nur *eine* Relation $\Omega = 0$ zwischen den Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1 liefern, durch die Form dieser Relation $\Omega = 0$ vollständig bestimmt ist, wie früher angekündigt wurde.

Wenn aber auch diese Betrachtungen dem Wesen der Sache nach als streng anerkannt werden dürfen, so müssen wir es doch als eine methodische Unvollkommenheit bezeichnen, daß der Beweisgang ein verschiedener war, jenachdem die Transformation auf eine Fläche, eine Kurve

oder einen Punkt ausgeführt wurde. Da wir nun in der Geometrie der Berührungstransformationen gerade darauf Gewicht legen, daß zwischen den Begriffen Fläche, Kurve und Punkt kein wesentlicher Unterschied besteht, wollen wir einen neuen Beweis entwickeln, der an dem gerügten Mangel nicht leidet.

Aus den endlichen Gleichungen (1) der von uns betrachteten Berührungstransformation läßt sich nach unsrer Annahme nur eine einzige endliche Relation zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 nämlich die Gleichung:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ableiten. Daher erfüllen auch die zugehörigen Differentiale dx, dy, dz, dx_1, dy_1 und dz_1 eine und nur eine Relation nämlich die durch Differentiation hervorgehende lineare Differentialgleichung:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}dz_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz + \frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy = 0.$$

Wir wissen andererseits, daß vermöge der Gleichungen der Transformation eine Relation von der Form

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(xyzpq)\cdot(dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

besteht. Also dürfen wir schließen, daß die Koeffizienten der sechs Differentiale in diesen beiden linearen Relationen paarweise vermöge der Gleichungen der Transformation proportional sind. Die fünf hiermit gefundenen endlichen Gleichungen

$$\frac{\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}}{1} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}}{-p_1} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}}{-q_1} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial z}}{-\varrho} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial x}}{\varrho p} = \frac{\frac{\partial\Omega}{\partial y}}{\varrho q}$$

müssen bei passender Wahl der Größe ϱ vermöge der Gleichungen der Transformation bestehen. Also sind auch die *vier* Gleichungen

$$(6)\quad \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,$$

die nach der Elimination von ϱ übrig bleiben, eine Folge der Gleichungen unserer Transformation (1).

Da nun auch die Gleichung $\Omega = 0$ eine Folge der Gleichungen (1) ist, so liegt es auf der Hand, daß die *fünf* Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega = 0, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + p\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + q\dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

wenn sie überhaupt voneinander unabhängig sind, durch Auflösung nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 unsere Transformationsgleichungen (1) reproduzieren.

Daß aber die fünf Gleichungen (7) unabhängig sind, oder was im vorliegenden Falle auf dasselbe hinauskommt, daß die Gleichung $\Omega = 0$ alle sechs Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1, wirklich enthält, können wir leicht nachweisen.

Enthielte in der Tat die Gleichung $\Omega = 0$ zum Beispiel x_1 nicht, so gingen alle Punkte des Raumes x, y, z in Zylinderflächen mit parallelen gradlinigen Erzeugenden über. Das ist aber unmöglich, weil alle Elemente dieser Zylinder die Gleichung

$$p_1 = 0$$

erfüllen. Eine Berührungstransformation des Raumes führt aber nie *alle* ∞^5 Elemente x, y, z, p, q in Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 über, die eine Bedingungsgleichung erfüllen.

Hiermit ist bewiesen

Satz 4. *Weiß man, daß eine gewisse Berührungstransformation des Raumes jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ allgemeiner Lage in eine Fläche und zwar in die Fläche*

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

überführt, so lassen sich die Gleichungen der Transformation auf die Form

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1 \dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x} + p \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y} + q \dfrac{\partial\Omega}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

bringen. Die Relation $\Omega = 0$ bestimmt die Form der Transformationsgleichungen vollständig.

Hierbei ist aber wohl zu beachten, daß man keineswegs sagen darf, daß die Gleichungen (7) die allgemeine Form aller Berührungstransformationen liefern, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen. So wäre der Fall gewesen, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ ganz beliebig gewählt werden könnte. Wir wissen aber, daß diese Gleichung $\Omega = 0$ wesentlichen Beschränkungen unterworfen ist, indem Ω zum Beispiel alle sechs Veränderliche x, y, z, x_1, y_1, z_1 enthalten muß. Eine weitergehende Beschränkung liegt darin, daß die Gleichung $\Omega = 0$ den ∞^3 Punkten $x = a$, $y = b$, $z = c$ des Raumes ∞^3 *verschiedene* Flächen

$$\Omega(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zuordnen soll.

Es ist aber leicht zu erkennen, daß $\Omega = 0$ noch weitere Bedingungen erfüllen muß. Nehmen wir in der Tat die Gleichung:

$$\Omega \equiv (z_1 - z)^2 - (x_1 - x)^2 - (y_1 - y)^2 = 0,$$

so sehen wir, daß sie den ∞^3 Punkten $x = a$, $y = b$, $z = c$ des Raumes ∞^3 verschiedene Rotationskegel mit parallelen Rotationsachsen und derselben Öffnung

$$(z_1-c)^2-(x_1-a)^2-(y_1-b)^2)=0$$

zuordnet. Diese ∞^3 Kegel erfüllen aber die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$1-p_1^2-q_1^2=0$$

und das ist unmöglich, weil es undenkbar ist, daß eine Berührungstransformation alle ∞^5 Elemente x, y, z, p, q in solche Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 überführt, die eine Bedingungsgleichung erfüllen. In der Tat übersieht man auch leicht, daß die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered}(z_1-z)^2-(x_1-x)^2-(y_1-y)^2=0,\\ (z_1-z)p_1-(x_1-x)=0, \qquad (z_1-z)q_1-(y_1-y)=0,\\ (z_1-z)p\ -(x_1-x)=0, \qquad (z_1-z)q\ -(y_1-y)=0\end{gathered}$$

sich weder nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 noch nach x, y, z, p, q auflösen lassen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, genau die Bedingungen festzustellen, die eine Funktion Ω erfüllen muß, wenn die fünf Gleichungen

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0, \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}+q_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+p\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0,\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+q\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0 \end{cases}$$

eine Berührungstransformation des Raumes bestimmen sollen.

Wir werden zuerst nachweisen, daß diese fünf Gleichungen jedenfalls dann eine Berührungstransformation liefern, wenn sie sowohl nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 wie nach x, y, z, p, q auflösbar sind. Dies ergibt sich, wie wir sehen werden, als Korollar eines allgemeineren Satzes.

Die Form der Gleichungen (7) zeigt unmittelbar, daß diese Gleichungen sicher in den zehn Veränderlichen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ unabhängig sind, wenn die Gleichung $\Omega=0$ alle ihre sechs Argumente enthält. Ist diese Bedingung, wie wir annehmen wollen, erfüllt, so können wir zunächst zwei Größen λ und ϱ durch die Gleichungen

$$\lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}=1, \qquad \lambda\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-\varrho$$

bestimmen. Dann aber ist es gestattet, die fünf Gleichungen (7) durch das Gleichungssystem:

$$(8)\quad \begin{cases} \Omega=0, \quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=1, \quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}=-p_1, \quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}=-q_1, \\ \qquad\quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=-\varrho, \quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}=\varrho p, \quad \lambda\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}=\varrho q \end{cases}$$

zu ersetzen. Die sechs letztgeschriebenen Gleichungen ziehen immer die Gleichung

$$\lambda\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z_1}dz_1+\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\Omega}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\Omega}{\partial z}dz+\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy\right)=$$
$$=dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1-\varrho(dz-pdx-qdy)$$

nach sich, welche Werte auch die sechs Differentiale haben mögen. Und da die linke Seite gleichzeitig mit $d\Omega$ verschwindet, so besteht die Gleichung

$$dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1=\varrho(dz-pdx-qdy)$$

vermöge des Gleichungssystems (8), gleichzeitig aber vermöge des Gleichungssystems (7).

Da wir bei diesen Überlegungen nur die *eine* Voraussetzung gemacht haben, daß die Gleichung $\Omega=0$ alle sechs Veränderliche x, y, z, x_1, y_1, z_1 wirklich enthält, so gilt der

Satz 5. *Wenn eine vorgelegte Gleichung* $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0$ *wirklich alle ihre sechs Argumente enthält, und dementsprechend die fünf Gleichungen:*

$$(7)\qquad \begin{cases}\Omega=0, & \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}+q_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0,\\ & \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+p\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+q\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0\end{cases}$$

hinsichtlich der Größen p_1, q_1, p, q *und zum Beispiel* z_1 *unabhängig sind, dann besteht immer eine Differentialgleichung von der Form:*

$$dz_1-p_1dx_1-q_1dy_1=\varrho(dz-pdx-qdy)$$

und dabei ist ϱ *nicht identisch Null.*

Es ist aber wohl zu beachten, daß dieser Satz keineswegs aussagt, daß die fünf Gleichungen (7) eine *Berührungstransformation des Raumes* bestimmen, wenn die Gleichung $\Omega=0$ wirklich alle ihre sechs Argumente enthält; denn aus dieser Voraussetzung folgt zwar, daß unsere Gleichungen (7) hinsichtlich p, q, p_1, q_1 und einer beliebigen unter den Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1 unabhängig sind, keineswegs aber daß sie eine Elementtransformation bestimmen. Da wir aber schon früher bemerkten, daß unsere fünf Gleichungen (7) jedenfalls nur dann eine Berührungstransformation bestimmen, wenn die Gleichung $\Omega=0$ wirklich alle sechs Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1 enthält, können wir den folgenden Satz aufstellen:

Satz 6. *Fünf Gleichungen von der Form*

$$(7)\qquad \begin{cases}\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1)=0,\\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y_1}+q_1\dfrac{\partial\Omega}{\partial z_1}=0, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial x}+p\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0, \quad \dfrac{\partial\Omega}{\partial y}+q\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}=0\end{cases}$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn sie

sowohl nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 wie nach x, y, z, p, q aufgelöst werden können. In dieser Weise erhält man alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen.

Es ist überraschend, daß man diesem wichtigen Satze eine noch einfachere Form geben kann; es läßt sich in der Tat nachweisen, daß die Beschränkungen, denen die Gleichung $\Omega = 0$ unterworfen ist, sämtlich darauf hinauskommen, daß *eine einzige* Determinante nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwinden darf.

Die *beiden* Forderungen, daß die Gleichungen (7) sowohl nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 wie nach x, y, z, p, q auflösbar sein sollen, sind nämlich keineswegs zwei verschiedene Forderungen. Ist die eine Forderung erfüllt, so auch die andere. Das werden wir jetzt zeigen.

Die Forderung, daß unsere fünf Gleichungen (7) nach x, y, z, p, q auflösbar sein sollen, ist sicher erfüllt, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ ihre sechs Argumente wirklich enthält und andererseits die sieben Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \Omega = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} - 1 = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 = 0, \\ \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} + \varrho = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} - \varrho p = 0, \quad \lambda \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} - \varrho q = 0 \end{cases}$$

hinsichtlich der sieben Größen

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \lambda,\ \varrho$$

unabhängig sind; sie ist aber offenbar auch dann erfüllt, wenn $\Omega = 0$ seine sechs Argumente enthält und überdies die *vier* Gleichungen

$$(9)\qquad \Omega = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial z_1} - 1 = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1 = 0, \quad \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} + q_1 = 0$$

nach den *vier* Größen

$$x,\ y,\ z,\ \lambda$$

aufgelöst werden können. Ob aber diese vier Gleichungen hinsichtlich x, y, z und λ unabhängig sind, das entscheidet die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z} & 0 \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial z_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial z_1} \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial y_1} \\ \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial x} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial y} & \lambda \dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial x_1 \partial z} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 \Delta .$$

die offenbar von p, q, p_1, q_1 frei ist.

Die vier Gleichungen (9) können daher dann und nur dann nach x, y, z und λ aufgelöst werden, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial x} & \frac{\partial\Omega}{\partial y} & \frac{\partial\Omega}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix} \equiv \Delta$$

nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwindet.

Bemerken wir überdies, daß Δ in x, y, z und x_1, y_1, z_1 symmetrisch ist, sowie daß Δ immer verschwindet, wenn in der Gleichung $\Omega = 0$ ein beliebiges unter den Argumenten x, y, z, x_1, y_1, z_1 nicht wirklich vorkommt, so können wir den folgenden fundamentalen Satz aufstellen.

Theorem I. *Alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Flächen übergehen, lassen sich durch fünf Gleichungen von der Form:*

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} + q_1\frac{\partial\Omega}{\partial z_1} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial x} + p\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial y} + q\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 0$$

definieren. Die Funktion Ω ist der einzigen Beschränkung unterworfen, daß die Determinante:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega}{\partial x} & \frac{\partial\Omega}{\partial y} & \frac{\partial\Omega}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial z_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial x} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial y} & \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_1\partial z} & \frac{\partial\Omega}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

nicht vermöge $\Omega = 0$ verschwinden darf.

Beispiel I. Eine besonders wichtige Berührungstransformation liefern die Gleichungen

$$z_1 = z - px - yq,\quad x_1 = p,\quad y_1 = q,\quad p_1 = -x,\quad q_1 = -y.$$

Man übersieht hier unmittelbar, daß eine Gleichung von der Form

$$d(z - px - yq) + x\,dp + y\,dq \equiv dz - p\,dx - q\,dy$$

besteht, ferner daß die Elimination der Größen p, q, p_1, q_1 nur eine Relation und zwar die *bilineare* Gleichung

$$z_1 - z + x_1x + y_1y = 0$$

liefert. Die Punkte und Ebenen des Raumes x, y, z gehen somit bei der Transformation in die Ebenen und Punkte des Raumes x, y, z über. Wir

beschäftigen uns später eingehend mit dieser berühmten Transformation, die im vorigen Jahrhundert bei Legendre auftritt, der aber unzweifelhaft von Clairauts, Eulers und Lagranges älteren Untersuchungen beeinflußt war.

Beispiel II. Noch älter als die Legendresche Transformation ist eine Transformation, die man oft als Dilatation bezeichnet. Da diese Transformation jedenfalls implizite schon bei Huyghens auftritt, und im Grunde die Grundlage seiner berühmten *Wellentheorie* bildet, so werde ich mir erlauben diese Berührungstransformation, die jeden Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ in eine Kugel mit dem gegebenen Radius r:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

überführt, als die Huyghenssche Transformation zu bezeichnen. Man findet die Gleichungen dieser Transformation, indem man

$$\Omega = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 + (z_1-z)^2 - r^2$$

setzt und sodann nach den allgemeinen Regeln die Gleichungen

$$x_1 - x + (z_1-z)p = 0, \qquad x_1 - x + (z_1-z)p_1 = 0,$$
$$y_1 - y + (z_1-z)q = 0, \qquad y_1 - y + (z_1-z)q_1 = 0$$

hinzufügt. Die gesuchten Transformationsgleichungen besitzen daher die Form:

$$z_1 = z - \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad x_1 = x + r\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad y_1 = y + r\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$
$$p_1 = p, \quad q_1 = q.$$

Man übersieht unmittelbar, daß diese Transformation *involutorisch* und *zwei-zweideutig* ist, sowie daß die Gleichung

$$(10) \quad d\left(z - \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - p\,d\left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) - q\,d\left(y + \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = dz - p\,dx - q\,dy$$

identisch besteht.

Die allgemeinen analytischen Entwicklungen dieses Paragraphen führen unmittelbar zu einem beachtenswerten geometrischen Satz, den wir ausdrücklich formulieren werden.

Satz 7. *Sind die Punktkoordinaten zweier Räume durch eine Relation*

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

gebunden, und ordnet diese Relation den ∞^3 Punkten $x = a$, $y = b$, $z = c$ des einen Raumes ∞^3 Flächen des zweiten Raumes zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, so ordnet $\Omega = 0$ auch den

Punkten x_1, y_1, z_1 dreifach unendlich viele Flächen des ersten Raumes zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

Dieser Satz kann auch folgendermaßen formuliert werden.

Satz 8. *Ordnet man den Punkten x, y, z dreifach unendlich viele Flächen zu, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation des Raumes, die jeden Punkt x, y, z in die zugeordnete Fläche überführt.*

§ 3.

Bestimmung aller Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen alle Berührungstransformationen des Raumes bestimmt haben, bei denen Punkte allgemeiner Lage in Flächen übergehen, müssen wir jetzt alle Berührungstransformationen aufsuchen, bei denen die Punkte des Raumes in *Kurven* übergeführt werden.

Eine Berührungstransformation:

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

ordnet den ∞^2 Elementen eines beliebig gewählten Punktes $x = a$, $y = b$, $z = c$ die Elemente eines gewissen Elementvereins zu, der durch die Gleichungen:

$$\begin{gathered} x_1 = X(a, b, c, p, q), \quad y_1 = Y(a, b, c, p, q), \quad z_1 = Z(a, b, c, p, q), \\ p_1 = P(a, b, c, p, q), \quad q_1 = Q(a, b, c, p, q) \end{gathered}$$

bestimmt wird. Man findet den Punktort dieses neuen Elementvereins, indem man die Größen p und q zwischen den drei Gleichungen

$$x_1 = X(a, b, c, p, q), \quad y_1 = Y(a, b, c, p, q), \quad z_1 = Z(a, b, c, p, q)$$

eliminiert.

Die Berührungstransformation (1) führt daher dann und nur dann alle Punkte des Raumes in Kurven über, wenn die Elimination von p und q zwischen den drei letzten Gleichungen *zwei und nur zwei* unabhängige Gleichungen

$$\Omega_1(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen den Parametern a, b, c und den Cartesischen Koordinaten x_1, y_1, z_1 liefert. Alsdann gehen die Elemente jedes Punktes $x = a$, $y = b$, $z = c$ in die Elemente derjenigen Kurve $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ über, die den Parameterwerten a, b, c entspricht.

Es hat sich also ergeben:

Satz 9. *Eine Berührungstransformation*

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

führt dann und nur dann alle Punkte x, y, z des Raumes in Kurven über, wenn sich aus den Transformationsgleichungen zwei und nur zwei Relationen

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zwischen den Größen x, y, z, x_1, y_1, z_1 herleiten lassen. Faßt man in den beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ die Größen x, y, z als Parameter auf, so bestimmen diese Gleichungen ∞^3 Kurven des Raumes x_1, y_1, z_1 und zwar grade die ∞^3 Bildkurven aller Punkte x, y, z. Deutet man dagegen x_1, y_1, z_1 als Parameter, so bestimmen die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ dreifach unendlich viele Kurven des Raumes x, y, z und diese Kurven gehen bei der Transformation in die Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 über.

Wir werden jetzt durch *rein analytische Betrachtungen* nachweisen, daß eine Berührungstransformation (1), die alle Punkte x, y, z des Raumes in Kurven überführt, durch diejenigen Gleichungen

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

vollständig bestimmt ist, die angeben, *in welche Kurven die einzelnen Punkte x, y, z übergeführt werden.*

Wenn wir uns in diesem Paragraphen überhaupt darauf beschränken, die Beweise in analytischer Form zu führen, so liegt das daran, daß diejenigen Entwicklungen, die uns hier zunächst interessieren, sich besser für eine analytische als für eine synthetische Behandlung eignen. Wir behalten uns aber vor, in einem folgenden Kapitel eine *rein geometrische* Theorie derjenigen Berührungstransformationen zu entwickeln, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen. Wir werden sehen, daß eine geometrische Behandlung tiefer in das Wesen der Sache hineinführt, während die analytische Behandlung zur vorläufigen Orientierung die zweckmäßigere ist.

Wir denken uns also eine Berührungstransformation vorgelegt, deren Gleichungen zwei und nur zwei Relationen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

liefern, die von p, q, p_1, q_1 frei sind. Unter diesen Umständen dürfen wir behaupten, daß die sechs Differentiale dx, dy, dz, dx_1, dy_1, dz_1 durch zwei und nur durch zwei Relationen, nämlich die linearen homogenen Relationen

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy = 0,$$
$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy = 0$$

gebunden sind. Wir wissen aber andererseits, daß diese Differentiale eine Relation von der Form

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(x, y, z, p, q) \cdot (dz - p\,dx - q\,dy) = 0$$

erfüllen. Diese letzte Relation muß daher eine Folge der beiden vorhergehenden Gleichungen sein, und es besteht somit eine Gleichung

$$dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1 - \varrho(x, y, z, p, q)\,(dz - p\,dx - q\,dy) =$$
$$= \lambda_1 \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy\right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy\right)$$

für *alle* Werte der sechs Differentiale, dabei vorausgesetzt, daß die zehn Größen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ nur solche Werte erhalten, die mit den fünf Gleichungen der vorliegenden Berührungstransformation in Übereinstimmung stehen.

Die gefundene Gleichung zerlegt sich unmittelbar in die sechs folgenden:

$$(11) \qquad \begin{cases} 1 = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}, \\ -p_1 = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \\ -q_1 = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}, \\ -\varrho = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}, \\ \varrho p = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \\ \varrho q = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}, \end{cases}$$

die ihrerseits vermöge der Transformationsgleichungen bestehen. Nun aber liegt es in der Natur der Sache, daß die drei Veränderlichen x, y, z durch keine Relation gebunden sind, und daß dementsprechend die beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ nach zwei passend gewählten unter den Größen x_1, y_1, z_1 aufgelöst werden können. Daher ist es immer möglich, unter den drei ersten Gleichungen (11) zwei herauszugreifen, die sich nach λ_1 und λ_2 auflösen lassen. Unter allen Umständen liefern daher die drei ersten Gleichungen (11) uns eine nicht identische Gleichung von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \\ -p_1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \\ -q_1 & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0,$$

die jedenfalls die eine unter den Größen p_1 und q_1 enthält. Setzen wir die gefundenen Werte der Größen λ_1 und λ_2 in die vierte Gleichung (11) ein, so erhalten wir eine Bestimmung der Größe ϱ, die nach einer früheren Bemerkung nicht identisch verschwinden kann. Setzen wir endlich die gefundenen Werte von λ_1, λ_2 und ϱ in die beiden letzten Gleichungen des Systems (11) ein, so erhalten wir eine Bestimmung von p und q.

Das Gleichungssystem (11) liefert somit sicher *drei* Gleichungen, die hinsichtlich p_1, q_1, p, q unabhängig sind. Fügen wir hierzu $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$, so haben wir fünf unabhängige Gleichungen, die vermöge der Transformationsgleichungen (1) bestehen, und somit diese Gleichungen ersetzen können.

Hiermit hat sich ergeben

Satz 10. *Wenn eine Berührungstransformation jeden Punkt x, y, z in eine Kurve des Raumes x_1, y_1, z_1 und zwar in die Kurve*

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

überführt, so findet man die Gleichungen der Transformation dadurch, daß man zwischen den sechs Gleichungen

$$\Omega_1 = 0, \quad -p_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \quad -q_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$\Omega_2 = 0, \quad -p = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \quad -q = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}$$

das Verhältnis $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ eliminiert und die fünf übrig gebliebenen Gleichungen nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 auflöst. Die beiden Relationen $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ bestimmen die Transformationsgleichungen vollständig.

Hiermit kennen wir eine wichtige Eigenschaft derjenigen Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen. Um aber alle diese Berührungstransformationen wirklich zu bestimmen, ist es erforderlich, *die Beschränkungen genau festzustellen, denen das Gleichungssystem $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ unterworfen ist.* Daß es solche Beschränkungen gibt, ist leicht zu erkennen. Verschwänden nämlich zum Beispiel alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} \end{vmatrix},$$

so ließe sich aus den beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ eine Relation zwischen x, y, z allein ableiten, was an sich absurd ist.

Wir denken uns ein Gleichungssystem $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ vorgelegt, das vorläufig keiner anderen Beschränkung unterworfen sein soll, als daß die drei zweireihigen Determinanten jener Matrix nicht sämtlich vermöge $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden dürfen.

Alsdann geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}, \\
-p_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \\
-q_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}, \\
-\varrho &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}, \\
\varrho p &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}, \\
\varrho q &= \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}
\end{aligned}$$

zunächst eine Bestimmung der Größen λ_1, λ_2 und ϱ, sie liefern ferner drei von λ_1, λ_2 und ϱ freie Relationen, mit denen wir die beiden Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verbinden. An dieser Stelle brauchen wir nicht auf die Frage einzugehen, ob diese fünf Gleichungen immer in den zehn Veränderlichen $x, y, z, p, q, x_1, y_1, z_1, p_1, q_1$ unabhängig sind. Dagegen betonen wir, daß vermöge der hiermit erhaltenen *endlichen* Relationen zwischen den zehn Elementkoordinaten der beiden Räume immer die Gleichung

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 - \varrho(dz - p\,dx - q\,dy) =$$
$$= \lambda_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}\,dz_1 + \cdots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}\,dx\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial z}\,dz + \cdots + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}\,dx\right)$$

besteht, welche Werte auch den Differentialen erteilt werden.

Daher besteht immer vermöge der gefundenen endlichen Relationen, verbunden mit den zugehörigen totalen Differentialgleichungen eine Relation von der Form

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Dieses Resultat ist davon unabhängig, ob die fünf oben abgeleiteten endlichen Gleichungen zwischen den zehn Elementkoordinaten eine Elementtransformation bestimmen oder nicht. Uns interessiert aber hier nur der Fall, daß jene Gleichungen eine Elementtransformation bestimmen, was jedenfalls nur dann möglich ist, wenn sich aus den beiden Gleichungen

$\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ keine von x_1, y_1, z_1 freie Relation zwischen x, y, z ableiten läßt.

Es hat sich also ergeben

Satz 11. *Wenn die Elimination der Größe* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *zwischen sechs Gleichungen von der Form*

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$-p_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}}, \qquad -q_1 = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$-p = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}, \qquad -q = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}}$$

fünf Relationen zwischen den Elementkoordinaten x, y, z, p, q *und* x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 *liefert, die eine Elementtransformation bestimmen, dann ist diese Transformation immer eine Berührungstransformation. In dieser Weise werden alle Berührungstransformationen gefunden, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen.*

Hier läßt sich nun weiter nachweisen, daß es genügt zu untersuchen, ob die *fünf* in unserem Satze abgeleiteten Relationen sich hinsichtlich x, y, z, p, q auflösen lassen, indem es sich beweisen läßt, daß diese Gleichungen, sobald sie nach x, y, z, p, q auflösbar sind, auch nach x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aufgelöst werden können.

Diesen Nachweis führen wir so:

Unsere fünf Gleichungen sind dann und nur dann nach x, y, z, p, q auflösbar, wenn die Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad -1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} = 0, \\ p_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \\ q_1 + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} = 0 \end{cases}$$

sich nach $x, y, z, \lambda_2, \lambda_1$ auflösen lassen, und überdies die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nicht sämtlich vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden. Hierzu ist notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial z} & 0 & 0 \\ \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial z_1\partial x}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial z_1\partial x} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial z_1\partial y}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial z_1\partial y} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial z_1\partial z}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial z_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1} \\ \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial y_1\partial x}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial y_1\partial x} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial y_1\partial y}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial y_1\partial y} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial y_1\partial z}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial y_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1} \\ \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial x}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial x} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial y}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial y} & \lambda_1\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial x_1\partial z}+\lambda_2\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial x_1\partial z} & \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1} \end{vmatrix} = D$$

nicht vermöge der fünf Gleichungen (12) verschwindet. Diese Determinante ist, wie man durch Ausführung findet, eine lineare und homogene Funktion von λ_1 und λ_2:

$$D = \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2,$$

deren Koeffizienten W_1 und W_2 nur von x, y, z, x_1, y_1, z_1 abhängen.

Die Funktionaldeterminante D verschwindet offenbar nur dann vermöge der Gleichungen (12), wenn sowohl W_1 wie W_2 vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ gleich Null werden.

Hiermit ist die Richtigkeit des angekündigten Resultats nachgewiesen.

Theorem II. *Alle Berührungstransformationen, bei denen die Punkte des Raumes in Kurven übergehen, werden erhalten durch Elimination der Größe* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *zwischen sechs Gleichungen von der Form*

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$-p_1 = \frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}}, \qquad -q_1 = \frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}},$$

$$-p = \frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}}, \qquad -q = \frac{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}}{\lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}}.$$

Die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ *sind dabei einer Beschränkung unterworfen. Setzt man nämlich zur Abkürzung*

$$\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 = \Phi$$

und bringt sodann die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial z} & \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

auf die Form

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2,$$

so dürfen die Koeffizienten W_1 und W_2 nicht alle beide vermöge des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden. Nur wenn diese Bedingung erfüllt ist, liefern die angegebenen Operationen eine Berührungstransformation des Raumes.

Beispiel 1. Liegen die Gleichungen

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \qquad y_1 - y = 0$$

vor, so ist

$$D \equiv \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \equiv \lambda_1$$

und da der Koeffizient von λ_1 nicht gleich Null sondern gleich der Einheit ist, können wir schließen, daß die Gleichungen $z_1 - z + x_1 x = 0$, $y_1 - y = 0$ wirklich eine Berührungstransformation liefern. Die entsprechenden Transformationsgleichungen besitzen die Form

$$z_1 = z - px, \quad x_1 = p, \quad y_1 = y,$$
$$p_1 = -x, \quad q_1 = q.$$

Daß diese Gleichungen wirklich eine Berührungstransformation bestimmen, bestätigt man, indem man die identische Gleichung

$$d(z - px) - (-x)\,dp - q\,dy = dz - p\,dx - q\,dy$$

bildet.

Beispiel 2. Setzen wir

$$\Omega_1 = x_1 + iy_1 + xz_1 + z, \qquad \Omega_2 = x(x_1 - iy_1) - z_1 - y,$$

so wird

$$D = \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 - iy_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & -1 & x \\ -\lambda_2 i & 0 & 0 & -ix & i \\ \lambda_2 & 0 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} \equiv -2i\lambda_1 x - 2i\lambda_2$$

und dieser Ausdruck verschwindet nicht identisch. Die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ bestimmen daher eine Berührungstransformation und zwar die von uns entdeckte Berührungstransformation, die Gerade in Kugeln überführt. Mit dieser Transformation werden wir uns auch in diesem Bande eingehend beschäftigen.

Beispiel 3. Setzen wir

$$\Omega_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x^2 - y^2 - z^2, \qquad \Omega_2 = xx_1 + yy_1 + zz_1,$$

so ordnen die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ jedem Punkt x, y, z einen Kreis zu, dessen Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist, dessen Radius gleich der Entfernung des Punktes x, y, z vom Koordinatenanfange ist, dessen Ebene endlich zu dem Radiusvektor des Punktes x, y, z senkrecht steht. Den ∞^3 Punkten x, y, z sind daher ∞^3 verschiedene Kreise zugeordnet, die den Raum ausfüllen. Unsere Gleichungen bestimmen daher eine Berührungstransformation, die wir als die *Apsidaltransformation* bezeichnen, weil sie jede Fläche in ihre Apsidalfläche überführt.

Die Entwicklungen dieses Paragraphen geben eine feste Grundlage für die Theorie derjenigen Berührungstransformationen, die alle Punkte in Kurven überführen. Indem wir uns vorbehalten, später diese wichtige Theorie im einzelnen auszubilden, beschränken wir uns hier darauf, einige besonders naheliegende Konsequenzen unserer Entwicklungen anzugeben.

Zwei in x, y, z unabhängige Gleichungen von der Form

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ordnen, wie wir schon so oft hervorgehoben haben, jedem Punkte des Raumes x, y, z eine Kurve des Raumes x_1, y_1, z_1 zu. Es ist aber nicht sicher, daß man in dieser Weise ∞^3 verschiedene Kurven erhält, auch nicht daß diese Kurven den Raum ausfüllen. Fassen wir nun unsere Kurven als *Elementvereine* auf, so leuchtet ohne weiteres ein, daß die Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aller dieser Vereine eine Relation (oder mehrere Relationen) erfüllen, sobald die Zahl der Kurven geringer als ∞^3 ist; dasselbe gilt, wenn zwar ∞^3 verschiedene Kurven vorhanden sind, diese Kurven aber sämtlich auf einer gewissen Fläche gelegen sind. Liegen dagegen ∞^3 verschiedene Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so be-

friedigen ihre Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 keine Relation; denn dann gehen durch einen Punkt allgemeiner Lage ∞^1 verschiedene Kurven der Schar, die *verschiedene* Tangenten haben und daher unmöglich in diesem Punkte dieselben ∞^1 Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 haben können.

Mit Berücksichtigung dieser naheliegenden geometrischen Bemerkungen können wir aus unseren Entwicklungen über die Determinante D (vgl. Seite 215 ff.) unmittelbar den folgenden beachtenswerten Satz ableiten.

Satz 12. *Ordnen die beiden Gleichungen*

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1 z_1) = 0$$

den ∞^3 Punkten x, y, z dreifach unendlich viele verschiedene Kurven zu, die den Raum x_1, y_1, z_1 ausfüllen, so ordnen dieselben Gleichungen auch den Punkten x_1, y_1, z_1 dreifach unendlich viele Kurven zu, die den Raum x, y, z ausfüllen.

Wir werden später auf diesen wichtigen Satz zurückkommen und durch rein geometrische Betrachtungen den inneren Grund des Satzes aufdecken.

Bezeichnen wir die Punkte des Raumes x, y, z mit P und die ∞^3 zugeordneten Kurven des Raumes x_1, y_1, z_1 mit C_1, ferner die Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 mit P_1 und die ∞^3 zugeordneten Kurven des Raumes x, y, z mit C, endlich einen Elementverein des Raumes x, y, z mit F und den zugeordneten Verein des anderen Raumes mit F_1, so gilt offenbar der Satz:

Durchläuft ein Punkt P eine Fläche F, so berührt die Bildkurve C_1 des Punktes P immer die Bildfigur F_1 der vorgelegten Fläche. Die Bildkurven C_1 aller ∞^2 Punkte P der vorgelegten Fläche F bilden eine Kurvenschar, die aus ∞^2 Kurven besteht und daher ein Kurvensystem heißen soll. Diese ∞^2 Kurven berühren sämtlich die Fläche F_1, die wir dementsprechend als Brennfläche des Kurvensystems bezeichnen.

Es ist nun wohl zu beachten, daß jede Kurve C_1 des betrachteten Kurvensystems im allgemeinen die zugehörige Brennfläche F_1 an mehreren Stellen berührt. Dabei ist es auch denkbar, daß die Brennfläche F_1 in mehrere Flächen F_1', F_1'', F_1''' zerfällt. Alsdann transformiert die vorgelegte Berührungstransformation die Fläche F nicht in eine Fläche sondern in mehrere Flächen. Und selbst wenn F_1 nicht in mehrere Flächen zerfällt, werden doch jedem Element der gegebenen Fläche im allgemeinen mehrere Elemente der transformierten Fläche zugeordnet.

Eine Berührungstransformation, die die Punkte in Kurven überführt, ist daher im allgemeinen mehrdeutig, während sie allerdings innerhalb passend gewählter Bereiche der Elementräume immer ein-eindeutig ist.

Bei tieferen Untersuchungen über Berührungstransformationen muß man oft auf die Mehrdeutigkeit dieser Transformationen Rücksicht nehmen.

Um alle hier auftretenden wichtigen Vorkommnisse eingehend untersuchen zu können, werden wir in Kapitel III eine geometrische Theorie derjenigen Berührungstransformationen entwickeln, die die Punkte in Kurven überführen.

§ 4.

Direkte Bestimmung aller Berührungstransformationen des Raumes.

Nachdem wir die Berührungstransformationen als Elementtransformationen definiert hatten, die jeden Elementverein in einen Elementverein überführen, lag es nahe, alle Berührungstransformationen in drei Klassen zu ordnen, jenachdem die Punkte des Raumes in Punkte, Kurven oder Flächen übergehen. Diese Klassifikation ist bei vielen Untersuchungen fundamental; es ist aber wohl zu beachten, daß sie faktisch darauf beruht, daß wir uns implizite auf den Standpunkt der Cartesischen Geometrie stellen und alle räumlichen Figuren als *Punktörter* auffassen.

Nun aber können wir nach dem Vorgange von Plücker, dessen allgemeine Ideen in Eulers, Lagranges, Legendres, Monges und Poncelets Arbeiten ihren Ursprung nehmen, den Raum als einen *Ebenenraum* und dementsprechend alle geometrischen Figuren als *Ebenenörter* auffassen. Schreiben wir dabei die Gleichung der Ebene in der Form

$$z - ax - by - c = 0$$

und betrachten die Parameter a, b, c als *Ebenenkoordinaten*, so bestimmen *drei* unabhängige Gleichungen zwischen a, b, c eine Ebene, *zwei* solche Gleichungen liefern im allgemeinen eine developpable Fläche, während *eine* einzige Gleichung entweder alle Tangentialebenen einer nicht developpablen Fläche oder aber die Tangentialebenen einer krummen Kurve oder endlich alle Ebenen eines Punktes analytisch definiert.

Hätten wir nicht die Cartesische Geometrie sondern die Ebenengeometrie als Ausgangspunkt für die Geometrie der Berührungstransformationen genommen, so wäre es allerdings wiederum naturgemäß gewesen, alle Berührungstransformationen in drei Klassen einzuteilen, wir würden aber unter diesen Umständen eine andere *geometrische* Definition der drei Klassen zugrunde gelegt haben; zu der ersten Klasse hätten wir alle Transformationen gerechnet, die Ebenen in Ebenen überführen; zu der zweiten (resp. dritten) Klasse dagegen alle Transformationen, bei denen Ebenen in Gebilde übergehen, die durch zwei Gleichungen (resp. eine Gleichung) in Ebenenkoordinaten definiert werden.

Es ist daher möglich und in der Geometrie der Berührungstransformationen im allgemeinen zweckmäßig, die in den vorhergehenden Paragraphen eingeführte Klassifikation als *unwesentlich* aufzufassen. Dement-

sprechend können wir es als einen Mangel der früheren Entwicklungen betrachten, daß wir die Bestimmung aller Berührungstransformationen in drei getrennte Probleme zerlegt haben.

Wir wollen jetzt zeigen, daß es möglich ist, ausgehend von den allgemeinen Begriffen Element und Elementverein *mit einem Schlage alle Berührungstransformationen zu bestimmen.* Wenn wir aber auch in dieser Weise schneller zum Ziele gelangen, so werden wir doch in späteren Kapiteln erkennen, daß die vorhergehenden Entwicklungen keineswegs überflüssig sind, sondern im Gegenteil eine fundamentale Bedeutung besitzen, ja bei vielen Untersuchungen die unentbehrliche Grundlage liefern. Die Sache ist eben die, daß *verschiedene Standpunkte ihre Berechtigung haben.* Wenn wir auch die von uns begründete Geometrie der Berührungstransformationen als einen wichtigen Abschnitt der Geometrie betrachten, so fällt es uns nicht ein, diesen Abschnitt der Geometrie als die einzig wahre und fruchtbare Behandlung der Geometrie hinzustellen.

Eine vorgelegte Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

ordnet jedem Punkte $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ einen Elementverein zu, den Verein nämlich, dessen Elemente durch die Gleichungen:

$$a_1 = X, \quad b_1 = Y, \quad c_1 = Z$$

bestimmt sind. Auf der anderen Seite können wir, indem wir *frühere Ergebnisse zusammenfassen,* behaupten, daß es, *sobald jedem Punkte x_1, y_1, z_1 ein Elementverein zugeordnet ist, sobald ferner die Elemente aller dieser Vereine keine Relation $F(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen, immer eine und auch nur eine Berührungstransformation gibt, die jeden Punkt des Raumes in den zugeordneten Elementverein überführt.*

Diesen Satz werden wir jetzt durch neue und direkte Betrachtungen ableiten, bei denen es gleichgültig ist, ob die betreffenden Elementvereine Flächen, Kurven oder Punkte sind.

Wir denken uns also, daß jedem Punkte $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ ein Elementverein zugeordnet ist, dessen Gleichungen:

$$L_k(x, y, z, p, q, a_1, b_1, c_1) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3)$$

nach unseren Voraussetzungen sicher nach a_1, b_1 und c_1 auflösbar sind:

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1,$$

Wir haben zu beweisen, daß es dann immer eine und auch nur eine Berührungstransformation gibt, deren drei erste Gleichungen die Form:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

besitzen. Um dies nachzuweisen, stützen wir uns auf unsre Definition der beiden Begriffe Elementverein und Berührungstransformation.

Unsere Annahme, daß die drei Gleichungen $X = a_1$, $Y = b_1$, $Z = c_1$ ∞^3 Elementvereine darstellen, deckt sich damit, daß die Pfaffsche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

für alle Wertsysteme $x, y, z, p, q, dx, dy, dz, dp, dq$ besteht, die den Gleichungen:

$$X = a_1,\ Y = b_1,\ Z = c_1,\ dX = 0,\ dY = 0,\ dZ = 0$$

genügen. Und da unsere Pfaffsche Gleichung die willkürlichen Parameter a_1, b_1, c_1 gar nicht enthält, muß sie, welche Werte auch x, y, z, p, q erhalten, immer bestehen, sobald die fünf Differentiale die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy + \frac{\partial X}{\partial z}dz + \frac{\partial X}{\partial p}dp + \frac{\partial X}{\partial q}dq \equiv dX, \\ 0 &= \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \cdots\cdots\cdots + \frac{\partial Y}{\partial q}dq \equiv dY, \\ 0 &= \frac{\partial Z}{\partial x}dx + \cdots\cdots\cdots + \frac{\partial Z}{\partial q}dq \equiv dZ \end{aligned}$$

erfüllen. Hieraus folgt, daß es möglich ist, drei solche Funktionen L, M, N von x, y, z, p, q zu finden, daß die Gleichung

$$L\,dX + M\,dY + N\,dz = dz - p\,dx - q\,dy$$

für *alle* Werte der Differentiale dx, dy, dz, dp, dq stattfindet. Zur Bestimmung von L, M und N erhalten wir die fünf linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} LX_z + MY_z + NZ_z &= 1, \\ LX_x + MY_x + NZ_x &= -p, \\ LX_y + MY_y + NZ_y &= -q, \\ LX_p + MY_p + NZ_p &= 0, \\ LX_q + MY_q + NZ_q &= 0, \end{aligned}$$

unter denen sicher drei vorhanden sind, die nach L, M und N auflösbar sind; es sind ja X, Y und Z unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q.

Wäre nun eine unter den Größen L, M und N identisch gleich Null, bestände also zum Beispiel die Gleichung

$$L\,dX + M\,dY = dz - p\,dx - q\,dy$$

identisch, so existierten ∞^2 *dreidimensionale Elementvereine*, die durch Gleichungen von der Form $X = \text{Const.}$, $Y = \text{Const.}$ definiert würden. Solche Vereine gibt es aber bekanntlich nicht, und daher sind L, M und N sämtlich von Null verschieden.

Unsere identische Relation kann daher die Form:

$$dZ + \frac{L}{N}dX + \frac{M}{N}dY = \frac{1}{N}(dz - p\,dx - q\,dy)$$

oder, wenn wir

$$-\frac{L}{N}=P, \quad -\frac{M}{N}=Q, \quad \frac{1}{N}=\varrho$$

setzen, die Form

$$dZ-PdX-QdY=\varrho(dz-pdx-qdy)$$

erhalten, und dabei verschwindet ϱ nicht identisch.

Diese Überlegungen geben uns den Satz:

Satz 13. *Stellen drei Gleichungen von der Form*

$$X(x, y, z, p, q)=a_1, \quad Y(x, y, z, p, q)=b_1, \quad Z(x, y, z, p, q)=c_1,$$

welche Werte auch die Konstanten a_1, b_1, c_1 erhalten, immer einen Elementverein dar, so besteht eine und auch nur eine Relation von der Form

$$dz-pdx-qdy=\frac{1}{\varrho}(dZ-PdX-QdY).$$

Wir können noch einen Schritt weiter gehen und beweisen, daß die Größen X, Y, Z, P und Q *unabhängige* Funktionen von x, y, z, p, q sind, und daß dementsprechend die Gleichungen

$$x_1=X, \quad y_1=Y, \quad z_1=Z, \quad p_1=P, \quad q_1=Q$$

eine Elementtransformation und zwar eine Berührungstransformation bestimmen.

Gesetzt, es bestände eine Relation, die etwa die Form

$$Q-\varphi(XYZP)\equiv 0$$

besäße, während X, Y, Z, P durch keine identische Relation gebunden wären. Dann ordneten die Gleichungen

$$X=c_1, \quad Y=c_2, \quad Z=c_3, \quad P=c_4$$

mit den vier willkürlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 alle ∞^5 Elemente x, y, z, p, q des Raumes in ∞^4 Scharen und zwar in ∞^4 *Elementstreifen*. Wählten wir zwei benachbarte Elementstreifen, die den Parameterwerten

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ und } c_1+dc_1, c_2+dc_2, c_3+dc_3, c_4+dc_4$$

entsprächen, so wären von vornherein zwei und nur zwei Fälle denkbar. Entweder bestände die Gleichung:

$$dc_3-c_4dc_2-\varphi(c_1c_2c_3c_4)dc_1=0$$

und dann wäre *jedes* Element des Streifens c_1, c_2, c_3, c_4 mit allen benachbarten Elementen des Streifens $c_1+dc_1, \cdots, c_4+dc_4$ vereinigt; oder aber es wäre der Ausdruck

$$dc_3-c_4dc_2-\varphi(c_1c_2c_3c_4)dc_1$$

nicht gleich Null, und dann könnte *kein* Element des Streifens $c_1, \cdots, c_4$ mit einem Element des benachbarten Streifens vereinigt liegen.

Unsere Annahme, daß die Größen X, Y, Z, P, Q durch eine und nur eine Relation gebunden wären, würde somit dazu führen, daß alle

∞^5 Elemente des Raumes sich derart in ∞^4 Elementstreifen c_1, c_2, c_3, c_4 ordneten, daß *alle* benachbarten Elemente zweier benachbarten Streifen vereinigt lägen, sobald nur *zwei* Elemente der beiden Streifen in dieser Beziehung ständen. Wäre aber eine derartige Schar von ∞^4 Elementstreifen $c_1, \cdots, c_4$ vorhanden, so existierten *drei*dimensionale Elementvereine; wählte man nämlich einen zweidimensionalen Elementverein *allgemeiner Lage*, so wäre dieser Verein sicher nicht von einfach unendlich vielen Elementstreifen $c_1, \cdots, c_4$ erzeugt; die ∞^2 Elemente des Vereins bestimmten daher ∞^3 hindurchgehende Streifen $c_1, \cdots, c_4$ und diese ∞^2 Streifen erzeugten einen dreidimensionalen Elementverein.

Unsere Annahme, daß fünf Größen Z, X, Y, P, Q die eine Relation von der Form

$$dz - p\,dx - q\,dy = \frac{1}{\varrho}(dZ - P\,dX - Q\,dY) \tag{13}$$

erfüllen, durch eine und nur eine Relation $\Omega(X, Y, Z, P, Q) = 0$ gebunden sein können, hat sich hiermit als unmöglich gezeigt.

Ebensowenig ist es denkbar, daß fünf Größen Z, X, Y, P, Q, die eine solche Differentialrelation (13) erfüllen, durch *zwei* endliche Relationen gebunden sind. Beständen in der Tat zum Beispiel zwei Relationen von der Form

$$P = \alpha(X, Y, Z), \quad Q = \beta(X, Y, Z),$$

so ließe sich der Pfaffsche Ausdruck

$$dZ - P\,dX - Q\,dY \equiv dZ - \alpha(X, Y, Z)\,dX - \beta(X, Y, Z)\,dY$$

(vgl. z. B. Band I, S. 196, Z. 16 von oben) immer auf die Form:

$$\mu\,dZ + \nu\,d\Omega$$

bringen, so daß eine Relation von der Form:

$$dz - p\,dx - q\,dy = \frac{\mu}{\varrho}\,dZ + \frac{\nu}{\varrho}\,d\Omega$$

stattfände. Dann aber lieferten die Gleichungen $Z = \text{Const.}$, $\Omega = \text{Const.}$ dreidimensionale Elementvereine, was an sich unmöglich ist.

Noch leichter erkennen wir, daß die Größen X, Y, Z, P, Q nicht mehr als zwei endliche Relationen erfüllen können.

Es besteht daher der Satz:

Satz 14. *Erfüllen fünf Funktionen X, Y, Z, P, Q von x, y, z, p, q eine Relation von der Form*

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

*so sind diese Funktionen nur dann voneinander abhängig, wenn die Größe ϱ identisch gleich Null ist.**)

*) Dieser Satz ist längst in der Theorie des Pfaffschen Problems aufgestellt worden.

Nun brauchen wir nur die beiden Sätze 14 und 13 zusammenzuhalten, um das früher angekündigte Resultat zu erhalten.

Satz 15. *Definieren drei Gleichungen von der Form*

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den willkürlichen Konstanten a_1, b_1, c_1 eine Schar Elementvereine, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation des Raumes, deren drei erste Gleichungen die Form

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

besitzen.

Noch schärfer tritt der Inhalt dieses Satzes durch die folgende Fassung hervor:

Theorem III. *Man findet alle Berührungstransformationen, indem man den ∞^3 Punkten $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ in allgemeinster Weise ∞^3 zweidimensionale Elementvereine zuordnet, deren Elemente x, y, z, p, q alle ∞^5 Elemente des Raumes umfassen. Wird diese Zuordnung, wie in einziger Weise möglich ist, durch drei Gleichungen von der Form*

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

definiert, so gibt es immer eine und auch nur eine Berührungstransformation, die jeden Elementverein $X = a_1$, $Y = b_1$, $Z = c_1$ in den zugeordneten Punkt $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ überführt.

Sollen drei Gleichungen von der Form

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den drei willkürlichen Parametern a_1, b_1, c_1 ∞^3 Elementvereine darstellen, so müssen zwischen den Funktionen X, Y, Z bestimmte Beziehungen bestehen. Um den zweckmäßigsten analytischen Ausdruck für diese Beziehungen zu finden, stützen wir uns auf unsere allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deren erste Grundzüge schon im ersten Bande dieses Werkes (S. 521 ff.) entwickelt sind. Wie damals bezeichnen wir *jede* Gleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

zwischen den Elementkoordinaten als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Integralgebilde dieser Gleichung ist für unsre Auffassung jeder zweidimensionale Elementverein, dessen Elemente der Schar $F = 0$ angehören. Wir sahen an der angegebenen Stelle, daß jede Gleichung $F = 0$ unendlich viele und zwar ∞^∞ Integralgebilde besitzt, die eine gemeinsame Erzeugung haben. Es ordnen sich nämlich die ∞^4 Elemente jeder Gleichung $F = 0$ in ∞^3 Elementstreifen, die wir als charakteristische Streifen bezeichneten, und jedes Integralgebilde von $F = 0$ enthält ∞^1 charakteristische Streifen.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, daß die vorgelegte partielle Differentialgleichung eine willkürliche Konstante a enthält, und dementsprechend die Form $F(x, y, z, p, q) = a$ besitzt, so finden wir nach den früher aufgestellten Sätzen die Gleichungen der ∞^3 charakteristischen Streifen, indem wir drei von F unabhängige Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p} - \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q} \equiv [Ff]$$

gleich willkürlichen Konstanten setzen.

Wir sahen andererseits, daß zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(xyzpq) = a, \quad \Phi(xyzpq) = b$$

mit den willkürlichen Konstanten a und b dann und nur dann ∞^1 gemeinsame Integralgebilde besitzen, wenn der *Poissonsche Klammerausdruck* $[F\Phi]$ identisch verschwindet und also die Gleichung

$$[F\Phi] \equiv 0$$

besteht. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wenn also nach unsrer Terminologie die Funktionen F und Φ in *Involution* liegen, so haben die beiden Gleichungen $F = a$ und $\Phi = b$ für beliebig gewählte Werte der Parameter a und b immer einfach unendlich viele gemeinsame Integralgebilde, die durch eine zu den Gleichungen $F = a$, $\Phi = b$ hinzutretende Gleichung

$$\Psi(x, y, z, p, q) = c$$

mit der willkürlichen Konstanten c bestimmt werden.

Liegt andererseits irgend eine Schar von ∞^3 Elementvereinen vor, die durch die Gleichungen

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

definiert werden, so haben zwei beliebige unter diesen drei Gleichungen z. B. $X = a_1$ und $Z = c_1$ für alle Werte der Parameter a_1 und c_1 gemeinsame Integralgebilde, und es besteht daher identisch die Gleichung $[XZ] = 0$.

Es ergibt sich also unmittelbar aus den Entwicklungen des vorigen Bandes der Satz.

Satz 16. *Drei Gleichungen von der Form*

$$X(x, y, z, p, q) = a_1, \quad Y(x, y, z, p, q) = b_1, \quad Z(x, y, z, p, q) = c_1$$

mit den willkürlichen Parametern a_1, b_1, c_1 bestimmen dann und nur dann ∞^3 Elementvereine, wenn die drei Funktionen X, Y, Z voneinander unabhängig sind, und dabei ihre drei Klammerausdrücke verschwinden:

$$[XY] \equiv 0, \quad [XZ] \equiv 0, \quad [YZ] \equiv 0.$$

Das einfachste Beispiel zu diesem Satze liefert die Annahme

$$X \equiv x, \quad Y \equiv y, \quad Z \equiv z;$$

alsdann definieren die drei Gleichungen $X = a_1$, $Y = b_1$, $Z = c_1$ alle ∞^3 Punkte des Raumes.

Um ein anderes einfaches Beispiel zu finden, stellen wir die Schar aller Ebenen durch die Gleichung

$$z - ax - by - c = 0$$

dar. Die Elemente jeder Ebene erfüllen überdies die Gleichungen

$$p = a, \quad q = b$$

und also läßt sich die Schar aller Ebenen durch die drei Gleichungen

$$p = a, \quad q = b, \quad z - px - qy = c$$

darstellen. Hier liegen wiederum die drei Funktionen

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = z - px - qy,$$

wie man leicht verifiziert, paarweise in *Involution.*

Setzen wir endlich

$$z = ax + c, \quad y = b$$

und erteilen den Parametern a, b, c bestimmte Werte, so erhalten wir eine Gerade, die mit der zx-Ebene parallel ist; die Elemente dieser Geraden erfüllen überdies die Relation: $a - p = 0$. Die Schar aller mit der zx-Ebene parallelen Geraden wird daher, wenn diese Geraden als Elementvereine aufgefaßt werden, durch die drei Gleichungen

$$p = a, \quad y = b, \quad z - px = c$$

dargestellt. Hier ist es wiederum leicht zu konstatieren, daß die drei Funktionen $p, y, z - px$ paarweise in Involution liegen.

Betrachten wir endlich die Schar aller ∞^3 Kugeln, deren Mittelpunkte in der Ebene $z = 0$ liegen. In Cartesischen Koordinaten ist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 - c^2 = 0$$

die Gleichung dieser ∞^3 Kugeln. Die Elemente einer solchen Kugel erfüllen überdies die Gleichungen

$$x - a + zp = 0, \quad y - b + zq = 0,$$

daher werden diese Kugeln, aufgefaßt als Elementvereine durch die Gleichungen

$$x + zp = a, \quad y + zq = b, \quad z\sqrt{1 + p^2 + q^2} = c$$

dargestellt.

Verbinden wir die beiden Sätze, so erhalten wir unmittelbar das folgende Theorem:

Theorem IV. *Drei Gleichungen von der Form*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q)$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation des Raumes, wenn X, Y, Z unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q sind, die paarweise in Involution liegen. Ist diese Bedingung erfüllt, so besteht eine identische Gleichung

$$dZ - PdX - QdY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

und dann sind

$$p_1 = P(xyzpq), \quad q_1 = Q(xyzpq)$$

die fehlenden Gleichungen der Berührungstransformation.

Diesen fundamentalen Satz, der für die analytische Theorie der Berührungstransformationen die naturgemäße Grundlage bildet, gaben wir zum ersten Male in den Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania in der kurzgefaßten Note: Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, 30. April 1872.

Aus den Entwicklungen dieses Paragraphen lassen sich viele wichtige Schlüsse ziehen. Hier beschränken wir uns darauf, einige besonders nahe liegende gleichzeitig aber wichtige Folgerungen zu ziehen.

Eine Berührungstransformation: $z_1 = Z$, $x_1 = X, \cdots, q_1 = Q$ führt die Elemente x, y, z, p, q jeder Gleichung $Z(x, y, z, p, q) = c$ in Elemente des Raumes x_1, y_1, z_1 über, deren Punktort die Ebene $z_1 = c$ ist; sagen wir einfach: die Transformation führt die partielle Differentialgleichung $Z = c$ in die partielle Differentialgleichung $z_1 = c$ über. Gleichzeitig transformieren sich die Integralgebilde der ersten Gleichung in die Integralgebilde der Gleichung $z_1 = c$, das heißt in die Kurven und Punkte dieser Ebene. Die charakteristischen Streifen der Gleichung $Z = c$ gehen in die charakteristischen Streifen der Gleichung $z_1 = c$ über, das heißt in Elementbüschel, deren Achsen die Linienelemente der Ebene $z_1 = c$ sind; kürzer gesagt: die charakteristischen Streifen der Gleichung $Z = c$ gehen in die Linienelemente der Ebene $z_1 = c$ über.

Schon im vorigen Bande (S. 536 ff.) stellten wir eine ganz analoge Beziehung zwischen den Integralgebilden, beziehungsweise charakteristischen Streifen einer Gleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ und den Kurven (Punkten) und Linienelementen einer Ebene her; während aber diese Beziehung sich damals als eine *Abbildung* darbot, wird sie hier durch eine Berührungstransformation vermittelt. Es liegt auf der Hand, daß unser jetziges Ergebnis als das *tiefergehende*, die früheren Entwicklungen umfaßt, während das Umgekehrte sich nicht behaupten läßt.

Die große Bedeutung dieser Entwicklungen (die sich, beiläufig bemerkt, auf n Dimensionen ausdehnen) liegt darin, daß $Z = c$ als eine ganz beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung aufgefaßt werden kann. Liegt nämlich eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Konstanten etwa in der Form $w(xyzpq) = c$

vor, so besitzt sie, wissen wir, immer für jeden Wert von c zweifach unendlich viele Integralgebilde, die sich durch drei Gleichungen

$$w = c, \quad u(xyzpq) = a, \quad v(xyzpq) = b$$

darstellen lassen, zwischen denen die Beziehungen

$$[uw] = [vw] = [uv] = 0$$

stattfinden. Dann aber gibt es immer eine (und auch nur eine) Berührungstransformation, deren drei erste Gleichungen die Form

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad z_1 = w$$

besitzen, und diese Transformation führt die Gleichung: $w(x, y, z, p, q) = c$ in die Gleichung $z_1 = c$ über.

Durch Berührungstransformation kann somit *jede* vorgelegte partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = c$ auf die Form $z_1 = c$ gebracht werden. Man kann daher das Integrationsproblem einer Gleichung $F = c$ als ein Transformationsproblem auffassen. Kennt man nämlich eine Berührungstransformation, die $F = c$ auf die Form $z_1 = c$ bringt, so führt die *inverse* Transformation die bekannten Integralgebilde der Gleichung $z_1 = c$ in die Integralgebilde der Gleichung $F = c$ über.

Da nun alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung $F = c$ durch Berührungstransformation die gemeinsame Form $z_1 = c$ erhalten können und da andererseits die sukzessive Ausführung zweier Berührungstransformationen mit einer einzigen Berührungstransformation äquivalent ist, können wir schließen, daß es, sobald zwei beliebige partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = c, \quad \Phi(\xi, \eta, \zeta, \pi, \varkappa) = k$$

vorliegen, immer eine Berührungstransformation (ja sogar unendlich viele solche Transformationen) gibt, die jede Gleichung $F = c$ auf die Form $\Phi = k$ bringt.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen daher keine individuelle Eigenschaft, die gegenüber allen Berührungstransformationen invariant bleibt.

Sobald eine Berührungstransformation

$$x_1 = X, \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q \tag{1}$$

vorliegt, kann man ohne weiteres eine ausgedehnte Kategorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung angeben, deren jede integriert werden kann. Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\Omega(X, Y, Z) = 0$$

erhält nämlich durch die Transformation (1) die Form

$$\Omega(x_1, y_1, z_1) = 0$$

und die Integralgebilde dieser neuen Gleichung, nämlich die Punkte und Kurven der *Fläche* $\Omega(x_1, y_1, z_1) = 0$ gehen durch die inverse Transformation in die Integralgebilde der Gleichung $\Omega(X, Y, Z) = 0$ über.

Daß alle Gleichungen von der Form $\Omega(X, Y, Z) = 0$ integriert werden können, erkennt man übrigens auch durch die folgende Betrachtung. Die Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ liefern ∞^3 Elementvereine, und unter ihnen finden sich ∞^2 Integralgebilde der Gleichung $\Omega(X, Y, Z) = 0$; solche Integralgebilde sind ja alle Elementvereine $X = a$, $Y = b$, $Z = c$, deren Parameter a, b, c die Bedingung $\Omega(a, b, c) = 0$ erfüllen. Hiermit kennen wir eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Omega(X, Y, Z) = 0$, deren allgemeine Lösung somit nach Lagranges (und unseren) allgemeinen Regeln gefunden werden kann.

Setzen wir zum Beispiel

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = z - px - qy$$

so erhalten wir den schon von Lagrange aufgestellten Satz, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der allgemeinen Form

$$\Omega(p, q, z - px - qy) = 0$$

eine vollständige Lösung besitzt, die aus ∞^2 Ebenen besteht; daher sind alle Integralflächen der allgemeinen Lösung *developpable* Flächen. Lagrange bemerkt ferner, daß zwei partielle Differentialgleichungen von der Form

$$\Omega(p, q, z - px - qy) = 0, \qquad W(p, q, z - px - qy) = 0$$

immer ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben, die sämtlich Ebenen sind. Die von diesen ∞^1 Ebenen umhüllte Developpable erfüllt ebenfalls sowohl $\Omega = 0$ wie $W = 0$. Faßt man mit Plücker die Größen $z - px - qy$, p und q als Ebenenkoordinaten auf (wie früher bemerkt, bezeichnet schon Lagrange diese drei Größen als *élements du plan*), so werden die Lagrangeschen Betrachtungen evident, indem die Gleichung $\Omega(p, q, z - px - qy) = 0$ auf der einen Seite ∞^4 Elemente, andererseits aber ∞^3 Ebenen definiert.

§ 5.

Die Definitionsgleichungen aller Berührungstransformationen des Raumes.

Wir haben gesehen (S. 199), daß fünf Gleichungen von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q), \\ p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

dann und nur dann eine Berührungstransformation definieren, wenn eine Relation von der Form:

$$(13) \qquad dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

identisch besteht, und dabei die Größe ϱ nicht gleich Null ist.

Wir haben ferner erkannt, daß zwischen den Funktionen X, Y, Z, die zu einer Berührungstransformation (1) gehören, die Relationen

$$[ZX] = 0, \quad [ZY] = 0, \quad [XY] = 0$$

bestehen. Wir werden jetzt eine Reihe weiterer Differentialrelationen aufstellen, die zwischen den Funktionen X, Y, Z, P, Q einer Berührungstransformation (1) stattfinden; wir zeigen überdies, daß diese Differentialrelationen die Gleichung (13) vollständig ersetzen und somit als Definition der Berührungstransformationen benutzt werden können. Diese charakteristischen Differentialgleichungen, die in Untersuchungen über Berührungstransformationen eine fundamentale Rolle spielen, werden wir als *Definitionsgleichungen der Berührungstransformationen bezeichnen.*

Schreiben wir (vgl. S. 208) die Identität (13) folgendermaßen

$$d(Z - PX - QY) + X\,dP + Y\,dQ = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

so erhalten wir (Theorem IV, S. 227f.) unmittelbar die Relationen:

$$[Z - PX - QY, P] = 0, \quad [Z - PX - QY, Q] = 0, \quad [PQ] = 0,$$

sowie die äquivalenten:

$$[PQ] = 0, \quad [ZP] - P[XP] - Q[YP] = 0, \quad [ZQ] - P[XQ] - Q[YQ] = 0.$$

In ähnlicher Weise finden wir, indem wir die Identität (13) auf die Form

$$d(Z - PX) + X\,dP - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy)$$

bringen, die Relationen

$$[Z - PX, P] = 0, \quad [Z - PX, Y] = 0, \quad [PY] = 0,$$

sowie die äquivalenten

$$[ZP] - P[XP] = 0, \quad -X[PY] = 0, \quad [PY] = 0.$$

Vertauschen wir hier, wie wir können, X mit Y und P mit Q, so erhalten wir die analogen Gleichungen

$$[ZQ] - Q[YQ] = 0, \quad [QX] = 0.$$

Hiermit sind im ganzen die folgenden Relationen abgeleitet:

$$[XY] = 0,\ [XZ] = 0,\ [YZ] = 0,\ [XQ] = 0,\ [YP] = 0,\ [PQ] = 0,$$
$$[ZP] - P[XP] = 0,\ [ZQ] - Q[YQ] = 0.$$

Um noch weitere Differentialgleichungen zu finden, verwerten wir die früher (S. 209) aufgestellte Identität:

$$d\left(Z - \frac{1}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right) - P \cdot d\left(X + \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right) - Q \cdot d\left(Y + \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right)$$
$$\equiv dZ - P\,dX - Q\,dY = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

die uns zeigt, daß die beiden Funktionen $X + \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$ und $Y + \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$ in Involution liegen. Nun aber ist:

$$\left[X+\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\ Y+\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right]=-\frac{PQ}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}([XP]-[YQ]),$$

und also besteht auch die Gleichung

$$[XP]=[YQ].$$

Dabei ist leicht einzusehen, daß die Klammerausdrücke $[XP]$ und $[YQ]$ von Null verschieden sein müssen; sonst lägen nämlich alle fünf Größen X, Y, Z, P, Q paarweise in Involution, und dann hätte zum Beispiel die lineare partielle Differentialgleichung $[Xf]=0$ fünf unabhängige Lösungen, nämlich X, Y, Z, P und Q.

Dies gibt den Satz:

Satz 17. *Bestimmen die Gleichungen*

$$x_1=X(x,y,z,p,q),\quad y_1=Y,\quad z_1=Z,\quad p_1=P,\quad q_1=Q$$

eine Berührungstransformation, so bestehen Relationen von der Form

$$(14)\qquad \begin{cases}[XY]=[XZ]=[YZ]=[PQ]=[PY]=[QX]=0,\\ [PX]=\omega,\ [QY]=\omega,\ [PZ]=\omega P,\ [QZ]=\omega Q,\end{cases}$$

in denen ω eine von Null verschiedene Größe bezeichnet.

Hiermit sind eine Reihe wichtiger Kriterien gefunden, die erfüllt sein müssen, wenn fünf Gleichungen $x_1=X,\cdots,q_1=Q$ eine Berührungstransformation bestimmen sollen. Diese Kriterien sind aber nicht allein *notwendig*, sondern auch *hinreichend;* das wollen wir jetzt zeigen.

Setzen wir voraus, daß fünf Funktionen X, Y, Z, P, Q von x, y, z, p, q vorliegen, die unsre Kriterien erfüllen. Dann ist es zunächst leicht zu sehen, daß diese fünf Funktionen unabhängig sein müssen. Eine Relation von der Form:

$$P=F(X, Y, Z, Q)$$

ist unmöglich, weil $[PX]$ von Null verschieden, $[FX]$ dagegen gleich Null ist. Bestände andererseits eine Relation von der Form

$$Z=\Phi(X, Y)$$

so käme

$$[PZ]=\frac{\partial\Phi}{\partial X}[PX),$$

und durch Division mit ω:

$$P=\frac{\partial\Phi(X, Y)}{\partial X};$$

wir sahen aber eben, daß eine Relation, die P enthält, nicht stattfinden kann. Endlich ergibt sich, daß auch X und Y unabhängig sein müssen, weil $[QX]$ gleich Null, $[QY]$ dagegen von Null verschieden ist.

Fünf Funktionen X, Y, Z, P, Q von x, y, z, p, q, die unsre Kriterien (14) *erfüllen, sind somit sicher voneinander unabhängig.*

Wenn aber drei unabhängige Funktionen X, Y, Z von x, y, z, p, q paarweise in Involution liegen, so erfüllen sie immer eine Gleichung von der Form

$$dZ - \Pi\, dX - K\, dY = \sigma(dz - p\, dx - q\, dy)$$

und dann bestehen unter anderm die Relationen:

$$[\Pi Y] = 0, \quad [\Pi Z] - \Pi[\Pi X] = 0.$$

Nun aber ist Π eine Funktion von X, Y, Z, P, Q,

$$\Pi = \Omega(X, Y, Z, P, Q),$$

und diese Funktion muß wegen der Gleichung $[\Pi Y] = 0$ von Q frei sein

$$\Pi = \Omega(X, Y, Z, P),$$

muß aber P enthalten, da $[\Pi X]$ von Null verschieden sein soll. Setzen wir diesen Wert in die Gleichung

$$[\Pi Z] - \Pi[\Pi X] = 0$$

ein, so finden wir die Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial P}\{[PZ] - \Pi[PX]\} = 0,$$

und da der erste Faktor links von Null verschieden ist, kommt

$$[PZ] - \Pi[PX] = 0.$$

Nach unserer Annahme ist aber

$$[PZ] - P[PX] = 0$$

und $[PX]$ von Null verschieden; also ist $\Pi = P$; in entsprechender Weise ergibt sich daß $K = Q$ ist.

Hiermit ist gezeigt, daß unsere Kriterien wirklich auch hinreichend sind.

Theorem V. *Fünf Gleichungen von der Form*

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \quad z_1 = Z(x, y, z, p, q),$$
$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

bestimmen dann und nur dann eine Berührungstransformation des Raumes, wenn die Relationen

$$[XY] = [XZ] = [YZ] = [XQ] = [YP] = [PQ] = 0,$$
$$[PX] = \omega, \quad [QY] = \omega, \quad [PZ] = \omega P, \quad [QZ] = \omega Q$$

bestehen und die Größe ω von Null verschieden ist.

Dieser Satz, der sich ohne Mühe auf n Dimensionen ausdehnen läßt, bildet die wahre Grundlage für unsere Theorie der Berührungstransformationen*).

*) „Kurzes Resumé mehrerer neuen Theorien" und „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen" S. 258—259; Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania,

§ 6.

Auffassung einer Berührungstransformation als Änderung der Elementkoordinaten.

In der Cartesischen analytischen Geometrie wird jede Figur des Raumes als ein *Punktort* aufgefaßt. Eine Fläche ist der Ort von ∞^2 Punkten, eine Kurve der Ort von ∞^1 Punkten. Cartesius bemerkt, daß ein Punkt des Raumes drei Bestimmungsstücke oder Koordinaten besitzt, und als solche wählt er die drei Abstände x, y, z des Punktes von drei festen Ebenen. Bei diesen Festsetzungen stellt jede Gleichung zwischen x, y, z eine Fläche dar, während ein System von zwei unabhängigen Gleichungen zwischen x, y, z eine Kurve des Raumes definiert. Insbesondere stellen *lineare* Gleichungen *Ebenen* beziehungsweise *Gerade* dar.

Die Cartesische Geometrie ist die *älteste, keineswegs aber die einzige* analytische Geometrie. Auf der einen Seite ist ja klar, daß man, wenn man auch fortwährend alle räumlichen Figuren als Punktörter auffaßt, keineswegs dazu gezwungen ist, als Punktkoordinaten gerade die Cartesischen x, y, z zu wählen. Führt man die sogenannten Polarkoordinaten r, φ, ϑ als Bestimmungsstücke eines Punktes ein, so wird allerdings *eine* Gleichung zwischen den drei Koordinaten fortwährend eine Fläche definieren. Während aber in der Cartesischen Geometrie jede Ebene durch eine *lineare* Gleichung in den Koordinaten dargestellt wird, übersieht man, daß die Gleichung einer Ebene in Polarkoordinaten eine *transzendente* Form besitzt.

Man kann überhaupt statt der Cartesischen Koordinaten x, y, z drei beliebige unabhängige Funktionen u, v, w von x, y, z, als Punktkoordinaten einführen. Erteilt man nämlich u, v, w bestimmte Werte: a, b, c, so findet man durch Auflösung der Gleichungen:

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b, \quad w(x, y, z) = c$$

entsprechende Werte der Größen x, y, z, und damit kennt man den Punkt oder diejenigen Punkte, in denen u, v, w die Werte a, b, c haben. Bezeichnet man nun diese neuen Punktkoordinaten mit x_1, y_1, z_1, so sieht man, daß die Gleichungen:

$$x_1 = u(x, y, z), \quad y_1 = v(x, y, z), \quad z_1 = w(x, y, z), \tag{15}$$

die nach unserer gewöhnlichen Terminologie eine *Punkttransformation*

April 1872 und Juni 1873. Man kann den Satz des Textes vervollständigen, indem man die Bemerkung hinzugefügt, daß die Größe ω grade die früher aufgetretene Funktion ϱ ist, daß also unter den angegebenen Bedingungen die Gleichung

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \omega(ds - p\,dx - q\,dy)$$

besteht.

bestimmen, faktisch den Zusammenhang zwischen den alten Koordinaten x, y, z und den neuen Koordinaten eines allgemein gewählten Punktes angeben.

In dieser Weise ergibt sich, daß man die Gleichungen einer Punkttransformation (15) in zwei ganz verschiedenen Weisen deuten kann, nämlich entweder (vgl. z. B. Band I dieses Werkes, S. 2, § 1) als eine *geometrische Operation*, die jeden Punkt mit den Cartesischen Koordinaten x, y, z in einen *neuen* Punkt überführt, dessen Cartesische Koordinaten die Werte

$$x_1 = u(x, y, z), \quad y_1 = v(x, y, z), \quad z_1 = w(x, y, z)$$

haben — oder aber als eine rein *begriffliche Operation*, die darin besteht, daß man die Koordinaten x, y, z eines Punktes durch andere Koordinaten *desselben* Punktes ersetzt. Bei dieser letzten Auffassung geben die Transformationsgleichungen, wie wir soeben sahen, den analytischen Ausdruck für den Zusammenhang zwischen den ursprünglichen und den neuen Koordinaten.

Wir brauchen bei dieser Gelegenheit nicht daran zu erinnern, daß eine Punkttransformation noch in einer dritten Weise gedeutet werden kann, auch nicht daran, daß grade der Umstand, daß eine Punkttransformation sich in mehreren verschiedenen Weisen deuten läßt, in der mathematischen Entwicklung unseres Jahrhunderts eine hervorragende Rolle gespielt hat. Wir werden dagegen zeigen, daß auch jede Berührungstransformation in *zwei* verschiedenen Weisen gedeutet werden kann, nämlich einerseits (vgl. S. 198f.) als eine Operation, die jedes Flächenelement x, y, z, p, q nach einer *neuen* Lage bringt, andererseits als eine rein begriffliche Operation, die darin besteht, daß man die Bestimmungsstücke x, y, z, p, q eines Elementes durch andere Bestimmungsstücke x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 *desselben* Elementes ersetzt. Bei dieser letzten Auffassung drücken die Transformationsgleichungen den analytischen Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Elementkoordinaten aus.

Wir glauben, daß es für viele Leser nützlich sein wird, wenn wir an die geschichtliche Entwicklung anknüpfen und zunächst die angekündigten Deutungen ausführlich an zwei wichtigen Berührungstransformationen durchführen, die schon im vorigen Jahrhundert, wenn auch unter speziellen Gesichtspunkten, von Euler, Lagrange, Monge und Legendre verwertet worden sind.

Wir betrachten zuerst nach Lagrange, Monge und Legendre die Transformationsgleichungen:

$$(16) \qquad -z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = x, \quad q_1 = y,$$

die eine Berührungstransformation bestimmen, die mit Poncelets Transformation durch reziproke Polaren identisch ist.

Die Ebene des Elementes x, y, z, p, q wird durch die Gleichung:

$$Z - z - p(X-x) - q(Y-y) = 0,$$

bestimmt, anders geschrieben, durch:

$$Z - pX - qY - (z - px - qy) = 0.$$

Die drei Größen $z - px - qy$, p, q sind daher, wie Lagrange bei verschiedenen Gelegenheiten ausdrücklich hervorhebt, die Bestimmungsstücke einer Ebene, und zwar in unsrer Terminologie die Bestimmungsstücke der Ebene des Flächenelementes x, y, z, p, q.

Hieraus folgt nun, daß die fünf Größen

$$z - px - qy,\ p,\ q,\ x,\ y \tag{17}$$

als Bestimmungsstücke des Elements x, y, z, p, q betrachtet werden können; denn unter den fünf Größen (17) bestimmen die drei ersten eine Ebene und die zwei letzten einen Punkt dieser Ebene. Die Gleichungen

$$-z_1 = z - px - qy,\quad x_1 = p,\quad y_1 = q,\quad p_1 = x,\quad q_1 = y$$

vermitteln bei dieser Auffassung den Übergang von einer Koordinatenbestimmung zu einer anderen Koordinatenbestimmung der Flächenelemente des Raumes. Dieser Wechsel der Elementkoordinaten ist eine Berührungstransformation, weil die Gleichung

$$-d(z - px - qy) - x\,dp - y\,dq = -(dz - p\,dx - q\,dy)$$

besteht, und somit die Bedingung der vereinigten Lage zweier Elemente in den neuen Elementkoordinaten wiederum die Form:

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0$$

besitzt.

Nach den Entwicklungen des ersten Paragraphen kann man aber die Berührungstransformation (16) noch in anderer Weise deuten, und zwar als eine Operation, die jedes Element mit den Koordinaten x, y, z, p, q in das Element überführt, dessen Punkt die Cartesischen Koordinaten:

$$z_1 = -(z - px - qy),\quad x_1 = p,\quad y_1 = q, \tag{18}$$

dessen Ebene die Ebenenkoordinaten

$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = -z,\quad p_1 = x,\quad q_1 = y \tag{19}$$

besitzt. Die Form dieser Gleichungen (18) und (19) zeigt unmittelbar, daß alle Elemente x, y, z, p, q einer Ebene in die Elemente eines Punktes x_1, y_1, z_1 übergehen, während die Elemente jedes Punktes x, y, z sich in die Elemente einer Ebene umwandeln. Wenn aber alle Punkte in Ebenen und alle Ebenen in Punkte übergehen, und überdies vereinigte Lage zwischen Punkt und Ebene bewahrt wird, so folgt ohne weiteres, daß die beiden Räume x, y, z und x_1, y_1, z_1 *dualistisch* aufeinander bezogen sind.

Die beiden hier vorgetragenen Auffassungen der Legendreschen Transformationsgleichungen (16) stehen, so verschieden sie auch im ersten Augenblicke erscheinen, in genauestem Zusammenhange miteinander. Um das am einfachsten nachzuweisen, eliminieren wir die Größen p, q, p_1, q_1 zwischen unseren Gleichungen und bemerken, daß die hervorgehende Relation:

$$-z_1 - z + x_1 x + y_1 y = 0$$

den ∞^3 Punkten des Raumes x_1, y_1, z_1 die ∞^3 Ebenen des Raumes x, y, z zuordnet. *Wir können daher die Größen x_1, y_1, z_1 in doppelter Weise deuten, einerseits als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume, andererseits als Ebenenkoordinaten in dem ursprünglichen Raume.*

Deuten wir x_1, y_1, z_1 als Punktkoordinaten in einem neuen Raume, so werden wir naturgemäß dazu geführt die Legendresche Transformation (16) als eine geometrische Operation aufzufassen, die jedes Flächenelement des Raumes x, y, z in ein Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 des neuen Raumes überführt. Deuten wir dagegen die Größen x_1, y_1, z_1 als Ebenenkoordinaten des Raumes x, y, z, so müssen wir die Transformation (16) als eine rein begriffliche Operation auffassen, die darin besteht, daß die ursprünglichen Elementkoordinaten x, y, z, p, q durch die neuen Elementkoordinaten

$$x_1 \equiv p, \quad y_1 \equiv q, \quad z_1 \equiv -(z - px - qy), \quad p_1 \equiv x, \quad q_1 \equiv y$$

ersetzt werden.

Da die *Form* in der Mathematik eine so außerordentlich große Rolle spielt, erlauben wir uns hervorzuheben, daß die Auffassung der Dualität als einer Elementtransformation, die die Pfaffsche Gleichung $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ invariant läßt, von uns herrührt. Was dagegen die Realität betrifft, so ist darüber kein Zweifel, daß schon Mathematiker des vorigen Jahrhunderts die Legendresche Transformation für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwertet haben, während Poncelet zuerst die wirkliche Tragweite der Transformation klar gestellt hat; Poncelet ist es nämlich, der zuerst darauf hingewiesen hat, daß diese Transformation auf *alle* räumlichen Gebilde angewandt werden kann, sowie daß sie *jeden* Satz der Geometrie in einen neuen Satz umwandelt. Muß man auch in Gergonnes Übergang von der involutorischen zu der allgemeinen Dualität einen gewissen Fortschritt anerkennen, so darf man doch nicht vergessen, daß Poncelet auf diesem wie auf so vielen anderen Gebieten der wirkliche Bahnbrecher ist, auch nicht, daß Gergonnes Arbeiten nicht allein viel später erschienen sind, sondern überdies mehrere kapitale Fehler enthielten. Die Einführung der homogenen Koordinaten und der Ebenenkoordinaten durch Möbius und Plücker gab der Theorie eine neue und vollkommenere analytische Form, während andererseits die Entdeckung der Nullsysteme durch Giorgini und Möbius den Zugang zu neuen Gebieten öffnete. Unter denjenigen, die schöne *Anwendungen* der Dualität auf die Geometrie gegeben haben, nehmen Chasles und Steiner, die alle beide in „Poncelets Fußtapfen" wandelten, einen ehrenvollen Platz ein.

Wenden wir uns jetzt zu den Eulerschen Transformationsgleichungen

$$z_1 = z - px, \quad x_1 = p, \quad y_1 = y, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = q, \tag{20}$$

die ebenfalls eine Berührungstransformation darstellen, indem die Gleichung

$$d(z-px)+x\,dp-q\,dy=dz-p\,dx-q\,dy$$

identisch besteht.

Erteilt man den drei Größen $z-px$, p, y bestimmte Werte, setzt man zum Beispiel

$$z-px=a,\quad p=b,\quad y=c,$$

so bestimmen diese drei Gleichungen einen Elementverein, und zwar eine *Gerade*

$$z-bx=a,\quad y=c,$$

die in einer mit der zx-Ebene parallelen Ebene $y=c$ gelegen ist, die ferner mit der Horizontalebene den Winkel $\varphi=\text{arc tg.}\,b$ bildet, die endlich die zy-Ebene in einem Punkte trifft, dessen z-Ordinate gleich a ist. Wenn wir den Größen $z-px$, p, y bestimmte Zahlenwerte erteilen, so greifen wir also gleichzeitig unter allen mit der zx-Ebene parallelen Geraden eine bestimmte heraus, und wir können dementsprechend $z-px$, p und y als Linienkoordinaten auffassen, die zur Bestimmung von Geraden eines speziellen linearen Linienkomplexes dienen. Die Eulersche*) Transformation (20) läßt sich daher, wie wir sogleich näher ausführen, als der analytische Ausdruck einer begrifflichen Operation auffassen, die darauf hinauskommt, daß die räumlichen Gebilde nicht als Punktörter sondern als *Brennflächen resp. Brennkurven eines Strahlensystems* aufgefaßt werden. Liegt zum Beispiel eine Fläche vor, deren Gleichung in Cartesischen Punktkoordinaten die Form $z-\Omega(x,y)=0$ besitzt, so hat diese Fläche ∞^2 Tangenten, die mit der zx-Ebene parallel sind. Für jede einzelne unter diesen Tangenten haben die drei Linienkoordinaten: $z_1=z-px$, $x_1=p$, $y_1=y$ bestimmte Zahlenwerte, die aus den Gleichungen

$$z_1=\Omega(xy)-x\Omega_x,\quad x_1=\Omega_x,\quad y_1=y$$

berechnet werden. Daher findet man durch Elimination von x und y zwischen den drei letzten Gleichungen eine Relation $z_1-W(x_1y_1)=0$, die alle mit der zx-Ebene parallelen Tangenten unserer Fläche bestimmt. Die hier durchgeführten Rechnungen sind eben diejenigen, die man ausführen muß, wenn man die Eulersche Transformation auf die Fläche

$$z-\Omega(xy)=0$$

ausführen will.

---

*) In seinen berühmten Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung (Journal de d'École polyt. Heft 17 u. 18, (1815 u. 20)) wandte Ampère u. a. die Eulersche Transformation auf Gleichungen von der Form

$$rt-s^2+Ar+Bs+Ct+D=0$$

an. Eulers wie Ampères Untersuchungen sind aber in rein analytischer Form dargestellt; von geometrischer oder begrifflicher Deutung findet man in ihren Arbeiten, soweit uns bekannt, keine Spur.

Man kann aber die Eulersche Transformation auch in anderer Weise (vgl. S. 198f.) auffassen, nämlich als eine geometrische Operation die jedes Flächenelement x, y, z, p, q in eine neue Lage bringt. Bei dieser Auffassung geht jeder Punkt: $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ in einen Elementverein über, den man dadurch findet, daß man zwischen den Transformationsgleichungen (20) die Größen p, q, p_1, q_1 eliminiert, und sodann in die gefundenen Gleichungen

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \quad y_1 - y = 0$$

die Werte $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ einführt:

$$z_1 - \gamma + \alpha x_1 = 0, \quad y_1 - \beta = 0.$$

Es geht also jeder Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ in die Gerade:

$$z_1 + \alpha x_1 - \gamma = 0, \quad y_1 = \beta$$

über; es geht ferner jede Fläche in eine Fläche (oder Kurve) über, die man findet, indem man die Bildlinien aller Punkte der gegebenen Fläche und die im Endlichen gelegene Brennfigur des hervorgehenden Strahlensystems aufsucht.

Die hier vorgetragenen Auffassungen der Eulerschen Transformation, die alle beide von uns herrühren*), haben insofern eine äußere Ähnlichkeit, als in beiden Fällen die Begriffe Strahlensystem und Brennfläche eine wichtige Rolle spielen. Nichtsdestoweniger sind beide Auffassungen verschieden.

Wünschen wir die Brücke zu finden, die den Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen der Eulerschen Transformation klarstellt, so knüpfen wir am besten an die Betrachtung der beiden Gleichungen

$$z_1 - z + x_1 x = 0, \quad y_1 - y = 0$$

an, die in knappster Form die Eulersche Transformation definieren. Diese Gleichungen ordnen jedem Punkte $x_1 = \alpha_1$, $y_1 = \beta_1$, $z_1 = \gamma_1$ eine Gerade $\gamma_1 - z + \alpha_1 x = 0$, $\beta_1 - y = 0$ des Raumes x, y, z zu. *Man kann daher die Größen x_1, y_1, z_1 in zwei Weisen auffassen, entweder als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume x_1, y_1, z_1, oder aber als Linienkoordinaten im Raume x, y, z, die zur Bestimmung derjenigen ∞^3 Geraden dienen, die mit der zx-Ebene parallel sind.*

Faßt man x_1, y_1, z_1 als Cartesische Punktkoordinaten auf, so wird man dazu geführt die Eulersche Transformation als eine *geometrische Operation* aufzufassen, die alle räumlichen Gebilde in *neue* Gebilde überführt. Deutet man dagegen x_1, y_1, z_1 als Linienkoordinaten aller mit der zx-Ebene parallelen Geraden, so muß man die Eulersche Transformation

*) Verhandlungen der Ges. d. W. zu Christiania 1870, S. 506; Math. Ann. Bd. V, S. 148ff.

als eine *begriffliche Operation* auffassen, die darin besteht, daß wir von der Cartesischen Darstellung eines räumlichen Gebildes zu einer neuen Darstellung *desselben* Gebildes übergehen.

Es liege nun eine beliebige Berührungstransformation

(1) $$x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y, \quad z_1 = Z, \quad p_1 = P, \quad q_1 = Q$$

vor, die durch eine, zwei oder drei Gleichungen von der Form

$$\Omega_\varkappa(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad (\varkappa = 1 \cdots)$$

definiert wird. Man kann immer eine derartige Transformation in zwei wesentlich verschiedenen Weisen auffassen und zwar entweder als eine geometrische Operation, die alle Elemente x, y, z, p, q in *andere* Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 überführt — oder aber als eine rein begriffliche Operation, die darauf hinauskommt, daß die ursprünglichen Elementkoordinaten x, y, z, p, q durch neue Elementkoordinaten, nämlich die Größen X, Y, Z, P, Q ersetzt werden.

Das Gleichungssystem $\Omega_\varkappa = 0$ ordnet jedem Punkte $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ ein Gebilde des Raumes x, y, z zu, nämlich das Gebilde

(21) $$\Omega_\varkappa(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0.$$

Man kann daher die Größen x_1, y_1, z_1 in zwei verschiedenen Weisen deuten, nämlich entweder als Cartesische Punktkoordinaten des neuen Raumes x_1, y_1, z_1, oder aber als Bestimmungsstücke der ∞^3 Gebilde (21) des Raumes x, y, z.

Deutet man x_1, y_1, z_1 als Cartesische Punktkoordinaten in einem neuen Raume, so wird man dazu geführt, die Berührungstransformation als eine geometrische Operation aufzufassen, die jedes Element x, y, z, p, q in ein *neues* Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 überführt, die ferner jeden Elementverein des Raumes x, y, z in einen Elementverein des Raumes x_1, y_1, z_1 umwandelt.

Deutet man dagegen x_1, y_1, z_1 als Bestimmungsstücke der ∞^3 Gebilde

(21) $$\Omega_\varkappa(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

des ursprünglichen Raumes x, y, z, so muß man die Berührungstransformation (1) als eine rein begriffliche Operation deuten, die darauf hinauskommt, daß man die Flächen und Kurven des Raumes x, y, z nicht als Punktörter, sondern als Umhüllungsfiguren von Gebilden auffaßt, die der Schar (21) angehören.

Während die Raumfiguren bei der ersten Auffassung von einer Berührungstransformation in *neue* Gebilde übergeführt werden, behalten sie bei der letzten Auffassung ihre Lage im Raume, während ihre analytische Darstellung eine neue Form erhält.

In den folgenden Entwicklungen werden wir bald die eine bald die andere Deutung der Berührungstransformationen zugrunde legen. Beide Auffassungen haben ihren Wert; man muß eben bei jeder Gelegenheit die zweckmäßigste Deutung wählen.

Kapitel II.

Einführung in die Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen.

Wiederholt haben wir darauf hingewiesen, daß einige spezielle Berührungstransformationen schon von Mathematikern des vorigen Jahrhunderts verwertet worden sind. In diesen älteren Arbeiten war jedoch nicht die Transformation an sich, sondern die Umformung und Erledigung bestimmter Probleme der eigentliche Untersuchungsgegenstand. Es war nie die Rede von einer Theorie der betreffenden speziellen Transformation, noch weniger von einer allgemeinen Transformationstheorie.

Legendre benutzte die Lagrangeschen Gleichungen:

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

zur Umformung der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die alle Minimalflächen definiert. Es ist wohl nicht allein möglich sondern sogar wahrscheinlich, daß es ihm bekannt war, daß diese Umformung darauf beruht, daß die Minimalflächen nicht als Punktörter sondern als Umhüllungsgebilde eines Ebenensystems betrachtet werden. Diese Auffassung tritt aber *nicht explizite*, weder bei ihm noch bei seinen Zeitgenossen hervor. *Es entging, wie es scheint, zunächst der Aufmerksamkeit der Mathematiker, daß die Legendresche Transformation auf alle partiellen Differentialgleichungen, auf alle geometrischen Gebilde, ja auf alle Sätze der Geometrie angewandt werden kann.* Die große Tragweite und hervorragende Wichtigkeit dieser Transformation wurde jedenfalls erst später in die richtige Beleuchtung gesetzt.

Im Anfange unseres Jahrhunderts benutzte Ampère sowohl die Eulersche Transformation:

$$z_1 = z - px, \quad x_1 = p, \quad p_1 = -x, \quad y_1 = y, \quad q_1 = q$$

wie wesentlich allgemeinere Transformationen um gewisse partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf einfachere Formen zu bringen. Andererseits verwerteten Lagrange, Poisson, Jacobi und Bour in ihren Untersuchungen über *Störungstheorie* und über die sogenannten kanonischen Systeme:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial \Phi(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial \Phi(x_1, \cdots, p_n)}{\partial x_k}$$

gewisse Transformationen, die allerdings keine Berührungstransformationen darstellen, *die aber durch Hinzufügung einer gewissen Gleichung zu Berührungstransformationen komplettiert werden können. In allen diesen be-*

rühmten Arbeiten war aber nicht die Transformation an sich, sondern die Transformation der betreffenden Differentialgleichungen der wirkliche Untersuchungsgegenstand.

In Poncelets klassischen Arbeiten über die Theorie der reziproken Polaren wurde zum ersten Male eine Berührungstransformation eingehend untersucht, allerdings in geometrischer Einkleidung. Poncelet faßte seine Transformation der reziproken Polaren als ein allgemeines Prinzip auf, das jeden geometrischen Satz in einen neuen Satz überführt.

Wir glauben behaupten zu dürfen, daß wir für die *allgemeine* Theorie der Berührungstransformationen wesentlich dasselbe geleistet haben wie Poncelet für die *spezielle* Legendresche Transformation. Bei unseren Vorgängern findet man ja *nicht einmal eine wirkliche Definition* des Begriffes Berührungstransformation, *noch weniger allgemeine Sätze über Berührungstransformationen.* Durch unsere Arbeiten aus den Jahren 1870 und 1871 wurde zunächst eine *geometrische Theorie der Berührungstransformationen* geschaffen und nach vielen Richtungen für die Geometrie verwertet. Fast gleichzeitig begründeten wir eine *allgemeine Invariantentheorie* der Berührungstransformationen, sowie eine allgemeine *Theorie aller kontinuierlichen Gruppen* von Berührungstransformationen. Die Tragweite und hervorragende Bedeutung dieser Theorien für die Geometrie und besonders für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen versuchten wir durch viele Anwendungen in die richtige Beleuchtung zu setzen.

Wenn wir aber besonderes Gewicht darauf legen, daß bei uns die *Berührungstransformationen an sich* zunächst den Untersuchungsgegenstand bilden, so glauben wir doch, und zwar nicht allein aus pädagogischen Gründen, daß es zweckmäßig sein wird, daß wir uns in diesem Werke soweit möglich an die geschichtliche Entwicklung anschließen; wir werden daher in den ersten Paragraphen dieses Kapitels unter anderm einige Transformationstheorien entwickeln, die in spezieller Form und nicht allgemeingültiger Fassung bei unseren Vorgängern auftreten, während sie in unseren älteren Arbeiten eine präzise *Fassung und eine allgemeingültige Form* erhalten haben. Die Theorien der letzten Paragraphen rühren in ihrer ganzen Ausdehnung von uns her.

§ 1.

Verhalten der Ableitungen zweiter Ordnung bei einer Berührungstransformation.

Bei einer Punkttransformation

$$x_1 = A(x, y, z), \quad y_1 = B(x, y, z), \quad z_1 = C(x, y, z)$$

gehen Flächen, die miteinander eine Berührung m^{ter} Ordnung haben, in

Flächen über, die wiederum eine Berührung m^{ter} Ordnung haben. In der Sprache der Analysis kommt dies darauf hinaus, daß die Ableitungen m^{ter} Ordnung von z_1 nach x_1 und y_1:

$$\frac{\partial^m z_1}{\partial x_1^m}, \quad \frac{\partial^m z_1}{\partial x_1^{m-1} \partial y_1}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial^m z_1}{\partial y_1^m}$$

sich als Funktionen von x, y, z und den Ableitungen erster, zweiter, $\cdots$, m-ter Ordnung von z nach x und y ausdrücken lassen. Eine Punkttransformation führt daher jede partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in eine partielle Differentialgleichung von *derselben Ordnung* über.

Für Berührungstransformationen, die keine Punkttransformationen sind, gelten ganz analoge Sätze; allerdings darf nicht vergessen werden, daß jede derartige Transformation gewisse Flächen in Kurven oder gar in Punkte umwandelt. Von Flächen, die eine solche Ausnahmestellung einnehmen, können wir aber vorläufig absehen; wir werden später erkennen, daß die hiermit ausgeschlossenen Flächen sich von vornherein dadurch definieren lassen, daß sie eine gewisse *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* befriedigen.

Führen wir eine Berührungstransformation

(1) $\quad x_1 = X(x, y, z, p, q), \quad y_1 = Y(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$

auf eine *Fläche* $z = f(x, y)$ *allgemeiner Lage* aus, so ist der transformierte Elementverein wiederum eine *Fläche*, deren Gleichung überdies auf die *Form* $z_1 - f_1(x_1, y_1) = 0$ gebracht werden kann.

Gehen wir von einem beliebig gewählten Element x, y, z, p, q der gegebenen Fläche $z = f$ zu einem beliebigen benachbarten Elemente *derselben* Fläche über, so erfüllen die entsprechenden Inkremente dx, dy, dz, dp, dq der Elementkoordinaten die bekannten Gleichungen:

$$dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy,$$

in denen r, s und t wie gewöhnlich die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

bezeichnen. Sind r_1, s_1, t_1 die Ableitungen zweiter Ordnung von z_1 nach x_1 und y_1, so gelten für die transformierte Fläche $z_1 = f_1(x_1, y_1)$ die analogen Gleichungen:

$$dp_1 - r_1\,dx_1 - s_1\,dy_1 = 0, \quad dq_1 - s_1\,dx_1 - t_1\,dy_1 = 0,$$

die durch Substitution der Werte $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $p_1 = P$, $q_1 = Q$ die Form

(2) $\quad dP - r_1\,dX - s_1\,dY = 0, \quad dQ - s_1\,dX - t_1\,dY = 0$

annehmen.

Hier sind nun X, Y, P und Q bekannte Funktionen von x, y, z, p, q; da aber $z \equiv f(x, y)$ und infolgedessen $p \equiv f_x$ und $q \equiv f_y$ Funktionen von x und y darstellen, so lassen sich auch X, Y, P und Q als Funktionen von x und y auffassen. Bezeichnen wir daher für einen Augenblick eine beliebige unter diesen vier Funktionen mit U, so können wir

$$dU = \frac{dU}{dx}\,dx + \frac{dU}{dy}\,dy$$

und

$$\frac{dU}{dx} = U_x + U_z p + U_p r + U_q s,$$
$$\frac{dU}{dy} = U_y + U_z q + U_p s + U_q t$$

setzen.

In dieser Weise erhält die erste unter den Gleichungen (2) die Form

$$\left(\frac{dP}{dx} - r_1 \frac{dX}{dx} - s_1 \frac{dY}{dx}\right) dx + \left(\frac{dP}{dy} - r_1 \frac{dX}{dy} - s_1 \frac{dY}{dy}\right) dy = 0$$

und da sich aus der Gleichung $z = f(x, y)$ der gegebenen Fläche keine Relation zwischen den Differentialen dx und dy ableiten läßt, so zerlegt sich die letzte Gleichung in die beiden:

$$\frac{dP}{dx} - r_1 \frac{dX}{dx} - s_1 \frac{dY}{dx} = 0,$$
$$\frac{dP}{dy} - r_1 \frac{dX}{dy} - s_1 \frac{dY}{dy} = 0,$$

aus denen durch Auflösung für r_1 und s_1 die Werte

$$(3) \qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{\dfrac{dP}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dP}{dy}\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{R}{N}, \\ s_1 = \dfrac{\dfrac{dP}{dy}\dfrac{dX}{dx} - \dfrac{dP}{dx}\dfrac{dX}{dy}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{S}{N} \end{cases}$$

hervorgehen.

Behandeln wir die letzte Gleichung (2) in ganz entsprechender Weise, so finden wir die analogen Formeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} s_1 = \dfrac{\dfrac{dQ}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dQ}{dy}\dfrac{dY}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{\Sigma}{N}, \\ t_1 = \dfrac{\dfrac{dQ}{dy}\dfrac{dX}{dx} - \dfrac{dQ}{dx}\dfrac{dX}{dy}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}} = \dfrac{T}{N}. \end{cases}$$

Die hiermit gefundenen Ausdrücke der Differentialquotienten r_1, s_1 und t_1 enthalten die Ableitungen nach x und y der Größen X, Y, P und Q, die als Funktionen von x, y, z, p, q gegeben sind und somit die unabhängigen Veränderlichen x und y sowohl explizite wie implizite enthalten. Die *Zähler* und *Nenner*, die sich als *Funktionaldeterminanten* zweier Größen U und V nach x und y darbieten, erhalten durch Ausrechnung die folgende beachtenswerte Form:

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dU}{dx}\dfrac{dV}{dy} - \dfrac{dU}{dy}\dfrac{dV}{dx} = (U_x + U_z p + U_p r + U_q s)\,(V_y + V_z q + V_p s + V_q t) - \\ \qquad - (U_y + U_z q + U_p s + U_q t)\,(V_x + V_z p + V_p r + V_q s) = \\ \qquad = (U_p V_q - U_q V_p)(rt - s^2) + \\ \qquad + [U_p(V_y + V_z q) - (U_y + U_z q) V_p] r + \\ \qquad + [(U_x + U_z p) V_p + U_q (V_y + V_z q) - \\ \qquad\qquad - (U_y + U_z q) V_q - U_p (V_x + V_z p)] s + \\ \qquad + [(U_x + U_z p) V_q - U_q (V_x + V_z p)] t + \\ \qquad + [(U_x + U_z p)(V_y + V_z q) - (U_y + U_z q)(V_x + V_z p)]. \end{cases}
$$

Es ergibt sich in dieser Weise, daß r_1, s_1 und t_1 *rationale* Funktionen von r, s und t sind; die drei Zähler und der gemeinsame Nenner sind sämtlich *linear* in den *vier* Größen $rt - s^2$, r, s und t.

Die oben gefundenen Ausdrücke für r_1, s_1 und t_1 können daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$
(6)\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{A_1 r + B_1 s + C_1 t + D_1 (rt - s^2) + E_1}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{R}{N}, \\ s_1 = \dfrac{A_2 r + B_2 s + C_2 t + D_2 (rt - s^2) + E_2}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{S}{N} = \dfrac{\Sigma}{N}, \\ t_1 = \dfrac{A_3 r + B_3 s + C_3 t + D_3 (rt - s^2) + E_3}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \dfrac{T}{N}. \end{cases}
$$

Die Werte (3) und (4) der Größen r_1, s_1 und t_1 zeigen ferner, daß

$$
r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{RT - S\Sigma}{N^2} = \frac{\dfrac{dP}{dx}\dfrac{dQ}{dy} - \dfrac{dP}{dy}\dfrac{dQ}{dx}}{\dfrac{dX}{dx}\dfrac{dY}{dy} - \dfrac{dX}{dy}\dfrac{dY}{dx}}
$$

ist. Die Größe $r_1 t_1 - s_1^2$ besitzt daher die Form

$$
r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{A_4 r + B_4 s + C_4 t + D_4 (rt - s^2) + E_4}{Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E} = \frac{\Omega}{N}
$$

wo der Zähler Ω wiederum in den Größen r, t, s und $rt - s^2$ *linear* ist.

Wir fassen unsere Resultate in die Formeln

$$
(6')\qquad \frac{r_1}{R} = \frac{s_1}{S} = \frac{t_1}{T} = \frac{r_1 t_1 - s_1^2}{\Omega} = \frac{1}{N}
$$

zusammen, in denen R, S, T, Ω und N Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t bezeichnen, die in den vier Größen r, s, t und $rt - s^2$ *linear* sind.

Aus dem Umstande, daß r_1, s_1 und t_1 sich als Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t ausdrücken, folgt unmittelbar, daß Flächen *allgemeiner Lage*, die sich *oskulieren*, in *Flächen* übergehen, die sich ebenfalls oskulieren. Es ergibt sich ferner, daß *alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung im allgemeinen in Flächen übergehen, die dann ebenfalls eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen**).

Wünschen wir eine Berührungstransformation auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auszuführen, so denken wir uns am besten, daß die Transformationsgleichungen:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

nach denjenigen Veränderlichen aufgelöst vorliegen, die wir eliminieren wollen. Ist dann

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

die vorgelegte partielle Differentialgleichung, so ist

$$\Phi\left(X, Y, Z, P, Q, \frac{R}{N}, \frac{S}{N}, \frac{T}{N}\right) = 0$$

die transformierte Differentialgleichung.

Liegt insbesondere eine sogenannte Monge-Ampèresche Gleichung vor, das heißt eine Gleichung, die in r_1, s_1, t_1 und $r_1 t_1 - s_1^2$ linear ist:

$$Hr_1 + 2Ks_1 + Lt_1 + M(r_1 t_1 - s_1^2) + U = 0,$$

so leuchtet unmittelbar ein, daß auch die transformierte Gleichung:

$$HR + 2KS + LT + M\Omega + UN = 0$$

in r, s, t und $rt - s^2$ linear ist.

Satz 18. *Eine Berührungstransformation führt immer jede Monge-Ampèresche Gleichung in eine ebensolche Gleichung über***).

Wir wenden uns wiederum zu der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen.

---

*) Die wichtigen Bemerkungen des Textes, die sich ohne weiteres auf partielle Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung in n Veränderlichen ausdehnen, finden sich bei unseren Vorgängern nicht, die ja den allgemeinen Begriff der Berührungstransformationen noch nicht besaßen.

**) Der allgemeine Satz des Textes rührt von uns her; Verh. der Ges. d. W. zu Christiania, 1871, S. 85; Math. Ann. Bd. V, S. 163. Spezielle Fälle dieses Satzes finden sich schon bei Ampère {vgl. das Zitat auf S. 238} und Imschenetsky (Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre... traduit du russe par J. Hoüel, Greifswald 1872).

Die früher (S. 245) gefundenen Formeln

$$(6') \qquad r_1 = \frac{R}{N}, \quad s_1 = \frac{S}{N} = \frac{\Sigma}{N}, \quad t_1 = \frac{T}{N}, \quad r_1 t - s_1^2 = \frac{\Omega}{N}$$

gelten nach den bei ihrer Ableitung gemachten Voraussetzungen für Flächen $z - f(x, y) = 0$, die sich in *Flächen* transformieren, deren Gleichung die allgemeine *Form* $z_1 - f_1(x_1, y_1) = 0$ besitzt. Da nun die Formeln (6') illusorisch werden, sobald der Nenner

$$(7) \qquad N \equiv \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}$$

verschwindet, so liegt es nahe zu vermuten, daß die Größe N, die von x, y, z, p, q, r, s, t abhängt, nur für solche Flächen $z - f(x, y) = 0$ verschwindet, die entweder in *Kurven* (bez. Punkte) des Raumes x, y, z übergehen oder aber in Flächen, deren Gleichung die *Form* $\psi(x_1, y_1) = 0$ besitzt. Wirklich zeigt auch die Formel (7), daß N nur dann verschwindet, wenn X und Y durch die Substitution

$$z = f(x, y), \quad p = f_x, \quad q = f_y$$

in Funktionen von x und y übergehen, die durch eine Relation

$$\omega(X, Y) = 0$$

verknüpft sind. Jede Integralfläche der partiellen Differentialgleichung $N = 0$ transformiert sich also in einen Verein, dessen Elemente x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 eine Relation von der Form $\omega(x_1, y_1) = 0$ erfüllen; der transformierte Verein ist daher entweder eine Zylinder*fläche* $\omega(x_1, y_1) = 0$ oder aber eine *Kurve* oder aber ein *Punkt*, wie oben angekündigt wurde.

Die Gleichung $N = 0$ ist im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung, sie kann aber von r, s und t frei sein und ist dann eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung; es ist ferner denkbar, daß N auch von p und q frei ist, ja es kann vorkommen, daß N sich auf eine von Null verschiedene Konstante reduziert. Wir werden uns mit diesen verschiedenen Fällen beschäftigen und werden dabei insbesondere nachweisen, daß der Nenner N nur dann von r, s und t frei ist, wenn die vorliegende Berührungstransformation eine *Punkt*transformation ist.

Die früher aufgestellten Formeln (5) und (7) zeigen, daß N auf die Form:

$$(8) \quad \begin{cases} N \equiv (X_p Y_q - X_q Y_p)(rt - s^2) + [X_p(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_p] r \\ \quad + [(X_x + X_z p) Y_p + X_q(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_q - X_p(Y_x + Y_z p)] s \\ \qquad + [(X_x + X_z p) Y_q - X_q(Y_x + Y_z p)] t + \\ \qquad + [(X_x + X_z p)(Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q)(Y_x + Y_z p)] \end{cases}$$

gebracht werden kann. Dieser Ausdruck ist aber nur dann von r, s, t frei, wenn X und Y die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{gathered} X_p Y_q - X_q Y_p = 0, \\ (X_x + X_z p) Y_p + X_q (Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_q - X_p (Y_x + Y_z p) = 0, \\ X_p (Y_y + Y_z q) - (X_y + X_z q) Y_p = 0, \\ (X_x + X_z p) Y_q - X_q (Y_x + Y_z p) = 0 \end{gathered}$$

erfüllen. Bestehen diese Gleichungen, so ist Y eine Funktion

$$Y = \Omega(X, x, y, z)$$

von X, x, y, z und befriedigt überdies die partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{gathered} - X_p (\Omega_x + \Omega_z p) + X_q (\Omega_y + \Omega_z q) = 0, \\ X_p (\Omega_y + \Omega_z q) = 0, \qquad X_q (\Omega_x + \Omega_z p) = 0. \end{gathered}$$

Hierzu ist aber erforderlich, daß entweder die Gleichungen:

$$\Omega_x + \Omega_z p = 0, \qquad \Omega_y + \Omega_z q = 0$$

oder aber die Gleichungen

$$X_p = 0, \qquad X_q = 0$$

stattfinden.

Bestehen die Gleichungen

$$\Omega_x + \Omega_z p = 0, \qquad \Omega_y + \Omega_z q = 0,$$

so muß Ω_z gleich Null sein: denn sonst bestimmten die Gleichungen:

$$p = - \frac{\Omega_x}{\Omega_z}, \qquad q = - \frac{\Omega_y}{\Omega_z}$$

die Größen p und q als Funktionen von X, x, y, z, und dann käme durch Elimination von X eine Relation zwischen x, y, z, p, q, was an sich unmöglich ist. Wäre andererseits Ω_z gleich Null, so verschwänden auch Ω_x und Ω_y, und es bestände eine Relation $Y = \Omega(X)$, was ebenfalls ausgeschlossen ist.

Es müssen daher die beiden Ableitungen X_p und X_q verschwinden und X dementsprechend eine Funktion von x, y, z sein, dann ist aber auch $Y = \Omega(X, x, y, z)$ eine Funktion von x, y, z, und da X und Y voneinander unabhängig sind, so zeigen die beiden Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= (ZX) = Z_p (X_x + X_z p) + Z_q (X_y + X_z q), \\ 0 &= (ZY) = Z_p (Y_x + Y_z p) + Z_q (Y_y + Y_z q), \end{aligned}$$

daß auch Z_p und Z_q gleich Null sein müssen: denn die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_x + X_z p & X_y + X_z q \\ Y_x + Y_z p & Y_y + Y_z q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & X_y \\ Y_x & Y_y \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} X_z & X_y \\ Y_z & Y_y \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} X_x & X_z \\ Y_x & Y_z \end{vmatrix}$$

kann nicht identisch verschwinden, weil X und Y unabhängige Funktionen von x, y, z sein müssen.

Der Nenner N ist daher dann und nur dann von r, s, t frei, wenn die vorliegende Berührungstransformation eine Punkttransformation ist.

Ist die vorgelegte Berührungstransformation eine Punkttransformation, so ist die Gleichung $N = 0$, wie die Formel (7') zeigt, im allgemeinen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zwar in Lagranges Sinne des Worts eine lineare partielle Differentialgleichung. Die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung gehen bei der Transformation in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ über.

Es ist aber denkbar, daß N nicht allein von r, s, t, sondern zugleich von p und q frei ist. Das tritt ein, wenn die beiden Funktionaldeterminanten:

$$\begin{vmatrix} X_z & X_y \\ Y_z & Y_y \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} X_x & X_z \\ Y_x & Y_z \end{vmatrix}$$

verschwinden, das heißt, wenn zwei Relationen von der Form:

$$\Phi(X, Y, x) = 0, \qquad \Psi(X, Y, y) = 0$$

bestehen, wenn also X und Y die Form:

$$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y)$$

haben. Die Transformation besitzt dann die Form:

$$x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y), \qquad z_1 = Z(x, y, z)$$

und es sind die Zylinderflächen $\alpha(x, y) = 0$, die sich in die Zylinderflächen $\beta(x_1, y_1) = 0$ transformieren.

Der Vollständigkeit wegen bemerken wir noch, daß eine Punkttransformation alle Raumkurven in Raumkurven überführt.

Wir nehmen jetzt an, daß die vorliegende Berührungstransformation keine Punkttransformation ist, und daß dementsprechend die Gleichung $N = 0$ eine partielle Differentialgleichung *zweiter* Ordnung

$$0 = N \equiv Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E$$

darstellt. Die Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichung gehen, wissen wir, entweder in Kurven (beziehungsweise Punkte) des Raumes x, y, z, über oder aber in Zylinderflächen, deren Gleichung die Form $\omega(x_1, y_1) = 0$ besitzt. Es ist dabei nicht schwer zu erkennen, daß die Integralflächen der Gleichung $N = 0$ im allgemeinen in Kurven, nur ausnahmsweise in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ übergehen können. Dies beruht darauf, daß die Flächenelemente *aller* Zylinder $\omega(x_1, y_1) = 0$ eine geometrische Bedingung erfüllen, während die Elemente aller Kurven des Raumes x, y, z keiner Bedingung unterworfen sind. Hieraus folgt nämlich einerseits, daß die Integralflächen der Gleichung $N = 0$ nicht sämtlich eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Phi(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen*),

*) Bei der Redaktion des Textes wollen wir nicht als bekannt voraussetzen, daß es undenkbar ist, daß alle Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen.

andererseits, daß unter den Integralflächen der Gleichung $N = 0$ nur diejenigen in Zylinderflächen $\omega(x_1, y_1) = 0$ übergehen können, die überdies eine gewisse partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Psi(x, y, z, p, q) = 0$ erfüllen.

Ehe wir unsere Ergebnisse in einem Theorem zusammenfassen, wollen wir jedenfalls einige unter unseren Resultaten durch neue Betrachtungen ableiten, die ein selbständiges Interesse darbieten.

Wir wollen annehmen, daß X, Y und Z drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q darstellen, die paarweise in Involution liegen, und daß dementsprechend die Gleichungen: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ zusammen mit zwei hinzutretenden Gleichungen:

$$p_1 = P(x, y, z, p, q), \quad q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

eine Berührungstransformation bestimmen. Schon im vorigen Kapitel (S. 221 f.) lernten wir die Größen P und Q als Funktionen von x, y, z, p, q zu berechnen. Wir werden jetzt diese Berechnung in anderer Weise durchführen und erhalten dabei einige beachtenswerte Resultate.

Jede *Fläche* $z = f(x, y)$ des Raumes x, y, z erfüllt die Pfaffsche Gleichung

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0;$$

dementsprechend befriedigt der transformierte Elementverein des Raumes x_1, y_1, z_1 die Gleichung

$$dz_1 - p_1\,dx_1 - q_1\,dy_1 = 0,$$

die bei der Substitution $x_1 = X$, $y_1 = Y$, $z_1 = Z$ die Form

$$dZ - p_1\,dX - q_1\,dY = 0$$

annimmt. Hier können X, Y und Z, die gegebene Funktionen von x, y, z, p, q sind, als Funktionen von x und y aufgefaßt werden. Alsdann erhält die letzte Gleichung die Form

$$\left(\frac{dZ}{dx} - p_1\frac{dX}{dx} - q_1\frac{dY}{dx}\right)dx + \left(\frac{dZ}{dy} - p_1\frac{dX}{dy} - q_1\frac{dY}{dy}\right) = 0$$

und zerlegt sich dementsprechend in die beiden Gleichungen

$$\frac{dZ}{dx} - p_1\frac{dX}{dx} - q_1\frac{dY}{dx} = 0,$$

$$\frac{dZ}{dy} - p_1\frac{dX}{dy} - q_1\frac{dY}{dy} = 0,$$

aus denen für p_1 und q_1 die Werte:

$$p_1 = \frac{\frac{dZ}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}} = P,$$

$$q_1 = \frac{\frac{dX}{dx}\frac{dZ}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dZ}{dx}}{\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx}} = Q$$

hervorgehen.

In den hiermit gefundenen Ausdrücken für P und Q sind die Zähler und der gemeinsame Nenner N Funktionaldeterminanten, die bei Ausführung (vgl. S. 245) in Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t übergehen, die hinsichtlich r, s, t und $rt - s^2$ *linear* sind. Nehmen wir nun insbesondere an, daß unsere Berührungstransformation *keine Punkt*transformation ist, so wissen wir, daß in dem Nenner

$$N = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E$$

die Koeffizienten A, B, C und D *nicht* sämtlich gleich Null sind. Und da P und Q nur von x, y, z, p, q abhängen, so erkennen wir, daß auch die beiden Zähler jedenfalls einige unter den Ableitungen zweiter Ordnung r, s, t wirklich enthalten.

Hieraus schließen wir, daß eine jede unter den drei Gleichungen

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = 0, \qquad \frac{dZ}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dY}{dx} = 0,$$
$$\frac{dZ}{dx}\frac{dX}{dy} - \frac{dZ}{dy}\frac{dX}{dx} = 0$$

eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt. Wir sehen aber gleichzeitig, daß diese drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht wesentlich verschieden sind, indem die linksstehenden Ausdrücke sich nur um Faktoren unterscheiden, die von r, s, t frei sind. Sehen wir von diesen gewissermaßen unwesentlichen Faktoren ab, so sind unsre drei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen identisch; ihre gemeinsamen Integralflächen lassen sich dadurch charakterisieren, daß sie von unsrer Berührungstransformation in die *Kurven* (bez. Punkte) des Raumes x_1, y_1, z_1 übergeführt werden.

Zu jeder Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die keine Punkttransformation ist, steht somit eine gewisse Monge-Ampèresche Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Veränderlichen x, y, z in einer eigentümlichen Beziehung.

Sind die ∞^3 Elementvereine, die durch die drei Gleichungen

$$X(x, y, z, p, q) = a, \quad Y = b, \quad Z = c$$

dargestellt werden, dreifach unendlich viele *Flächen*, so findet man alle Integralflächen dieser Monge-Ampèreschen Gleichung, indem man unter den ∞^3 Flächen: $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ nach arbiträrem Gesetz einfach

unendlich viele herausgreift und ihre Umhüllungsfläche konstruiert; diese Umhüllungsflächen sind es ja, die bei unserer Transformation in die Kurven des Raumes x_1, y_1, z_1 übergehen. In diesem Falle lassen sich die Gleichungen $X = a$, $Y = b$ nach p und q auflösen; dementsprechend ist die Größe $X_p Y_q - X_q Y_p$ von Null verschieden, und es ist daher im Ausdruck der Größe N der Koeffizient des Gliedes $rt - s^2$ von Null verschieden. —

Bestimmen dagegen die Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ dreifach unendlich viele *Kurven*, so ist die Gleichung $N = 0$ linear in r, s und t, und dann sind die Integralflächen von $N = 0$ jedesmal erzeugt von ∞^1 Kurven aus der Schar $X = a$, $Y = b$, $Z = c$.

Wir fassen unsre wichtigsten Ergebnisse folgendermaßen zusammen.

Theorem VI. *Eine Punkttransformation*

$$x_1 = X(x, y, z), \quad y_1 = Y(x, y, z), \quad z_1 = Z(x, y, z)$$

führt Flächen, die sich berühren, in ebensolche über. Die Ableitungen erster Ordnung p_1 und q_1 von z_1 nach x_1 und y_1 sind rationale Funktionen von p und q, deren Zähler und gemeinsamer Nenner linear in p und q sind. Die Ableitungen zweiter Ordnung r_1, s_1 und t_1 drücken sich linear in r, s, t aus, und es gehen daher lineare partielle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) in ebensolche Gleichungen über.

Eine Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q),$$

die keine Punkttransformation ist, führt im allgemeinen Flächen in Flächen über. Diejenigen Flächen des Raumes x, y, z, die in Kurven bez. Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 übergehen, lassen sich als die Integralflächen einer Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung definieren:

$$\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dY}{dx} = Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

die nur dann in r, s, t linear ist, wenn die Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ dreifach unendlich viele Kurven darstellen. Stellen diese drei Gleichungen ∞^3 Flächen dar, so findet man alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung, indem man unter diesen ∞^3 Flächen einfach unendlich viele herausgreift und die zugehörige Umhüllungsfläche konstruiert. Definieren dagegen die Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ dreifach unendlich viele Kurven, so sind die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung jedesmal von ∞^1 Kurven jener Schar erzeugt.

Die Differentialquotienten zweiter Ordnung r_1, s_1, t_1, sowie die Größe $r_1 t_1 - s_1^2$ sind rationale Funktionen von r, t, s, deren Zähler und gemeinsamer Nenner in r, s, t und $rt - s^2$ linear sind. Ist der Nenner frei von r, s, t, so ist die Transformation eine Punkttransformation.

Bei einer Berührungstransformation geht jede Monge-Ampèresche Gleichung zweiter Ordnung in eine ebensolche Gleichung über.

Die Theorie der Berührungstransformationen hat uns zu einer wichtigen Kategorie von Monge-Ampèreschen Gleichungen geführt. Wir wollen diese Differentialgleichungen in mehr direkter Weise definieren und sodann einige wichtige Eigenschaften dieser Gleichungen ableiten.

Liegen zwei unabhängige Funktionen u und v von x, y, z, p, q miteinander in Involution

$$[u, v] = 0,$$

so gibt es, wissen wir, immer eine dritte Funktion w, die von u und v unabhängig ist und mit beiden in Involution liegt:

$$[u, w] = 0, \quad [v, w] = 0;$$

es besteht ferner eine ganz bestimmte identische Relation von der Form:

$$dz - p\,dx - q\,dy = U\,du + V\,dv + W\,dw$$

und es stellen dementsprechend die Gleichungen

$$x_1 = u, \quad y_1 = v, \quad z_1 = w, \quad p_1 = -\frac{U}{W}, \quad q_1 = -\frac{V}{W}$$

eine Berührungstransformation dar. Die zugehörige Monge-Ampèresche Differentialgleichung, deren Integralflächen in die Kurven des Raumes x_1, y_1, z_1 übergehen, besitzt die Form

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0.$$

Es gilt daher der Satz

Satz 19. *Sind u und v unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die in Involutionsbeziehung stehen und nicht beide von p und q frei sind, so können alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} = 0$$

durch eine passend gewählte Berührungstransformation in die Kurven des Raumes x, y, z übergeführt werden.

Sind wiederum u, v, w drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die paarweise in Involution liegen, so erhalten wir, wie wir sahen, immer *dieselbe* Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) + E = 0,$$

wenn wir die drei Funktionaldeterminanten

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}, \quad \frac{du}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dx}$$

gleich Null setzen. Infolgedessen stellt eine jede unter den drei Gleichungen

$$v - \varphi(u) = 0, \quad w - \psi(u) = 0, \quad w - \chi(v) = 0$$

mit den willkürlichen Funktionen φ, ψ und χ eine *intermediäre Integralgleichung* unsrer Monge-Ampèreschen Gleichung dar.

Unsre partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat aber noch allgemeinere intermediäre Integralgleichungen. Es läßt sich in der Tat nachweisen, daß jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$W(u, v, w) = 0$$

eine intermediäre Integralgleichung darstellt. Unter den Integralgebilden der Gleichung $W(u, v, w) = 0$ finden sich ∞^2, die wir von vorneherein angeben können. Unter den ∞^3 Elementvereinen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

sind nämlich diejenigen, deren Parameter a, b, c die Bedingung $W(a, b, c) = 0$ erfüllen, Integralgebilde der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $W(u, v, w) = 0$. Man findet daher alle Integralgebilde der Gleichung $W = 0$, wenn man unter den soeben besprochenen ∞^3 Integralgebilden einfach unendlich viele herausgreift und ihr Umhüllungsgebilde konstruiert. Es sind daher alle Integralflächen der Gleichung erster Ordnung

$$W(u, v, w) = 0$$

gleichzeitig Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung zweiter Ordnung.

Dies gibt uns den Satz

Satz 20. *Sind u, v, w drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die paarweise in Involution liegen, so ist jede partielle Differentialgleichung von der Form $W(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung von einer Monge-Ampèreschen Gleichung zweiter Ordnung, die man findet, indem man die Funktionaldeterminante von zwei unter den Größen u, v, w nach x und y bildet und gleich Null setzt.*

Sind u, v, w drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die paarweise in Involution liegen, sind ferner u_1, v_1, w_1 drei unabhängige Funktionen von x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, die ebenfalls paarweise in Involution liegen, so ist leicht zu erkennen, daß die beiden zugehörigen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Beziehung zueinander stehen, daß die eine in die andere durch eine passend gewählte Berührungstransformation übergeführt werden kann. Wir können ja nämlich eine Berührungstransformation

$$x' = u(x, y, z, p, q), \quad y' = v, \quad z' = w, \quad p' = P, \quad q' = Q$$

aufstellen, die alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{dz}{dy}\frac{dv}{dx} = 0 \tag{9}$$

in die Kurven (bez. Punkte) des Raumes x', y', z' überführt; wir finden ferner eine Berührungstransformation:

$$x' = u_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \quad y' = v_1, \quad z' = w_1, \quad p' = P_1, \quad q' = Q_1,$$

die alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung

$$\frac{du_1}{dx_1}\frac{dv_1}{dy_1} - \frac{du_1}{dy_1}\frac{dv_1}{dx_1} = 0 \tag{10}$$

in die Kurven (bez. Punkte) des Raumes x', y', z' umwandelt. Hieraus schließen wir, daß die Gleichungen

$$u(x, y, z, p, q) = u_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1), \quad v = v_1, \quad w = w_1, \quad P = P_1, \quad Q = Q_1$$

eine Berührungstransformation bestimmen und daß diese Berührungstransformation die eine Monge-Ampèresche Gleichung (9) in die andere (10) überführt.

Hiermit erhalten wir nun das folgende Theorem:

Theorem VII. *Besitzt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in den Veränderlichen x, y, z eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung*

$$v(x, y, z, p, q) - \varphi(u(x, y, z, p, q)) = 0$$

mit der willkürlichen Funktion φ und besteht überdies die Gleichung

$$[u, v] = 0,$$

so kann die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung durch Berührungstransformation auf die kanonische Form $r_1 = 0$ gebracht werden. Es gibt dann immer eine von u und v unabhängige Funktion $w(x, y, z, p, q)$, die mit u und v in Involution liegt. Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

ist eine intermediäre Integralgleichung).*

Beispiel I. Wir betrachten zuerst die Legendresche Transformation. Setzen wir in die Gleichungen

$$dp_1 - r_1\,dx_1 - s_1\,dy_1 = 0, \quad dq_1 - s_1\,dx_1 - t_1\,dy_1 = 0$$

die Werte

$$x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

ein, so erhalten wir die Relationen:

$$dx + r_1\,dp + s_1\,dq = 0, \quad dy + s_1\,dp + t_1\,dq = 0$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$dx + r_1(r\,dx + s\,dy) + s_1(s\,dx + t\,dy) = 0,$$
$$dy + s_1(r\,dx + s\,dy) + t_1(s\,dx + t\,dy) = 0,$$

*) Vgl. Neue Integrationsmethode der Monge-Ampèreschen Gleichung, Archiv for Math. og Naturv. Bd. II, S. 8 f. Kristiania 1877.

aus denen sich die vier Gleichungen

$$rr_1 + ss_1 = -1, \quad rs_1 + st_1 = 0,$$
$$sr_1 + ts_1 = 0, \quad ss_1 + tt_1 = -1$$

und durch Auflösung

$$r_1 = -\frac{t}{rt-s^2}, \quad s_1 = \frac{s}{rt-s^2}, \quad t_1 = -\frac{r}{rt-s^2}, \quad r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{1}{rt-s^2}$$

ergeben. Jetzt sind es nach unsrer allgemeinen Theorie die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$rt - s^2 = 0,$$

die in Kurven des Raumes x_1, y_1, z_1 übergehen. Diese Integralflächen sind aber abwickelbare Flächen und Poncelets allgemeine Theorie der Dualität sagt bekanntlich aus, daß die abwickelbaren Flächen zu den Kurven des Raumes dualistisch sind. Nehmen wir irgend eine andere partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0$$

und führen auf sie die Legendresche Transformation aus, so erhalten wir die neue partielle Differentialgleichung

$$F\left(p,\ q,\ z-px-qy,\ -x,\ -y,\ \frac{-t}{rt-s^2},\ \frac{s}{rt-s^2},\ \frac{-r}{rt-s^2}\right) = 0.$$

Alle nicht abwickelbaren Integralflächen der ursprünglichen Gleichung sind in wirkliche Integral*flächen* der neuen Gleichung übergegangen. Ist es aber denkbar, daß in dieser Weise einige Integralflächen verloren gegangen sind, so ist es auf der anderen Seite auch denkbar, daß die neue Gleichung developpable Integralflächen besitzt, deren Bildfiguren im Raume x, y, z Kurven, also keine Integralflächen der ursprünglichen Gleichung sind.

Beispiel 2. Wenden wir uns jetzt zu den Eulerschen Transformationsgleichungen:

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q.$$

Hier finden wir aus den Gleichungen:

$$dp_2 - r_2\,dx_2 - s_2\,dy_2 = 0, \quad dq_2 - s_2\,dx_2 - t_2\,dy_2 = 0$$

oder:

$$dx + r_2(r\,dx + s\,dy) + s_2\,dy = 0, \quad s\,dx + t\,dy - s_2(r\,dx + s\,dy) - t_2\,dy = 0$$

die Relationen:

$$1 + rr_2 = 0, \quad s - rs_2 = 0,$$
$$r_2 s + s_2 = 0, \quad t - s_2 s - t_2 = 0,$$

mithin wird:

$$r_2 = -\frac{1}{r}, \quad s_2 = -\frac{s}{r}, \quad t_2 = \frac{rt - s^2}{r}, \quad r_2 t_2 - s_2^2 = -\frac{t}{r}$$

und:

$$r = -\frac{1}{r_2}, \quad s = -\frac{s_2}{r_2}, \quad t = \frac{r_2 t_2 - s_2^2}{r_2}, \quad rt - s^2 = -\frac{t_2}{r_2}.$$

Hier sind es nach der allgemeinen Theorie die Integralflächen der Gleichung $r = 0$, also, wenn $\varphi(y)$ und $\psi(y)$ willkürliche Funktionen bezeichnen, die Flächen:

$$z = \varphi(y) + x\psi(y),$$

die in Kurven des Raumes übergehen. Es sind das die geradlinigen Flächen, die von zur x,z-Ebene parallelen Geraden erzeugt werden.

§ 2.

Die Integralgebilde der partiellen Differentialgleichungen und ihr Verhalten bei Berührungstransformationen.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gewann seinerzeit außerordentlich an Einfachheit und Allgemeingültigkeit durch unsere Einführung der Begriffe Element und Elementverein, sowie durch unsere Verallgemeinerung der Begriffe partielle Differentialgleichung erster Ordnung und Integralgebilde einer solchen Gleichung. Diese Begriffserweiterungen haben unter anderm die Formulierung einfacher und allgemeingültiger Sätze über das Verhalten der Integrale einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung bei Berührungstransformationen ermöglicht. In dieser Weise erhielten wir insbesondere den folgenden Satz:

Liegt eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und eine beliebige Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

vor, so ist es immer möglich, innerhalb des fünfdimensionalen Elementraumes x, y, z, p, q einen Bereich derart abzugrenzen, daß alle in diesem Bereiche gelegenen Integralgebilde von der Transformation in Integralgebilde der transformierten Gleichung

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

übergeführt werden.

Selbstverständlich machen wir hier wie immer stillschweigend die Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden analytischen Funktionen sich innerhalb eines gemeinsamen Bereiches des Elementraumes *regulär* verhalten.

Auch in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen *zweiter* (und höherer) Ordnung mit einer abhängigen und zwei oder mehr unabhängigen Veränderlichen ist es zweckmäßig, statt des Lagrangeschen

Begriffes *Lösung* $z = f(x, y)$ oder des etwas allgemeineren **Mongeschen** Begriffes *Integralfläche* unseren allgemeinen Begriff *Integralgebilde* einzuführen. Wir definieren den Begriff Integralgebilde, der sich in die spezielleren Begriffe: *Integralfläche, Integralkurve* und *Integralpunkt* spaltet, in folgender Weise:

Ein zweidimensionaler Elementverein e ist Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

wenn jede Berührungstransformation, die den Verein e in eine Fläche f_1 umwandelt, die vorgelegte Gleichung $F = 0$ in eine partielle Differentialgleichung

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$$

überführt, deren Integralfläche f_1 ist.

Um mit dem hiermit eingeführten Begriffe Integralgebilde operieren zu können, müssen wir Kriterien ableiten, vermöge deren wir entscheiden können, ob ein vorgelegter Elementverein e ein Integralgebilde einer gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = 0$ darstellt oder nicht. Die Betrachtungen, die wir zu diesem Zwecke anstellen, werden überdies zeigen, daß wir beliebig viele partielle Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) konstruieren können, die Integralkurven (oder Integralpunkte) besitzen.

Wir werden annehmen, daß wir *eine* Berührungstransformation B_1 gefunden haben, die $F = 0$ in die partielle Differentialgleichung $F_1 = 0$ und den Verein e in eine *Integralfläche* f_1 von $F_1 = 0$ überführt; wir behaupten, daß dann *jede* andere Berührungstransformation B_2, die den Verein e in eine *Fläche* f_2 umwandelt, die Gleichung $F = 0$ in eine solche partielle Differentialgleichung $F_2 = 0$ überführt, für welche f_2 eine Integralfläche darstellt. Zum Beweis bemerken wir, daß die Berührungstransformation $B_1^{-1} B_2$ die Gleichung $F_1 = 0$ und ihre Integralfläche f_1 in die Gleichung $F_2 = 0$ und die Fläche f_2 überführt; wenn aber eine Berührungstransformation eine Integralfläche einer partiellen Differentialgleichung in eine *Fläche* umwandelt, so ist diese Fläche eo ipso eine Integralfläche der transformierten Differentialgleichung. Also ist die Fläche f_2 eine Integralfläche der Gleichung $F_2 = 0$.

Hiermit ist das gesuchte Kriterium gefunden:

Satz 21. *Man entscheidet, ob ein vorgelegter Elementverein e ein Integralgebilde der gegebenen partiellen Differentialgleichung (zweiter Ordnung) $F = 0$ darstellt, indem man eine einzige Berührungstransformation ausführt, die so gewählt ist, daß der Verein e sich in eine Fläche umwandelt. Ist diese Fläche eine Integralfläche der transformierten partiellen Differential-*

gleichung $F_1 = 0$, dann, aber auch nur dann, ist der Verein e ein Integralgebilde der gegebenen partiellen Differentialgleichung $F = 0$.

Jetzt können wir partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung konstruieren, die Integralkurven oder gar Integralpunkte besitzen. Nehmen wir zum Beispiel eine Kurvenschar, bestehend aus ∞^4 gewundenen Kurven, die den Raum ausfüllen, so sind ihre reziproken Polaren hinsichtlich einer allgemeinen Fläche zweiten Grades ∞^4 developpable Flächen

$$f(x_1, y_1, z_1, a, b, c, d) = 0,$$

die keine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung, dagegen *zwei* partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung erfüllen, unter denen eine die Form

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0$$

besitzt. Unsre developpablen Flächen befriedigen somit sicher eine von $r_1 t_1 - s_1^2 = 0$ verschiedene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0.$$

Kehren wir zu den ursprünglichen Veränderlichen zurück, führen wir also noch einmal die früher angewandte dualistische Transformation aus, so geht $\Phi = 0$ sicher (S. 256) in eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

über und die ursprünglich vorgelegten ∞^4 Raumkurven stellen Integralgebilde von $F = 0$ dar.

Diese Betrachtungen führen noch weiter. Die oben besprochenen ∞^4 Developpablen befriedigen ja die partielle Differentialgleichung

$$\Phi + \lambda(r_1 t_1 - s_1^2) = 0$$

mit der willkürlichen Konstanten λ. Also sind unsere ∞^4 Raumkurven Integralgebilde von *allen* partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) + \frac{}{rt - s^2} = 0.$$

Satz 22. *Liegt eine beliebige Schar von ∞^4 Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so ist es immer möglich, zwei unabhängige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu konstruieren, deren gemeinsame Integralkurven diese ∞^4 Kurven sind.*

Noch einfacher ist es, partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu konstruieren, die ∞^∞ viele Integralkurven besitzen, die sämtlich auf einer beliebig gegebenen Fläche liegen. Wir werden uns aber hiermit nicht aufhalten.

Wir können dem im Satze 21 aufgestellten Kriterium eine präzisere Form geben. Will man zum Beispiel untersuchen, ob ein vorgelegter Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ einen Integralpunkt der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

darstellt, so führt man die Legendresche Transformation

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

auf den Punkt und die Gleichung $F = 0$ aus. Man bildet also die Gleichung:

$$z_1 + ax_1 + by_1 - c = 0$$

des gegebenen Punktes in den Ebenenkoordinaten x_1, y_1, z_1 und untersucht sodann, ob der entsprechende Wert von z_1:

$$z_1 = -ax_1 - by_1 + c$$

eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung

$$0 = F\Big(-p_1,\ -q_1,\ z_1 - p_1x_1 - q_1y_1,\ x_1,\ y_1,\ -\frac{t_1}{r_1t_1 - s_1^2},\ \frac{s_1}{r_1t_1 - s_1^2},\ -\frac{r_1}{r_1t_1 - s_1^2}\Big) \equiv F_1$$

darstellt. Ist dies der Fall, so ist der gegebene Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Integralpunkt der ursprünglich vorgelegten Gleichung $F = 0$, sonst nicht.

Liegt andererseits (im endlichen Raume) eine krumme Kurve vor, so wird sie durch eine einzige Gleichung in Ebenenkoordinaten x_1, y_1, z_1 dargestellt. Man löst diese Gleichung nach z_1 auf und untersucht wiederum, ob der hervorgehende Wert $z_1 = f_1(x_1, y_1)$ eine Lösung der transformierten Gleichung $F_1 = 0$ darstellt.

Die Legendresche Transformation gestattet also zu entscheiden, ob eine beliebige im Endlichen gelegene krumme Kurve (oder ein beliebiger im Endlichen gelegener Punkt) eine Integralkurve (bez. Integralpunkt) der gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung $F = 0$ darstellt. Wünscht man dagegen zu wissen, ob eine vorgelegte *Gerade* ein Integralgebilde von $F = 0$ darstellt, so führt die Legendresche Transformation nicht zum Ziele, weil eine Gerade nicht durch *eine* Gleichung, sondern durch *zwei* Gleichungen in den Ebenenkoordinaten x_1, y_1, z_1 dargestellt wird. Jetzt müssen wir eine Berührungstransformation aufsuchen, die unsre Gerade in eine Fläche überführt. Nehmen wir an, daß die vorgelegte Gerade nicht mit der zx-Ebene parallel ist und daß dementsprechend ihre Gleichungen in Cartesischen Koordinaten die Form

$$z = ay + b, \quad x = cy + d$$

besitzen, so werden wir sehen, daß die Eulersche Transformation

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q$$

brauchbar ist. Aufgefaßt als Elementverein wird nämlich unsre Gerade in den ursprünglichen Elementkoordinaten x, y, z, p, q durch die Gleichungen:

$$z = ay + b, \quad x = cy + d, \quad q = a - cp$$

und in den neuen Elementkoordinaten durch die Gleichungen:

$$z_2 - p_2x_2 = ay_2 + b, \quad -p_2 = cy_2 + d, \quad q_2 = a - cx_2$$

dargestellt, und diese letzten Gleichungen liefern nur eine Relation zwischen x_2, y_2 und z_2, nämlich:

$$z_2 + cx_2y_2 + dx_2 - ay_2 - b = 0.$$

Wir haben also zu untersuchen, ob die Größe:

$$z_2 = -cx_2y_2 - dx_2 + ay_2 + b$$

eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung

$$0 = F(-p_2,\ y_2,\ z_2 - p_2x_2,\ x_2,\ q_2 \cdots) \equiv F_2$$

darstellt. Ist dies der Fall, so ist die vorgelegte Gerade ein Integralgebilde der ursprünglich vorgelegten partiellen Differentialgleichung $F = 0$.

Durch Zusammenfassung unsrer Ergebnisse erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem VIII. *Eine vorgelegte krumme Kurve ist Integralkurve der partiellen Differentialgleichung:*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

wenn die Gleichung der Kurve in den Ebenenkoordinaten

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q$$

durch Auflösung nach z_1 eine Lösung $z_1 = f(x_1, y_1)$ der transformierten partiellen Differentialgleichung

$$0 = F\Big(-p_1,\ -q,\ z_1 - p_1x_1 - q_1y_1,\ x_1,\ y_1,\ -\frac{t_1}{r_1t_1 - s_1^2},\ \frac{s_1}{r_1t_1 - s_1^2},\ -\frac{r_1}{r_1t_1 - s_1^2}\Big) \equiv F_1$$

darstellt. Dementsprechend ist der Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Integralpunkt von $F = 0$, wenn die Gleichung

$$z_1 + ax_1 + by_1 - c = 0$$

des Punktes in den Ebenenkoordinaten z_1, x_1, y_1 durch Auflösung nach z_1 eine Lösung der transformierten Gleichung $F_1 = 0$ liefert.

Wünscht man dagegen zu entscheiden, ob eine vorgelegte Gerade:

$$z = ay + b, \quad x = cy + d$$

ein Integralgebilde von $F = 0$ darstellt, so wendet man am besten die Eulersche Transformation:

$$z_2 = z - px, \quad x_2 = p, \quad y_2 = y, \quad p_2 = -x, \quad q_2 = q$$

an. In den Koordinaten x_2, y_2, z_2 wird die vorgelegte Gerade durch eine einzige Gleichung:

$$z_2 + cx_2y_2 + dx_2 - ay_2 - b = 0$$

dargestellt; man untersucht, ob diese Gleichung durch Auflösung nach z_2 eine Lösung der transformierten partiellen Differentialgleichung:

$$0 = F\Big(-p_2,\ y_2,\ z_2 - x_2p_2,\ x_2,\ q_2,\ -\frac{1}{r_2},\ -\frac{s_2}{r_2},\ \frac{r_2t_2 - s_2^2}{r_2}\Big) \equiv F_2$$

liefert. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die vorgelegte Gerade ein Integralgebilde der Gleichung $F = 0$, sonst nicht.

Die eben vorgetragenen Theorien beruhen darauf, daß jeder im Endlichen gelegene zweidimensionale Elementverein, der keine Fläche ist, von der Legendreschen oder jedenfalls von der Eulerschen Transformation in eine *Fläche* übergeführt wird, deren Gleichung die Koordinate z enthält. Dementsprechend gibt es unter allen möglichen analytischen Darstellungen der Elementvereine drei ausgezeichnete und mit diesen drei Darstellungen werden wir uns hier eingehend beschäftigen.

Ein Elementverein, dessen Punktort eine im Endlichen gelegene Fläche ist, wird immer (eventuell nach passender Wahl des Cartesischen Koordinatensystems) durch drei Gleichungen von der Form

$$(11) \qquad z - \Omega(x, y) = 0, \quad p - \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad q - \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$$

dargestellt. Denkt man sich, daß von vornherein ein bestimmtes Cartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt ist, so muß beachtet werden, daß die Zylinderflächen, deren Gerade mit der z-Achse parallel sind, nicht durch drei Gleichungen von der Form (11) dargestellt werden können.

Es sind daher die Punkte des Raumes, die krummen und geraden Linien des Raumes, sowie die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$ *die einzigen zweidimensionalen Elementvereine, die nicht durch drei Gleichungen von der Form* (11) *dargestellt werden können.*

Führen wir die Legendresche Transformation

$$z_1 = z - px - qy, \quad x_1 = p, \quad y_1 = q, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = -y$$

auf die Gleichungen (11) aus, so erhalten wir die Gleichungen

$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = \Omega(-p_1, -q_1), \quad x_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial(-p_1)}, \quad y_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial(-q_1)}.$$

Es liefern daher die Gleichungen

$$(12) \qquad z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = W(p_1, q_1), \quad x_1 = -\frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad y_1 = -\frac{\partial W}{\partial q_1}$$

die allgemeine analytische Darstellung aller Elementvereine, deren Elemente in zweifach unendlich vielen Ebenen liegen. Unter den Flächen sind somit die Integralflächen der Gleichung $rt - s^2 = 0$ die einzigen, die sich nicht durch Gleichungen von der Form (12) darstellen lassen.

Durch passende Wahl der Funktion $W(p_1, q_1)$ *liefern die Gleichungen* (12) *alle zweidimensionalen Elementvereine ausgenommen die Ebenen, die developpablen Flächen, die geraden Linien sowie endlich die unendlich fernen Kurven (bez. Punkte), die ja durch eine Gleichung von der Form* $\omega(p_1, q_1) = 0$ *dargestellt werden. Die Gleichungen* (12) *liefern alle krummen Kurven bez. Punkte des Raumes, wenn* W *nach und nach alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung* $W_{p_1 p_1} W_{q_1 q_1} - (W_{p_1 q_1})^2 = 0$ *darstellt.*

Führen wir die Eulersche Transformation auf die Gleichungen (11) aus, so erhalten wir die Gleichungen

$$z_2 - p_2 x_2 = \Phi(p_2, y_2), \quad x_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial p_2}, \quad q_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \tag{13}$$

als allgemeine analytische Darstellung aller zweidimensionalen Elementvereine, deren Punktort zweifach unendlich viele Tangenten besitzt, die mit der zx-Ebene parallel sind.

Durch passende Wahl der Funktion $\Phi(p_2, y_2)$ liefern die Gleichungen (13) *alle zweidimensionalen Elementvereine ausgenommen die Zylinderflächen $\omega(x_2, y_2) = 0$, die mit der zx-Ebene parallelen Geraden, die Regelflächen, deren Gerade mit der zx-Ebene parallel sind, alle in den Ebenen $y_2 = Const.$ gelegenen Kurven, alle Punkte des Raumes. Die Substitution*

$$\Phi \equiv \varphi(y_2) - p_2 \psi(y_2)$$

gibt alle Kurven, die nicht in den Ebenen $y_2 = Const.$ gelegen sind.

Die einzigen im Endlichen gelegenen zweidimensionalen Elementvereine, die sich weder durch die Gleichungen (11) noch durch die Gleichungen (12) noch durch die Gleichungen (13) darstellen lassen, sind die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$ sowie die mit der zx-Ebene parallelen Geraden. Man erhält eine Darstellung dieser Geraden, wenn man in den Formeln x mit y und p mit q vertauscht. Dagegen entziehen sich die unendlich fernen Elementvereine, die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$ sowie die Geraden $x = a$, $y = b$ unseren sämtlichen Darstellungen.

Selbstverständlich ist es mißlich, daß bei jeder einzelnen unter diesen Darstellungen eines Elementvereins Ausnahmegebilde auftreten. Es gibt aber eine fünfte Darstellung, die, wenn sie auch nicht vollkommen ist, doch jedenfalls besondere Beachtung verdient. Ein System von drei unabhängigen Gleichungen in den Veränderlichen x, y, z, p, q

$$f_1(x, y, z, p, q) = 0, \quad f_2(x, y, z, p, q) = 0, \quad f_3(x, y, z, p, q) = 0$$

stellt einen Elementverein dar, wenn die drei Klammerausdrücke $[f_i f_k]$ vermöge des Gleichungssystems verschwinden. Diese Darstellung leistet ebensoviel wie die vier ersten Darstellungen zusammen. Die einzigen zweidimensionalen Elementvereine, die sich dieser fünften Darstellung entziehen, sind die unendlich fernen Elementvereine (das heißt, die unendlich ferne Ebene und die in ihr gelegenen Kurven und Punkte), die Zylinderflächen $\omega(x, y) = 0$ und die Geraden $x = a$, $y = b$. Es liegt aber in der Natur der Sache, daß diese Elementvereine nicht durch Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten x, y, z, p, q dargestellt werden können.

Eine wesentliche Verbesserung unsrer analytischen Darstellungen der Elementvereine erreichten wir im Jahre 1873, indem wir statt der beiden Größen p und q die Verhältnisgrößen p_1, p_2, p_3 durch die Substitution

$$p = -\frac{p_1}{p_3}, \quad q = -\frac{p_2}{p_3}$$

einführten. In dieser Weise gelang es uns, eine allgemeingültige Darstellung aller Elementvereine aufzustellen, deren Elemente nicht sämtlich unendlich fern liegen. Auf diesen Gegenstand kommen wir später zurück.

Um die Tragweite des Theorems VIII zu illustrieren, werden wir zunächst eine von dem talentvollen russischen Mathematiker Imschenetsky gestreifte Frage eingehend diskutieren und *vollständig erledigen*.

Imschenetsky zeigt, daß eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0 \tag{14}$$

auf die lineare Form

$$H_1 r_1 + 2K_1 s_1 + L_1 t_1 + M_1 = 0 \tag{15}$$

gebracht werden kann, wenn ∞^3 Integralflächen

$$\Omega(x, y, z, a, b, c) = 0 \tag{16}$$

der Gleichung (14) schon bekannt sind. Dabei entgeht es allerdings seiner Aufmerksamkeit, daß dieser Satz nur dann richtig ist, wenn die ∞^3 Flächen $\Omega = 0$ keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen. Imschenetsky stellt ferner die unrichtige Behauptung auf, daß es unter Umständen zur Reduktion einer Monge-Ampèreschen Gleichung (14) auf die lineare Form (15) nur erforderlich ist, zweifach unendlich viele Integralflächen von (14) zu kennen.

Diese Arbeiten Imschenetskys, deren Beziehungen zu Ampères älteren Untersuchungen später erörtert werden, erschienen im Jahre 1868 in russischer Sprache; eine von Houël ausgeführte Übersetzung von Imschenetskys Werke erschien sodann im Jahre 1872 in Grunerts Archiv, B. 54. Unabhängig von Imschenetsky veröffentlichten wir im April 1872 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania einige kurze aber inhaltreiche Bemerkungen über die allgemeine Transformationstheorie der Monge-Ampèreschen Gleichungen und gaben insbesondere eine *Bestimmung aller Berührungstransformationen, die eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung* (14) *auf die lineare Form* (15) *bringen*.

Wir werden annehmen, daß eine gewisse Berührungstransformation:

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

die vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung (14) in die lineare Gleichung

$$H_1 r_1 + 2K_1 s_1 + L_1 t_1 + M_1 = 0 \tag{15}$$

umwandelt. In den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$, die mit x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 durch die Legendresche Transformation

$$z_1 = \mathfrak{z} - \mathfrak{p}\mathfrak{x} - \mathfrak{q}\mathfrak{y}, \quad x_1 = \mathfrak{p}, \quad y_1 = \mathfrak{q}, \quad p_1 = -\mathfrak{x}, \quad q_1 = -\mathfrak{y}$$

verbunden sind, erhält unsre partielle Differentialgleichung die Form

$$-\mathfrak{H}t + 2\mathfrak{R}s - \mathfrak{L}r + \mathfrak{M}(rt - s^2) = 0$$

und diese Gleichung wird von allen Ebenen des Raumes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ befriedigt. Also sind alle Punkte des Raumes x_1, y_1, z_1 Integralpunkte der *linearen* Gleichung (15). Hiermit ist nun zunächst der Satz erhalten:

Satz 23. *Eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung ist dann und nur dann linear, wenn alle Punkte des Raumes Integralpunkte der Gleichung sind.*

Da jede Berührungstransformation alle Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen in ebensolche Gleichungen überführt, so sehen wir, daß die Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, z, p, q), \cdots, q_1 = Q(x, y, z, p, q)$$

eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung (14) dann und nur dann auf die lineare Form bringt, wenn sie ∞^3 Integralgebilde der Gleichung (14) in die Punkte des Raumes überführt, anders ausgesprochen, wenn die drei Gleichungen $X = a$, $Y = b$, $Z = c$ mit den Parametern a, b, c dreifach unendlich viele Integralgebilde der vorgelegten partiellen Differentialgleichung darstellen.

Will man die allgemeinste Berührungstransformation B finden, die *alle* linearen Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen in lineare Gleichungen transformiert, anders ausgesprochen, will man die allgemeinste Berührungstransformation B finden, bei der die Schar aller linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$Rr + Ss + Tt + U = 0 \tag{17}$$

invariant bleibt, so muß man beachten, daß die inverse Transformation B^{-1} die ∞^3 Punkte des Raumes in ∞^3 Elementvereine überführen muß, die gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen (17) darstellen. Um unsere Frage beantworten zu können, müssen wir daher zunächst *alle* Elementvereine bestimmen, die gemeinsame Integralgebilde *aller* linearen Gleichungen (17) darstellen. Wir wissen schon, daß die ∞^3 Punkte des Raumes solche gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen (17) darstellen; daraus folgt grade, daß jede Punkttransformation die Schar aller linearen Gleichungen (17) invariant läßt. Besäßen nun alle linearen Gleichungen gemeinsame Integralflächen (bez. Integralkurven), so müßte jede Punkttransformation alle solchen gemeinsamen Integralflächen (bez. Integralkurven) in ebensolche gemeinsame Integralflächen (bez. Kurven) überführen. Da nun andererseits eine beliebige vorgelegte Fläche (bez. Kurve) durch eine passend gewählte Punkttransformation in jede andere Fläche (bez. Kurve) des Raumes übergeführt werden kann, so schließen wir, daß, sobald *eine* gemeinsame Integralfläche (bez. Integralkurve) aller

linearen Gleichungen (17) vorhanden wäre, *jede* Fläche (bez. Kurve) des Raumes eine solche gemeinsame Integralfläche sein müßte. Daß aber nicht alle Flächen des Raumes gemeinsame Integralflächen aller linearen Gleichungen sein können, liegt auf der Hand; es gibt ja überhaupt keine partielle Differentialgleichung in den Veränderlichen x, y, z, die von allen Flächen des Raumes x, y, z befriedigt wird. Wären auf der anderen Seite alle Kurven des Raumes gemeinsame Integralgebilde aller linearen Gleichungen, so müßten alle developpablen Flächen gemeinsame Integralflächen aller Monge-Ampèreschen Gleichungen von der Form

$$A(rt-s^2)+Br+Cs+Dt=0$$

sein und insbesondere die drei Gleichungen $r=0$, $s=0$, $t=0$ erfüllen. Die Gleichungen $r=0$, $s=0$, $t=0$ haben aber keine anderen Integralflächen als die Ebenen des Raumes.

In dieser Weise erkennen wir, daß *die* ∞^3 *Punkte des Raumes die einzigen gemeinsamen Integralgebilde aller linearen Gleichungen von der allgemeinen Form*

$$Rr+Ss+Tt+U=0 \tag{17}$$

darstellen, und da jede Berührungstransformation, die *alle* linearen Gleichungen (17) in ebensolche überführt, gleichzeitig die gemeinsamen Integralgebilde aller linearen Gleichungen in ebensolche umwandeln muß, so erhalten wir den Satz:

Satz 24. *Die Punkttransformationen sind die einzigen Berührungstransformationen, die jede lineare Monge-Ampèresche Gleichung in eine ebensolche Gleichung überführen.*

Aus den vorhergehenden Entwicklungen fließt fast unmittelbar ein Satz, der nicht unwichtig ist. Nimmt man als Ausgangspunkt die auf Seite 245 aufgestellten Formeln (6)

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{A_1r+B_1s+C_1t+D_1(rt-s^2)+E_1}{Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E}, \\ s_1=\dfrac{A_2r+B_2s+C_2t+D_2(rt-s^2)+E_2}{Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E}, \\ t_1=\dfrac{A_3r+B_3s+C_3t+D_3(rt-s^2)+E_3}{Ar+Bs+Ct+D(rt-s^2)+E}, \end{cases} \tag{6}$$

die für jede Berührungstransformation gelten, so sieht man fast unmittelbar, daß diejenigen Berührungstransformationen, die alle linearen Gleichungen

$$Hr+2Ks+Lt+M=0$$

in ebensolche überführen, sich dadurch charakterisieren lassen, daß die vier Koeffizienten D_1, D_2, D_3 nnd D sämtlich identisch gleich Null sind. Das heißt, es müssen die fünf Funktionaldeterminanten

$$P_pY_q-P_qY_p,\quad P_pX_q-P_qX_p,\quad Q_pY_q-Q_qY_p,\quad Q_pX_q-Q_qX_p,\quad X_pY_q-X_qY_p$$

sämtlich verschwinden. Unsere obenstehende Diskussion zeigt, daß dies nur dann

eintritt, wenn die vorgelegte Berührungstransformation eine Punkttransformation ist, und infolgedessen die Größen A, B, C gleich Null sind. Es gilt daher der Satz:

Satz 25. *In den Formeln*

$$\frac{r_1}{R} = \frac{s_1}{S} = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{N} \tag{6'}$$

die für jede Berührungstransformation gelten, sind R, S, T und N immer linear in r, s, t und $rt - s^2$. Sind sie sogar linear in r, s, t allein, so ist die Transformation eine Punkttransformation, und die Größe N infolgedessen frei von r, s, t.

Die wichtigsten unter unseren Ergebnissen lassen sich zum folgenden Satze zusammenfassen:

Theorem IX. *Unter den Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung lassen sich diejenigen, die in r, s, t linear sind, dadurch charakterisieren, daß alle ∞^3 Punkte des Raumes ihre gemeinsamen Integralgebilde sind. Es sind daher die Punkttransformationen die einzigen Berührungstransformationen, bei denen die Schar aller Gleichungen von der Form*

$$R(x, y, z, p, q) \cdot r + S(x, y, z, p, q) \cdot s + T(x, y, z, p, q) \cdot t + U(x, y, z, p, q) = 0$$

invariant bleibt.

Man findet alle Berührungstransformationen, die eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung auf die lineare Form bringen, indem man unter ihren Integralgebilden nach willkürlichem Gesetze dreifach unendlich viele herausgreift, die keine partielle Differentialgleichung erster Ordnung erfüllen und sodann diese ∞^3 Elementvereine durch Berührungstransformation in die Punkte des Raumes überführt.

Um einige unter den entwickelten Theorien zu illustrieren, wählen wir die lineare Monge-Ampèresche Gleichung

$$zs + \frac{z}{q^2} t + pq = 0 \tag{18}$$

und bemerken, daß die partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$zq - x = \beta$$

mit der willkürlichen Konstanten β eine intermediäre Integralgleichung darstellt; die beiden durch Differentiation nach x beziehungsweise y hervorgehenden Gleichungen

$$zs + pq - 1 = 0, \quad zt + q^2 = 0$$

reproduzieren ja durch Multiplikation mit passenden Faktoren und Addition die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung, die sich ja folgendermaßen

$$zs + pq - 1 + \frac{1}{q^2}(zt + q^2) = 0$$

schreiben läßt. In ganz analoger Weise verifiziert man, daß die Gleichung

$$z^2 - 2zyq = \gamma$$

mit der willkürlichen Konstanten γ eine zweite intermediäre Integralgleichung darstellt*). Da nun überdies die beiden Funktionen $zq - x$ und $z^2 - 2zyq$ in Involution liegen

$$[zq - x,\ z^2 - 2zyq] = 0,$$

so haben die beiden Gleichungen erster Ordnung

$$zq - x = \beta, \quad z^2 - 2zyq = \gamma$$

für beliebig gewählte Werte der Konstanten β und γ jedesmal ∞^1 gemeinsame Integralgebilde, die nach der Natur der Sache gleichzeitig Integralgebilde der vorgelegten linearen Monge-Ampèreschen Gleichung (18) darstellen. Um diese ∞^3 Elementvereine zu finden, suchen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln eine Funktion $w(x, y, z, p, q)$, die mit $zq - x$ und $z^2 - 2zyq$ in Involution liegt und somit die beiden Relationen

$$[zq - x,\ w] = 0, \quad [z^2 - 2zyq,\ w] = 0$$

erfüllt. Eine solche Größe ist x und daher stellen die Gleichungen

$$x = \alpha, \quad zq - x = \beta, \quad z^2 - 2zyq = \gamma$$

mit den Parametern α, β, γ dreifach unendlich viele Integralgebilde und zwar ∞^3 ebene Integralkurven der vorgelegten linearen Monge-Ampèreschen Gleichung (18) dar.

Um nun eine Berührungstransformation zu finden, die diese ∞^3 Integralgebilde in die Punkte des Raumes überführt, bilden wir die Gleichung:

$$d(z^2 - 2zyq) - P \cdot dx - Q \cdot d(zq - x) = \varrho(dz - p\,dx - q\,dy),$$

die uns zeigt, daß P und Q die Werte

$$P = 2(pz - y), \quad Q = -2y$$

*) Hier liegt ein Versehen vor, denn die Gleichung $z^2 - 2zyq = \gamma$ ergibt durch Differentiation die beiden Gleichungen:

$$y(zs + pq) - zp = 0, \quad y(zt + q^2) = 0,$$

aus denen (18) nicht folgt, sie ist also kein intermediäres Integral von (18). Dagegen sind, wie man sofort sieht, $zq - x = \beta$ und $z^2 - 2zyq = \gamma$ intermediäre Integrale von: $zt + q^2 = 0$. Integriert man die Gleichung: $zq - x = \beta$, so kommt:

$$z^2 - 2xy = 2\beta y + \omega(x);$$

setzt man hierin die willkürliche Funktion $\omega(x)$ gleich der Konstanten γ und eliminiert man β, so erhält man die Gleichung: $z^2 - 2zyq = \gamma$. Da nun die Funktionen: $zq - x$ und $z^2 - 2zyq$ miteinander und mit x in Involution liegen, so stellen die Gleichungen:

$$x = \alpha, \quad zq - x = \beta, \quad z^2 - 2zyq = \gamma$$

mit den Parametern α und γ eine vollständige Lösung der Gleichung: $zq - x = \beta$ dar und infolgedessen zugleich eine Schar von ∞^3 Integralgebilden der Gleichung (18). Deshalb hat die Berührungstransformation (19) trotz jenes Versehens die Eigenschaft (18) wieder in eine lineare Gleichung zu verwandeln. Engel.

haben. Hieraus schließen wir, daß die Gleichungen

$$(19) \qquad \begin{cases} x_1 = x, \quad y_1 = zq - x, \quad z_1 = z^2 - 2zyq, \\ p_1 = 2(pz - y), \quad q_1 = -2y \end{cases}$$

eine Berührungstransformation bestimmen, sowie daß diese Transformation die vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung (18) in eine lineare Gleichung umwandelt; dies letztere folgt daraus, daß ∞^3 *Integralkurven* der Gleichung (18) in die *Punkte* des Raumes übergeführt werden.

Zur Durchführung dieser Transformation bilden wir die Gleichung

$$0 = dq_1 - s_1\,dx_1 - t_1\,dy_1 \equiv -2dy - s_1\,dx - t_1\,d(zq - x),$$

die sich in die beiden

$$0 = -s_1 - t_1(pq - 1 + zs),$$
$$0 = -2 - t_1(q^2 + zt)$$

zerlegt, aus denen für t und s die Werte

$$t = -\frac{2 + q^2 t_1}{z t_1}, \qquad s = \frac{(1 - pq)t_1 - s_1}{z t_1}$$

hervorgehen. Die vorgelegte Gleichung (18) erhält also die Form

$$\frac{(1 - pq)t_1 - s_1}{t_1} - \frac{2 + q^2 t_1}{q^2 t_1} + pq = 0$$

oder durch Ausführung

$$q^2 s_1 + 2 = 0;$$

setzen wir hier für q^2 den Wert

$$q^2 = \frac{(y_1 + x_1)^2}{z_1 - (x_1 + y_1)q_1}$$

ein, der sich durch Auflösung der Gleichungen (19) ergibt, so erhalten wir als transformierte Gleichung die einfache Gleichung

$$(x_1 + y_1)^2 s_1 - 2(x_1 + y_1)q_1 + 2z_1 = 0.$$

Daß diese Gleichung linear ist, stimmt mit unserer allgemeinen Theorie; daß sie überdies von r_1 und t_1 frei ist, beruht auf allgemeinen Prinzipien, die uns im nächsten Paragraphen dieses Kapitels beschäftigen werden.

Unter den Monge-Ampèreschen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in r, s, t linear sind, nehmen diejenigen eine ausgezeichnete Stellung ein, die in r, s, t *linear* und *homogen* sind. Diese Gleichungen

$$(20) \qquad R(x, y, z, p, q) \cdot r + S(x, y, z, p, q) \cdot s + T(x, y, z, p, q) \cdot t = 0$$

besitzen *zwei* Scharen gemeinsamer Integralgebilde; man übersieht ja unmittelbar, daß die Punkte des Raumes Integralpunkte, die Ebenen des Raumes Integralflächen jeder derartigen Gleichung sind. Wünscht man nun alle Berührungstransformationen zu finden, die jede derartige partielle

Differentialgleichung in eine ebensolche überführen, so untersucht man am besten zuerst, ob alle diese Differentialgleichungen weitere gemeinsame Integralgebilde haben. Es ist leicht zu sehen, daß jede *projektive* Transformation des Raumes x, y, z jede homogene lineare Gleichung (20) in eine ebensolche umwandelt. Eine *projektive* Transformation führt ja Punkt in Punkt, Ebene in Ebene und Monge-Ampèresche Gleichung in ebensolche über. Eine solche Transformation verwandelt daher jede lineare homogene Gleichung (20) in eine Monge-Ampèresche Gleichung, für welche alle Punkte des Raumes Integralpunkte, alle Ebenen des Raumes Integralflächen darstellen, das heißt in eine lineare homogene Gleichung (20). Eine ganz analoge Überlegung zeigt, daß jede *dualistische* Transformation, die sich bekanntlich als eine Berührungstransformation charakterisieren läßt, die alle Punkte in Ebenen, und alle Ebenen in Punkte überführt, jede lineare homogene Gleichung (20) in eine ebensolche umwandelt.

Hieraus ziehen wir nun zunächst den Schluß, daß jedes gemeinsame Integralgebilde *aller* linearen homogenen Gleichungen von jeder projektiven bez. dualistischen Transformation in ein gemeinsames Integralgebilde aller linearen homogenen Gleichungen (20) übergeführt wird. Diese Bemerkung wird uns nun ohne Schwierigkeit zur Bestimmung *aller* Elementvereine führen, die gemeinsame Integralgebilde aller linearen partiellen Differentialgleichungen (20) sind.

Ist nämlich eine Fläche $z = f(x, y)$ gemeinsame Integralfläche aller linearen Gleichungen (20) insbesondere also der Gleichungen $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$, so ist sie offenbar eine Ebene. Eine nicht ebene Zylinderfläche, deren Gleichung die Form $\omega(x, y) = 0$ besitzt, kann nicht eine gemeinsame Integralfläche der Gleichungen (20) sein, weil die Gleichung $\omega(x, y) = 0$ durch eine projektive ja lineare Transformation die Form $\omega(z, y) = 0$ erhalten kann. Eine krumme Kurve kann auch kein gemeinsames Integralgebilde darstellen, weil sie von jeder dualistischen Transformation in eine krumme abwickelbare Fläche übergeführt wird. *Hiermit ist bewiesen, daß alle linearen homogenen Monge-Ampèreschen Gleichungen keine anderen gemeinsamen Integralgebilde besitzen als die ∞^3 Punkte und die ∞^3 Ebenen des Raumes.*

Hieraus ergibt sich nun unmittelbar, daß eine Berührungstransformation, die jede lineare homogene Gleichung (20) in eine ebensolche überführt, entweder Punkte in Punkte und Ebenen in Ebenen oder aber Punkte in Ebenen und Ebenen in Punkte umwandeln muß. Es gilt daher der Satz

Satz 26. *Die projektiven und die dualistischen Transformationen sind die einzigen Berührungstransformationen des Raumes, die jede lineare homogene Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$R(x, y, z, p, q)\, r + S(x, y, z, p, q)\, s + T(x, y, z, p, q)\, t = 0$$

in eine ebensolche Gleichung überführen.

An dieser Stelle beschäftigen wir uns nicht mit der ungleich schwierigeren Frage nach allen Berührungstransformationen, die *eine vorgelegte* lineare homogene Gleichung:

$$Rr + Ss + Tt = 0$$

oder aber eine vorgelegte Monge-Ampèresche Gleichung in eine lineare homogene Gleichung umwandeln.

§ 3.

Über Monge-Ampèresche Gleichungen mit intermediären Integralgleichungen.

Sind u, v, w drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die paarweise in Involution liegen, so bestimmen die Gleichungen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c$$

mit den willkürlichen Parametern a, b, c, wie wir wiederholt hervorgehoben haben, ∞^3 Elementvereine, entweder Flächen, Kurven oder Punkte, und zwar erhielten wir in dieser Weise jede Schar von ∞^3 Elementvereinen mit je ∞^2 Elementen.

Eine Gleichung:

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

zwischen u, v, w bestimmte, wenn wir u, v, w als Bestimmungsstücke des Elementvereins auffaßten, ∞^2 Elementvereine der Schar. Dachten wir uns aber die Werte von u, v, w als Funktionen von x, y, z, p, q eingesetzt, so war die hervorgehende Gleichung:

$$\Omega(u(x, y, z, p, q),\ v(x, y, z, p, q),\ w(x, y, z, p, q)) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer bekannten vollständigen Lösung, bestehend aus ∞^2 Elementvereinen der gegebenen Schar. Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung bestand daher aus den Umhüllungsflächen von je ∞^1 Flächen der vollständigen Lösung und gleichzeitig aus Umhüllungsflächen von je ∞^1 Elementvereinen des gegebenen *Komplexes* {von ∞^3 Elementvereinen}.

Wir kennen hiermit eine große Kategorie von partiellen Differentialgleichungen, deren nichtsinguläre Integralgebilde eine gemeinsame Erzeugung haben.

Sind u, v, w drei unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die paarweise in Involution liegen, und *bestimmen dementsprechend die Gleichungen:* $u = a$, $v = b$, $w = c$ ∞^3 *Elementvereine, deren Inbegriff wir als einen Komplex von Elementvereinen bezeichnen, so können alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, die die gemeinsame Form:* $\Omega(u, v, w) = 0$

besitzen, integriert werden. Sie besitzen sämtlich eine vollständige Lösung bestehend aus ∞^2 Vereinen jenes Komplexes und ihre nicht singulären Integrale sind Umhüllungsflächen von je ∞^1 Gebilden des Komplexes.

Es hat nun sein Interesse zu bemerken, daß ein bestimmtes Umhüllungsgebilde von ∞^1 Gebilden des gegebenen Komplexes durch *zwei* Gleichungen zwischen u, v, w bestimmt wird.

Setzen wir in der Tat:

$$\Omega(u, v, w) = 0, \quad W(u, v, w) = 0,$$

so sind hiermit ∞^1 Gebilde des ursprünglichen Komplexes und gleichzeitig ihre Umhüllungsflächen bestimmt. Sind: $u \equiv x$, $v \equiv y$, $w \equiv y$, so bestimmen die Gleichungen: $\Omega(x, y, z) = 0$, $W(x, y, z) = 0$ in Cartesischen Koordinaten eine Kurve. Sind u, v, w Centrakoordinaten einer Kugel mit gegebenem Radius K, so bestimmen die Gleichungen $\Omega(u, v, w) = 0$, $W(u, v, w) = 0$ ∞^1 Kugeln mit dem Radius K und zugleich ihre Umhüllungsfigur.

Insbesondere kann man offenbar {im allgemeinen} alle solchen Scharen von ∞^1 Gebilden des Komplexes durch zwei Gleichungen von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0, \quad w - \psi(u) = 0$$

definieren.

Betrachtet man nur eine Gleichung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0$$

und erteilt der Funktion φ nach und nach alle möglichen Formen, so sind die nicht singulären Integralgebilde immer Umhüllungsgebilde von ∞^1 Gebilden des Komplexes, und umgekehrt, wenn irgend ein Umhüllungsgebilde von ∞^1 Gebilden des Komplexes vorliegt, so befriedigt es {im allgemeinen} immer eine ganz bestimmte Gleichung von dieser Form.

Hieraus folgt nun der Satz:

Sind u und v beliebige unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, *die in Involution liegen*, so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen: $u = a$, $v = b$ mit den Konstanten a, b bekanntlich für jede a, b ∞^1 gemeinsame Integralgebilde; diese ∞^3 Integralgebilde lassen sich definieren durch die Gleichungen:

$$u = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

wo w dadurch bestimmt ist, daß es sowohl mit u wie mit v in Involution liegt. *Bildet man nun eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:*

$$v - \varphi(u) = 0,$$

so sind ihre nicht singulären Integralgebilde immer Umhüllungsgebilde von ∞^1 Gebilden des Komplexes: $u = a$, $v = b$, $w = c$, und umgekehrt erfüllt

jede Umhüllungsfigur von ∞^1 Gebilden dieses Komplexes eine ganz bestimmte partielle Differentialgleichung $v - \varphi(u) = 0$.

Genau in derselben Lage sind die partiellen Differentialgleichungen: $\Omega(u, v, w) = 0$. Daraus folgt also, daß der Inbegriff aller Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen von der Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ sich vollständig deckt mit dem Inbegriff aller Umhüllungsgebilde von je ∞^1 Gebilden des Komplexes $u = a$, $v = b$, $w = c$.

Nun aber erfüllen alle Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen von der Form: $v - \varphi(u) = 0$, gleichgültig ob u und v in Involution liegen, immer eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Diese Differentialgleichung bekommen wir, wenn wir für einen Augenblick die abgekürzte Bezeichnung:

$$\frac{dw(x, y, z, p, q)}{dx} = w_x + w_z p + w_p r + w_q s,$$

$$\frac{dw(x, y, z, p, q)}{dy} = w_y + w_z q + w_p s + w_q t$$

benutzen und die beiden Gleichungen:

$$\frac{dv}{dx} - \varphi'(u)\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} - \varphi'(u)\frac{du}{dy} = 0$$

bilden, durch Elimination von $\varphi'(u)$ in der Gestalt:

$$\frac{dv}{dx}\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{du}{dx} = 0$$

oder ausgeführt:

$$(21)\quad \begin{cases} (u_p v_q - u_q v_p)(rt - s^2) + \{u_p(v_y + q v_z) - v_q(u_y + q v_z)\} r + \\ + \{u_q(v_y + q v_z) - u_p(v_x + p v_z) - v_q(u_y + q u_z) + v_p(u_x + p u_z)\} s + \\ + \{v_q(u_x + p v_z) - u_q(v_x + p v_z)\} t + \\ + \{(u_x + p u_z)(v_y + q v_z) - (u_y + q u_z)(v_x + p v_z)\} = 0. \end{cases}$$

Partielle Differentialgleichungen von dieser Form sind zuerst von Monge und später noch eingehender von Ampère betrachtet worden; wir bezeichnen daher alle partiellen Differentialgleichungen von der Form

$$(22)\qquad H(x, y, z, p, q) r + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

als Monge-Ampèresche (partielle) *Differentialgleichungen* (zweiter Ordnung).

Wir haben hier die beiden folgenden Resultate erhalten:

Liegt irgend eine Schar von ∞^3 Elementvereinen vor (Flächen oder Kurven), die nicht nur aus Punkten besteht, so gibt es immer eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung (22), *deren allgemeines Integral aus lauter Umhüllungsflächen von ∞^1 Gebilden jenes Komplexes besteht.*

Sind u und v unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, so lassen sich die Integralflächen aller partiellen Differentialgleichungen $v - \varphi(u) = 0$

definieren als Integralflächen einer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung zweiter Ordnung (21), *die somit unendlich viele intermediäre Integrale von der Form* $v - \varphi(u) = 0$ *besitzt.*

Da sich die Gleichung (21) so schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0,$$

so sagt sie aus, daß für jede ihrer Integralflächen $z = f(x, y)$ die beiden Größen u und v durch eine Relation gebunden sind; die Gleichung besitzt also keine andern Integralflächen, als die der Gleichungen: $v - \varphi(u) = 0$. Ferner sagt der Koeffizient $u_p v_q - u_q v_p$ von $rt - s^2$ aus, daß die Gleichung (21) dann und nur dann linear ist, wenn die beiden Funktionen u und v in Bezug auf p und q nicht voneinander unabhängig sind.

Liegen u und v insbesondere in Involution, so sind alle Integrale der Monge-Ampèreschen Gleichung Umhüllungsgebilde von ∞^1 unter den Elementvereinen, die durch die beiden Gleichungen: $u = a$, $v = b$ definiert sind. Ist w eine von u und v unabhängige Funktion, die mit u und v in Involution liegt, so ist jede partielle Differentialgleichung von der Form $\Omega(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung.

Sind insbesondere ∞^3 *Kurven vorgelegt, die den Raum ausfüllen, so lassen sie sich definieren durch zwei in Involution liegende Gleichungen:*

$$u(x, y, z, p, q) = a, \qquad v(x, y, z, p, q) = b,$$

zwischen denen sich p *und* q *eliminieren lassen, so daß:*

$$\begin{vmatrix} u & v \\ p & q \end{vmatrix} \equiv 0 = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Bildet man daher die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: $v = \varphi(u)$ *mit der arbiträren Funktion* φ, *sowie die entsprechende Monge-Ampèresche Differentialgleichung, so verschwindet der Koeffizient von* $rt - s^2$ *identisch und sie ist demnach linear in* r, s, t*:*

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0.$$

Ihre Integralflächen sind dadurch charakterisiert: sie sind sämtlich erzeugt von ∞^1 *Kurven des besprochenen Kurvenkomplexes.*

Ist nun w eine von u und v unabhängige Lösung der beiden Gleichungen $[uf] = 0$, $[vf] = 0$, so ist jede Gleichung: $\Omega(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung.

Beispiel. {Die Gleichung $r = 0$ besitzt die beiden intermediären Integralgleichungen: $p = a$, $z - xp = b$, aus denen sich p und q eliminieren lassen, außerdem ist $[p, z - xp] = 0$ und beide Funktionen liegen mit y in Involution, also gehört die Gleichung zu dem Komplexe der ∞^3 Geraden: $z - ax = b$, $y = c$ und

besitzt das intermediäre Integral $\Omega(p, z - xp, y) = 0$. Andererseits besitzt die Gleichung $s = 0$ die beiden intermediären Integrale $p = \varphi(x)$ und $q = \psi(y)$, deren jedes eine willkürliche Funktion enthält, aber hier liegt weder p mit x noch q mit y in Involution.}

Alle Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen, die ein intermediäres Integral von der Form: $v - \varphi(u) = 0$ besitzen, wobei $[uv] = 0$ ist, können durch Berührungstransformation auf eine gemeinsame Form gebracht werden. Zu diesem Zwecke setzen wir, indem wir unter w eine von u und v unabhängige Funktion verstehen, die mit u und v in Involution liegt:

$$\begin{aligned} w(x, y, z, p, q) &= z_1 - p_1 x_1, \\ u(x, y, z, p, q) &= p_1, \\ v(x, y, z, p, q) &= y_1. \end{aligned}$$

Hierdurch ist nun eine Berührungstransformation bestimmt. Um sie vollständig zu bestimmen, setzen wir:

$$dw - \alpha\, du - \beta\, dv = \varrho(dz - p\, dx - q\, dy).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} w_z - \alpha u_z - \beta v_z &= \varrho, \\ w_x - \alpha u_x - \beta v_x &= -\varrho p, \\ w_y - \alpha u_y - \beta v_y &= -\varrho q \end{aligned} \qquad \left\{\begin{aligned} w_p - \alpha u_p - \beta v_p &= 0 \\ w_q - \alpha u_q - \beta v_q &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und hieraus bestimmen wir α, β und ϱ (vgl. S. 222). Dann ist:

$$z'' = w(x, y, z, p, q), \quad x'' = u, \quad y'' = v, \quad p'' = \alpha, \; q'' = \beta$$

eine Berührungstransformation. Es ist aber auch:

$$z_1 - p_1 x_1 = w(x, y, z, p, q), \quad p_1 = u, \quad x_1 = -\alpha, \quad y_1 = v, \quad q_1 = \beta$$

eine Berührungstransformation. Diese führt die Flächen oder Kurven $u = a$, $v = b$, $w = c$ in Gerade über, die mit der zx-Ebene parallel sind. Es gehen daher alle Integralflächen der vorgelegten Monge-Ampèreschen Differentialgleichung in Regelflächen über, deren Gerade mit der zx-Ebene parallel sind, also in Integralflächen: $z = Yx + Y_1$ der partiellen Differentialgleichung: $r = 0$.

Besitzt eine vorgelegte Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung von der Form: $v - \varphi(u) = 0$, wo φ eine willkürliche Funktion ist, und sind dabei u und v unabhängige Funktionen von x, y, z, p, q, die miteinander in Involution liegen, so ist es immer möglich, diese Monge-Ampèresche Gleichung durch Berührungstransformation auf die Form $r = 0$ zu bringen.

Aber noch mehr. Es liegt in der Natur der Sache, wie näher ausgeführt wird, daß die betreffende Kategorie von Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen bei Berührungstransformationen invariant bleibt.

Wenn in der Tat die Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ vorliegt und dabei $[uv] = 0$ ist, so gehen u und v bei irgend einer Berührungstransformation: $x_1 = X$, $y_1 = Y$, ..., $q_1 = Q$ in Funktionen u_1, v_1 über, die fortwährend in der Beziehung: $[u_1 v_1] = 0$ stehen. Die Gleichung: $v - \varphi(u) = 0$ nimmt dabei die Form: $v_1 - \varphi(u_1) = 0$ an; dementsprechend bekommt die Monge-Ampèresche Gleichung

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

die Form:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist sogar zu bemerken, daß dieses Resultat davon unabhängig ist, daß u und v in Involution liegen:

Wenn eine Monge-Ampèresche partielle Differentialgleichung ein allgemeines intermediäres Integral $v - \varphi(u) = 0$ mit der willkürlichen Funktion φ besitzt, so geht sie bei jeder Berührungsformation: $x_1 = X$, ... in eine Monge-Ampèresche Gleichung über, die dann selbst eine allgemeine intermediäre Integralgleichung $v_1 - \varphi(u_1) = 0$ mit einer willkürlichen Funktion besitzt.

Es liegt nun außerordentlich nahe zu vermuten, daß jede Monge-Ampèresche Differentialgleichung bei Berührungstransformation in eine ebensolche Gleichung übergeht. Ja man kann dies sogar direkt beweisen.

{Hier folgt im Manuskripte eine Ableitung der Formeln, durch die r, s, t bei einer beliebigen Berührungstransformation transformiert werden, und es wird ähnlich wie in § 1 auf S. 243 ff. bewiesen, daß $r_1, s_1, t_1, r_1 t_1 - s_1^2$ linear gebrochene Funktionen von $r, s, t, rt - s^2$ werden und zwar Funktionen mit gemeinsamem Nenner, wodurch die eben ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. Ferner folgen Betrachtungen, die in § 2 ausführlicher und vollständiger dargestellt sind.}

Bei unseren Untersuchungen über Berührungstransformationen trafen wir wiederholt partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit intermediären Integralgleichungen; diese Gleichungen zweiter Ordnung besaßen die Form:

$$(22) \qquad H(x, y, z, p, q)r + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$$

und gehörten somit sämtlich zu der von Monge und Ampère untersuchten Kategorie. Nun gibt es allerdings noch weitere partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die intermediäre Integralgleichungen haben. Nichtsdestoweniger werden wir uns in Übereinstimmung mit der geschichtlichen Entwicklung zunächst mit den intermediären Integralgleichungen der Monge-Ampèreschen Gleichungen zweiter Ordnung beschäftigen.

Wir denken uns, daß eine bestimmte Monge-Ampèresche Gleichung (22) vorliegt, und stellen uns die Aufgabe, zu untersuchen, ob sie intermediäre Integralgleichungen besitzt, sowie die vorhandenen intermediären Integralgleichungen zu bestimmen. Indem wir dieses Problem in Angriff nehmen, wollen wir ausdrücklich hervorheben, daß wir zunächst nur intermediäre Integralgleichungen von der Form:

$$f(x, y, z, p, q) = a \tag{23}$$

suchen, die nicht von p und q beiden frei sind und die eine willkürliche Konstante a enthalten. Später vervollständigen wir unsere Entwicklungen, indem wir insbesondere zeigen, wie man intermediäre Integralgleichungen von der speziellen Form: $f(x, y, z) = a$ finden kann.

Alle Integralflächen der Monge-Ampèreschen Gleichung (22), die gleichzeitig Integralflächen einer bestimmten intermediären Integralgleichung (23) sind, erfüllen zugleich die beiden durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen:

$$\begin{cases} f_p r + f_q s + f_x + p f_z = 0, \\ f_p s + f_q t + f_y + q f_z = 0, \end{cases} \tag{24}$$

sowie die aus ihnen abgeleitete Gleichung:

$$\begin{cases} f_p f_q (rt - s^2) - \{f_q(f_y + q f_z) + f_p(f_x + p f_z)\}\, s - \\ \qquad - (f_x + p f_z)(f_y + q f_z) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

sie erfüllen also auch die durch Elimination der Größen r, t, $rt - s^2$ zwischen den Gleichungen (22), (24), (25), hervorgehende Relation:

$$s\{N[f_q(f_y + q f_z) + f_p(f_x + p f_z)] - H f_q^2 + 2K f_p f_q - L f_p^2\} +$$
$$+ N(f_x + p f_z)(f_y + q f_z) - H f_q(f_x + p f_z) - L f_p(f_y + q f_z) + M f_p f_q = 0$$

oder:

$$s\Phi + \Psi = 0.$$

Hier müssen die beiden Koeffizienten Φ und Ψ für die betreffenden Integralflächen verschwinden, denn sonst könnte man s und mit Benutzung der Gleichungen (24) auch r und t als Funktionen von x, y, z, p, q ausdrücken und dann enthielte die Taylorsche Reihenentwicklung

$$z = z_0 + p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0) + \cdots,$$

die *alle* ∞^∞ Integralflächen der Gleichung (23) darstellt, außer a nur *drei* wesentliche Parameter, was offenbar widersinnig ist.

Es erfüllt also jedes $f(x, y, z, p, q)$, das gleich Konstans gesetzt eine intermediäre Differentialgleichung unsrer Monge-Ampèreschen Differentialgleichung darstellt, die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(25)\quad \begin{cases} N\{f_q(f_y+qf_z)+f_p(f_x+pf_z\}-Hf_q^2+2Kf_pf_q-Lf_p^2=0, \\ N(f_x+pf_z)(f_y+qf_z)-Hf_q(f_x+pf_z)-Lf_p(f_y+qf_z)+Mf_pf_q=0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen kann man so schreiben:

$$(N(f_y+qf_z)-Hf_q+Kf_p)f_q+(N(f_x+pf_z)-Lf_p+Kf_q)f_p=0$$

und die zweite nach Multiplikation mit N unter Benutzung der ersten so:

$$\{N(f_y+qf_z)-Hf_q+Kf_p\}\{N(f_x+pf_z)-Lf_p+Kf_q\}+$$
$$+(NM-LH+K^2)f_pf_q=0,$$

setzt man daher:

$$(26)\qquad -LH+NM+K^2=G,$$

so findet man, daß f im Falle $G\neq 0$ entweder die beiden Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} A_1f=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K+\sqrt{G}}{N}f_q=0, \\ B_1f=f_y+qf_z+\frac{K-\sqrt{G}}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0 \end{cases}$$

oder die beiden Gleichungen:

$$(28)\quad \begin{cases} A_2f=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K-\sqrt{G}}{N}f_q=0, \\ B_2f=f_y+qf_z+\frac{K+\sqrt{G}}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0 \end{cases}$$

befriedigen muß, während man im Falle $G=0$ für f ein System von Differentialgleichungen findet, nämlich:

$$(29)\quad \begin{cases} Af=f_x+pf_z-\frac{L}{N}f_p+\frac{K}{N}f_q=0, \\ Bf=f_y+qf_z+\frac{K}{N}f_p-\frac{H}{N}f_q=0. \end{cases}$$

Hierbei ist allerdings N von Null verschieden angenommen und in der Tat brauchen wir, da der Fall $N=0$ bei Berührungstransformation nicht invariant bleibt (vgl. S. 265), diesen Fall bei Ableitung solcher Eigenschaften, die bei Berührungstransformation invariant bleiben, nicht besonders zu berücksichtigen. Dasselbe gilt von den Möglichkeiten, daß f_p oder f_q oder beide verschwinden können. Da jedoch der Fall $N=0$ praktisch besonders wichtig ist, so sei wenigstens bemerkt, daß sich die Gleichungen (25) für ihn auf:

$$(25')\quad \begin{cases} Hf_q^2-2Kf_pf_q+Lf_p^2=0, \\ H(f_x+pf_z)f_q+L(f_y+qf_z)f_p-Mf_pf_q=0 \end{cases}$$

reduzieren, daß man zu setzen hat:

$$(26')\qquad -LH+K^2=G$$

und daß im Falle $G \neq 0$ an Stelle der Gleichungen (27) und (28) diese treten:

$$(30) \qquad \begin{cases} (K \pm \sqrt{G})\, f_p - H f_q = 0, \\ (K \pm \sqrt{G})\,(f_x + p f_z) + L(f_y + q f_z) - M f_q = 0. \end{cases}$$

Auf besondre Fälle, die hier noch eintreten können, wollen wir nicht eingehen.

Fassen wir bloß den Fall $N \neq 0$ ins Auge, so finden wir also für f stets zwei voneinander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen in den fünf Veränderlichen x, y, z, p, q. Diese Gleichungen besitzen höchstens drei unabhängige Lösungen oder sie besitzen zwei unabhängige Lösungen oder eine oder gar keine und die allgemeinste Lösung hat die Form einer willkürlichen Funktion der vorhandenen Lösungen. Zu beachten ist allerdings, daß die beiden Gleichungen unter Umständen auch singuläre Integralgleichungen haben können, {die durch Determinantenbildung gefunden werden und denen dann intermediäre Integralgleichungen entsprechen, die keine willkürliche Konstante enthalten}.

Sollen die beiden Gleichungen für f ein zweigliedriges vollständiges System bilden, soll also zum Beispiel

$$A_1 B_1 f - B_1 A_1 f = \varrho A_1 f + \mu B_1 f$$

sein, so muß $A_1 B_1 f - B_1 A_1 f$ identisch verschwinden, weil ja darin die Koeffizienten von f_x und f_y null sind. Da nun der Koeffizient von f_z den Wert:

$$\frac{K + \sqrt{G}}{N} - \frac{K - \sqrt{G}}{N} = \frac{2\sqrt{G}}{N}$$

bekommt, so treten drei unabhängige Lösungen jedenfalls nur dann auf, wenn $G = 0$. Diese notwendige Bedingung ist aber nicht hinreichend.

Nehmen wir an, daß $G \neq 0$ und daß u eine Lösung von $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ ist, also:

$$u_x + p u_z = \frac{L}{N} u_p - \frac{K + \sqrt{G}}{N} u_q,$$

$$u_y + q u_z = -\frac{K - \sqrt{G}}{N} u_p + \frac{H}{N} u_q$$

und v eine Lösung von $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$, also:

$$v_x + p v_z = \frac{L}{N} v_p - \frac{K - \sqrt{G}}{N} v_q,$$

$$v_y + q v_z = -\frac{K + \sqrt{G}}{N} v_p + \frac{H}{N} v_q.$$

Setzen wir diese Werte in:

$$[uv] = u_p(v_x + p v_z) + u_q(v_y + q v_z) - v_p(u_x + p u_z) - v_q(u_y + q u_z)$$

ein, so kommt:

$$[uv] = -\frac{K-\sqrt{G}}{N} u_p v_q - \frac{K+\sqrt{G}}{N} u_q v_p +$$
$$+\frac{K+\sqrt{G}}{N} v_p u_q + \frac{K-\sqrt{G}}{N} v_q u_p \equiv 0.$$

Demnach haben wir den

Satz 27. *Ist $G \neq 0$, so besitzt jedes der beiden Systeme* (27) *und* (28) *höchstens zwei unabhängige Lösungen und zwar liegt jede etwaige Lösung von* (27) *mit jeder Lösung von* (28) *in Involution.*

Die eben durchgeführte Rechnung ist aber auch auf den Fall $G = 0$ anwendbar, nur daß dann u und v beide Lösungen des Systems (29) sind. Folglich gilt der

Satz 28. *Ist $G = 0$ und besitzt das System* (29) *zwei oder gar drei unabhängige Lösungen, so liegen alle diese Lösungen paarweise in Involution.*

Umgekehrt wissen wir, daß, wenn eine Monge-Ampèresche Gleichung zwei intermediäre Integralgleichungen $u = a$, $v = b$ besitzt, die in Involution liegen, {und wenn überdies $v - \varphi(u) = 0$ für jede Funktion φ eine intermediäre Integralgleichung darstellt,} daß dann noch eine dritte intermediäre Integralgleichung $v = c$ existiert, die mit beiden in Involution liegt (vgl. S. 255).

Wenn daher für eine Monge-Ampèresche Gleichung die Größe $G \not\equiv 0$ ist, so gibt es nur noch folgende Möglichkeiten:

1) *Drei unabhängige intermediäre Integralgleichungen: $u = a$, $v = b$, $w = c$, die paarweise in Involution liegen. Dann stellt jede Relation $F(u, v, w) = 0$ eine intermediäre Integralgleichung dar und die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung kann durch Berührungstransformation die kanonische Form: $r = 0$ erhalten.*

2) *Nur eine intermediäre Integralgleichung: $u = a$.*

3) *Gar keine intermediäre Integralgleichung mit willkürlicher Konstante.*

Wenn $G \neq 0$ ist, so sind verschiedene Fälle möglich. Hier wollen wir nur noch einige Transformationsresultate angeben, die von Ampère herrühren, aber von ihm in sehr schwerfälliger und überdies in unvollkommener Weise abgeleitet worden sind.

Liegt eine Monge-Ampèresche Gleichung

$$rt - s^2 + Hr + 2Ks + Lt + M = 0 \tag{31}$$

vor, für die

$$G = -HL + M + K^2 \neq 0$$

ist, und hat das System $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ wenigstens eine Lösung u, andrerseits das System: $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$ wenigstens eine Lösung v, so

gibt es, weil $[uv] \equiv 0$ ist (nach S. 254), eine Berührungstransformation von der Gestalt:

$$p_1 = u(x, y, z, p, q),$$
$$q_1 = v(x, y, z, p, q),$$
$$z_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = w(x, y, z, p, q),$$

wo w durch die Gleichungen: $[uf] = 0$, $[vf] = 0$ bestimmt ist*).

Die transformierte Monge-Ampèresche Gleichung hat also zwei intermediäre Integralgleichungen: $p_1 = a$ und $q_1 = b$. Also sind alle Ebenen des Raumes (als gemeinsame Integralflächen dieser beiden intermediären Integralgleichungen) Integralgebilde der transformierten Gleichung, die somit die Form hat:

$$H_1 r_1 + 2K_1 s_1 + L_1 t_1 + N_1(r_1 t_1 - s_1^2) = 0.$$

Es frägt sich, ob es denkbar ist, daß G_1 verschwindet. Wir müssen beide Möglichkeiten prüfen.

Die intermediären Integrale sind bestimmt durch:

$$N_1(f_{x_1} + p_1 f_{z_1}) - L_1 f_{p_1} + (K_1 \pm \sqrt{G_1})\, f_{q_1} = 0,$$
$$N_1(f_{y_1} + q_1 f_{z_1}) + (K_1 \mp \sqrt{G_1})\, f_{p_1} - H_1 f_{q_1} = 0.$$

Ist p_1 eine Lösung des einen Systems, etwa des mit dem oberen Vorzeichen, so ist: $L_1 = 0$, $K_1 - \sqrt{G_1} = 0$. Dann muß q_1 eine Lösung des andern Systems, des mit dem unteren Vorzeichen sein, also $H_1 = 0$, $K_1 - \sqrt{G_1} = 0$. Wir finden mithin: $H_1 = L_1 = 0$, $G_1 = K_1^2$ und unsre transformierte Gleichung hat die Form:

$$2K_1 s_1 + N_1(r_1 t_1 - s_1^2) = 0.$$

Hier sind zwei Möglichkeiten zu berücksichtigen. Der Fall $K_1 = 0$ gäbe:

$$r_1 t_1 - s_1^2 = 0.$$

Dieser Fall ist aber ausgeschlossen, denn dann wäre {wie man sich sofort überzeugt, jede Gleichung von der Form:

$$F(p_1,\ q_1,\ z_1 - x_1 p_1 - y_1 q_1) = 0$$

eine intermediäre Integralgleichung der transformierten Monge-Ampèreschen Gleichung und es wäre also} auch in der ursprünglich vorgelegten Gleichung $G = 0$. Folglich können wir unsre transformierte Gleichung in der Form:

$$s_1 + \frac{N_1}{2K_1}(r_1 t_1 - s_1^2) = 0$$

*) Am Rande bemerkt Lie: Es wäre wünschenswert, daß die Invarianz der Bedingung $G \neq 0$ direkt nachgewiesen würde. Das läßt sich *vielleicht* auf diesem Standpunkte nicht leicht machen. *Gewiß aber indirekt.*

schreiben. Machen wir sodann eine dualistische Transformation, so kommt die Form:

$$s_2 + F(x_2, y_2, z_2, p_2, q_2) = 0.$$

Damit haben wir den Satz von Ampère:

Satz 29. *Liegt eine Monge-Ampèresche Differentialgleichung vor, für die $G \neq 0$ ist, und ist dabei $u(x, y, z, p, q)$ eine Lösung der Gleichungen: $A_1 f = 0$, $B_1 f = 0$ und $v(x, y, z, p, q)$ eine Lösung von $A_2 f = 0$, $B_2 f = 0$, so ist es immer möglich, die vorgelegte Gleichung durch eine passende Berührungstransformation auf die Form:*

$$s + F(x, y, z, p, q) = 0$$

zu bringen.

Die vorstehenden Betrachtungen sind einfacher und wohl auch allgemeingültiger als die von Ampère angestellten.

§ 4.

Geometrische Deutung der linearen Monge-Ampèreschen Gleichungen.

Betrachten wir zuerst den Fall $G = 0$, also eine Gleichung von der Form:

$$r + 2Ns + N^2 t + U(x, y, z, p, q) = 0.$$

Auf irgend einer Fläche betrachten wir eine Kurve, deren Tangente im Punkte x, y, z die Richtungskosinus α, β, γ habe. Dann ist:

$$p\alpha + q\beta - \gamma = 0,$$

woraus folgt:

$$p\,d\alpha + q\,d\beta - d\gamma + \alpha\,dp + \beta\,dq = 0$$

oder, wenn s die Bogenlänge der Kurve bezeichnet:

$$p\frac{d\alpha}{ds} + q\frac{d\beta}{ds} - \frac{d\gamma}{ds} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Nun aber sind $d\alpha : ds$, $d\beta : ds$, $d\gamma : ds$ Richtungskoeffizienten der Hauptnormalen unsrer Kurve. Sind λ, μ, ν die Richtungswinkel der Hauptnormalen, so ist:

$$\cos\lambda = \frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}}, \quad \cdots$$

und nach einer bekannten Formel für den Krümmungsradius R ist:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}},$$

also:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\lambda}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\cos\mu}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\cos\nu}{R},$$

und wenn λ_1, μ_1, ν_1 die Winkel der Flächennormale sind:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\{\cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1 + \cos\nu\cos\nu_1\} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Bezeichnen wir noch den Winkel der Hauptnormalen mit der Flächennormale mit Θ, so ist:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R}\cos\Theta + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\gamma^2 = 0,$$

und denken wir uns endlich $\Theta = 0$, also $\cos\Theta = 1$, so wird:

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 + \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_n} = 0,$$

wo R_n den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes bezeichnet, der durch die Tangente unsrer Kurve im Punkte x, y, z bestimmt ist.

Hiermit haben wir eine geometrische Deutung der allgemeinen Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$r + 2N(x,y,z,p,q)s + N^2t + U(x,y,z,p,q) = 0.$$

Sie sagt aus, daß jedem Flächenelemente eine Richtung, nämlich die Richtung:

$$\frac{dy}{dx} = N(x,y,z,p,q), \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

zugeordnet ist, und daß auf jeder Integralfläche, die das Flächenelement enthält, der Krümmungshalbmesser des zu dieser Richtung gehörigen Normalschnittes eine gegebene Funktion $F(x,y,z,p,q)$ ist:

$$R_n = \frac{(1+N^2+(p+qN)^2)\sqrt{1+p^2+q^2}}{U(x,y,z,p,q)}.$$

Da die Gleichung

$$r + 2Ns + N^2t + U = 0$$

linear ist und da G für sie verschwindet, so hat sie nach den früheren Ergebnissen (S. 280 und 274) dann und nur dann mehr als eine intermediäre Integralgleichung $u(x,y,z,p,q) = a$, wenn sie deren drei hat: $u = a$, $v = b$, $w = c$, wo u, v, w paarweise in Involution liegen und wo die ∞^3 Vereine: $u = a$, $v = b$, $w = c$ einen Komplex von ∞^3 Kurven bilden. Demnach sagt die betreffende partielle Differentialgleichung in diesem Falle aus:

Im Raume sind gegeben ∞^3 Kurven. Gesucht werden alle Flächen,

*die von den berührenden Kurven dieses Kurvenkomplexes zugleich oskuliert werden.**)

Jetzt sei vorgelegt die allgemeine lineare und homogene Gleichung:

$$A(x, y, z, p, q)r + Bs + Ct = 0.$$

Es ist: $r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$ die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven. Setzen wir daher:

$$r\,\xi_1\xi_2 + s(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + t\,\eta_1\eta_2 = 0,$$

so sind die Richtungen $\xi_1 : \eta_1$ und $\xi_2 : \eta_2$ zu den Haupttangenten konjugiert. Nun können $\xi_1 : \eta_1$ und $\xi_2 : \eta_2$ immer aus den Gleichungen:

$$\frac{\xi_1\xi_2}{A} = \frac{\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1}{B} = \frac{\eta_1\eta_2}{C}$$

bestimmt werden und zwar als Wurzeln der Gleichung:

$$Aw^2 - Bw + C = 0.$$

Jedem Flächenelement sind somit zwei Richtungen zugeordnet und demzufolge jeder Fläche zwei auf ihr liegende Scharen von je ∞^1 Kurven. Es handelt sich darum, alle Flächen zu finden, für welche diese Kurvenscharen konjugierte Kurvenscharen sind.

Soll nun eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

ein intermediäres Integral sein, so müssen die beiden Gleichungen:

$$F_p r + F_q s + F_x + pF_z = 0,$$
$$F_p s + F_q t + F_y + qF_z = 0$$

die Gleichung: $Ar + Bs + Ct = 0$ nach sich ziehen und es müssen auch auf den Integralflächen von $F = 0$ die beiden einem Elemente x, y, z, p, q zugeordneten Richtungen konjugiert sein. Aus den beiden angegebenen Gleichungen erhält man zur Bestimmung der Haupttangentenrichtungen:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

des Flächenelements x, y, z, p, q die Gleichung:

$$s(F_q^2 dx^2 - 2F_p F_q\,dx\,dy + F_p^2 dy^2) +$$
$$+ F_q(F_x + pF_z)dx^2 + F_p(F_y + qF_z)dy^2 = 0,$$

und da die beiden dem Elemente x, y, z, p, q zugeordneten Richtungen ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 zu den Haupttangentenrichtungen harmonisch liegen, so ist:

$$s(F_q\xi_1 - F_p\eta_1)(F_q\xi_2 - F_p\eta_2) +$$
$$+ F_q(F_x + pF_z)\xi_1\xi_2 + F_p(F_y + qF_z)\eta_1\eta_2 = 0.$$

*) Die Gleichungen: $u = a$, $v = b$, $w = c$ zeigen ja, daß durch jedes Flächenelement im allgemeinen nur eine der ∞^3 Kurven geht. Die Tangente dieser Kurve fällt mit der dem Flächenelemente zugeordneten Richtung zusammen. **Engel.**

Verschwände hier der Faktor von s nicht, so wären in jedem Elemente x, y, z, p, q die Haupttangentenrichtungen vollständig bestimmt. Sehen wir daher von dem trivialen Falle ab, daß die gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen $F=0$ und $Ar+Bs+Ct=0$ sämtlich abwickelbar wären, so müßten diese gemeinsamen Integralflächen zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$r+2\nu_1 s+\nu_1^2 t=0,$$
$$r+2\nu_2 s+\nu_2^2 t=0$$

befriedigen, wo ν_1 und ν_2 zwei bekannte, voneinander verschiedene Funktionen von x, y, z, p, q wären. Dann aber bekäme man für die vier dritten Ableitungen von z nach x und y vier Gleichungen, deren Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\nu_1 & \nu_1^2 & 0 \\ 1 & 2\nu_2 & \nu_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2\nu_1 & \nu_1^2 \\ 0 & 1 & 2\nu_2 & \nu_2^2 \end{vmatrix} = -(\nu_1-\nu_2)^4$$

nicht verschwände, die also nach den dritten Ableitungen von z auflösbar wären, es gäbe also höchstens ∞^3 Integralflächen von der verlangten Beschaffenheit und $F=0$ wäre gar kein intermediäres Integral.

Damit ist bewiesen, daß der Ausdruck:

$$(F_q\xi_1-F_p\eta_1)(F_q\xi_2-F_p\eta_2)$$

verschwinden muß, daß also die eine der beiden dem Elemente x, y, z, p, q zugeordneten Richtungen mit der charakteristischen Richtung zusammenfällt, die die Gleichung $F=0$ dem Elemente zuordnet. Man könnte sich leicht überzeugen, daß das auch noch in dem vorhin ausgeschlossenen Falle gilt, wo alle Integralflächen von $F=0$ abwickelbar sind, wo also $F=0$ die Form: $F(p, q)=0$ besitzt.

Da jetzt in jedem durch einen Punkt x, y, z gehenden Elemente x, y, z, p, q die charakteristische Richtung bekannt ist, die eine etwaige intermediäre Integralgleichung $F=0$ bestimmt, der das Element genügt, so werden die ∞^1 Elementarkegel, die ein etwaiges intermediäres Integral $F=$ const. dem Punkte x, y, z zuordnet, durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung in p, q gefunden. Das ist auch analytisch evident und gilt sogar, wie die Formeln (30) auf S. 279 zeigen, bei jeder Monge-Ampèreschen Gleichung (22), für die $N=0$ ist.

Dementsprechend findet man durch Integration einer andern gewöhnlichen Differentialgleichung die ∞^1 Scharen von Elementen, die ein intermediäres Integral $F=$ const. einer beliebigen Ebene zuordnet.

Wir nehmen ∞^2 Flächen:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0$$

und ordnen jeder eine andre Fläche:

$$\Psi(x, y, z, a, b) = 0$$

zu. Sodann konstruieren wir in jedem Punkt einer Fläche $\Phi(a, b) = 0$ den Elementarkegel, dessen Ebenen die entsprechende Fläche $\Psi(a, b) = 0$ berühren*). Auf diese Weise ordnen wir jeder Fläche $\Phi(a, b) = 0$ ∞^2 Elementarkegel zu, deren Scheitel auf dieser Fläche liegen. Diese ∞^2 Kegel haben zusammen ∞^3 Elemente, die durch zwei Gleichungen:

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0, \quad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

bestimmt sind. Lösen wir diese Gleichungen nach a und b auf**):

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b,$$

so besitzt die Monge-Ampèresche Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u & v \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

die Form:

$$R(x, y, z, p, q)r + Ss + Tt = 0$$

und zwar erhalten wir so alle Monge-Ampèreschen Gleichungen von dieser Form mit einer intermediären Integralgleichung von der Form:

$$v - \varphi(u) = 0,$$

die eine willkürliche Funktion enthält.

{ Soll die Monge-Ampèresche Gleichung mit dem intermediären Integrale

$$v - \varphi(u) = 0$$

in r, s, t linear und homogen sein, so müssen die beiden Gleichungen

$$u_p v_q - u_q v_p = 0, \quad (u_x + p u_z)(v_y + q v_z) - (u_y + q u_z)(v_x + p v_z) = 0$$

identisch erfüllt sein. Ist nun keine der Funktionen u, v von p und q beiden frei, so sagt die erste dieser Bedingungen aus, daß v die Form hat:

$$v \equiv \omega(u, x, y, z),$$

die zweite, daß v die Form hat:

$$v \equiv \Omega(u, xp + yq - z, p, q).$$

---

*) Sind die Flächen $\Psi = 0$ sämtlich abwickelbar, so muß man den Elementarkegel nehmen, dessen Ebenen die Rückkehrkante der Fläche $\Psi(a, b) = 0$ berühren; sind es insbesondre lauter Kegel, so artet der Elementarkegel in das Büschel von Flächenelementen aus, dessen Ebenen durch die Spitze des Kegels $\Psi(a, b) = 0$ gehen. Dagegen dürfen die Flächen $\Psi(a, b) = 0$ keine Ebenen sein. Engel.

**) Diese Auflösung wird immer möglich sein, wenn die Flächenschar $\Psi(a, b) = 0$ wenigstens ∞^1 verschiedene Flächen enthält; besteht sie aus lauter Kegeln, so müssen unter den Spitzen dieser Kegel mindestens ∞^1 verschiedene vorhanden sein. Dann nämlich erfüllen die Elemente x, y, z, p, q, deren Ebenen die Flächen $\Psi = 0$ oder ihre Rückkehrkanten berühren, sicher keine von a und b freie Gleichung. Engel.

Nun können $p, q, xp + yq - z$ als die Ebenenkoordinaten der Ebene des Elementes x, y, z, p, q aufgefaßt werden, demnach stellen die Gleichungen $u = a$, $v = b$, wenn man a und b irgendwie wählt, ∞^3 Flächenelemente dar, deren Punkte x, y, z auf der Fläche: $b = \omega(a, x, y, z)$ liegen und deren Ebenen eine gewisse Fläche berühren, die in Ebenenkoordinaten durch die Gleichung: $b = \Omega(a, xp + yq - z, p, q)$ dargestellt wird.

Die von Lie angegebene Konstruktion liefert also wirklich alle Monge-Ampèreschen Gleichungen von der betrachteten Art, wenn nur vorausgesetzt wird, daß keine der beiden Funktionen u, v von p und q beiden frei ist.

Ist dagegen u von p und q frei, v aber nicht, so wird die Monge-Ampèresche Gleichung dann und nur dann linear und homogen in r, s, t, wenn v die Form hat:

$$v \equiv \Omega(u, xp + yq - z, p, q).$$

In diesem Falle stellen die Gleichungen: $u = a$, $v = b$ bei beliebiger Wahl von a und b ∞^2 Flächenelemente dar, deren Punkte auf der Fläche $u(x, y, z) = a$ liegen und deren Ebenen eine gewisse Fläche berühren, die in Ebenenkoordinaten durch die Gleichung: $b = \Omega(a, xp + yq - z, p, q)$ dargestellt wird. Die Liesche Konstruktion ist also etwas zu modifizieren.)

Ist überhaupt ein intermediäres Integral von der Form: $v - \varphi(u) = 0$ vorgelegt, so hat die zugehörige Monge-Ampèresche Gleichung die Form:

$$(u_p v_q - u_q v_p)(rt - s^2) + \cdots = 0.$$

Wenn daher eine *lineare* Monge-Ampèresche Gleichung ein intermediäres Integral $v - \varphi(u) = 0$ besitzt, so müssen p und q zwischen $u = a$, $v = b$ eliminiert werden können.

Man findet daher *alle* linearen Monge-Ampèreschen Gleichungen mit einem solchen intermediären Integrale, indem man den Punkten jeder Fläche der Schar $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ nach arbiträrem Gesetze jedesmal einen Elementarkegel zuordnet.

Auch die allgemeine lineare Monge-Ampèresche Gleichung:

$$Rr + 2Ss + Tt + U = 0$$

läßt eine geometrische Deutung zu, die der im Anfange des Paragraphen für den besondern Fall $RT - S^2 = 0$ gegebenen analog ist.

Auf irgend einer Fläche betrachten wir zwei verschiedene durch den Punkt x, y, z gehende Kurven, deren Tangenten die Richtungskosinus: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ haben, so daß also:

$$p\alpha_1 + q\beta_1 = \gamma_1, \quad p\alpha_2 + q\beta_2 = \gamma_2$$

und:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + (p\alpha_2 + q\beta_2)^2 = 1$$

ist. Sind R_1 und R_2 die Krümmungshalbmesser der durch diese Tangenten bestimmten Normalschnitte der Fläche, so haben wir:

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_1} + r\alpha_1^2 + 2s\alpha_1\beta_1 + t\beta_1^2 = 0,$$

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R_2} + r\alpha_2^2 + 2s\alpha_2\beta_2 + t\beta_2^2 = 0$$

und wir können versuchen, zwei Multiplikatoren λ_1 und λ_2 so zu bestimmen, daß:

$$\begin{aligned} \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 &= R, \\ \lambda_1\alpha_1\beta_1 + \lambda_2\alpha_2\beta_2 &= S, \\ \lambda_1\beta_1^2 + \lambda_2\beta_2^2 &= T, \\ \sqrt{1+p^2+q^2}\left(\frac{\lambda_1}{R_1} + \frac{\lambda_2}{R_2}\right) &= U \end{aligned}$$

wird. Durch Elimination der λ ergibt sich jetzt noch eine Bedingung für $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, nämlich:

$$R\beta_1\beta_2 - S(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + T\alpha_1\alpha_2 = 0$$

und diese sagt aus, daß die beiden in der Tangentialebene des Punktes x, y, z liegenden Richtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 zu den beiden charakteristischen Richtungen, die die Differentialgleichung $Rr + 2Ss + Tt + U$ dem Elemente x, y, z, p, q zuordnet, harmonisch sein müssen, denn die charakteristischen Richtungen sind durch die Gleichung:

$$R\,dy^2 - 2S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

bestimmt.

Im ganzen müssen also $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ drei von λ_1 und λ_2 freie Relationen befriedigen, wenn es möglich sein soll, λ_1 und λ_2 in der verlangten Weise zu bestimmen, aber auch nicht mehr als drei, denn in der Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & R \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & S \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & T \end{vmatrix}$$

verschwinden nicht alle zweireihigen Determinanten, wenigstens wenn man voraussetzt, daß zwei verschiedene charakteristische Richtungen vorhanden sind, daß also $RT - S^2$ nicht verschwindet.

Wählt man nun $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ so, daß diese drei Relationen befriedigt werden, was auf ∞^1 verschiedene Arten möglich ist, so sind λ_1 und λ_2 vollständig bestimmt, etwa durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= R(1+p^2) + 2Spq + T(1+q^2) \\ \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 &= R, \end{aligned}$$

denn α_2^2 kann als verschieden von α_1^2 angenommen werden.

Demnach kann jede lineare Monge-Ampèresche Gleichung auf ∞^1 Arten so gedeutet werden, daß sie ausdrückt, daß auf jeder ihr

Integralflächen die Krümmungen zweier zu den beiden charakteristischen Richtungen harmonisch liegender Normalschnitte eine lineare Relation erfüllen, deren Koeffizienten Funktionen von x, y, z, p, q sind. Diese Funktionen sind bekannt, sobald man das Paar von Normalschnitten gewählt hat.

Man kann aber auch den Größen λ_1 und λ_2 von vornherein noch eine Relation vorschreiben, zum Beispiel $\lambda_1 = \lambda_2$. Dann hat man:

$$2\lambda_1 = R(1+p^2) + 2Spq + T(1+q^2)$$

ferner:

$$\lambda_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = R,$$

also ergibt sich:

(I) $$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\{R(1+p^2) + 2Spq + T(1+q^2)\} = 2R$$

wozu noch kommt:

(II) $$R\beta_1\beta_2 - S(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + T\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

(III) $$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + (p\alpha_1 + q\beta_1)^2 = 1,$$

(IV) $$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + (p\alpha_2 + q\beta_2)^2 = 1.$$

Es ist a priori klar, daß die aus (II), (III), (IV) hervorgehende Relation zwischen α_1, α_2 nicht mit (I) zusammenfallen kann, sonst könnte man nämlich die beiden Richtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ zueinander senkrecht wählen und es wäre dann die mittlere Krümmung eine Funktion der Lage des Flächenelementes, was nicht der Fall ist. Folglich kann man jede lineare Monge-Ampèresche Gleichung auch so deuten:

Die Summe der Krümmungen von zwei bestimmten, nicht aufeinander senkrecht stehenden Normalschnitten ist eine bestimmte Funktion von x, y, z, p, q.

Kapitel III.

Die Berührungstransformationen des Raumes, die durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 definiert werden.*)

§ 1.

Kurvensysteme und Kurvenkomplexe.

Eine Kurvenschar, die aus ∞^2 den Raum ausfüllenden Kurven besteht, bezeichnen wir als ein *Kurvensystem*. Sind die Kurven gerade Linien, so haben wir ein *Strahlensystem*. Den von Plücker eingeführten Ausdruck Linienkongruenz, den ich von 1870 an benutzt habe, lasse ich fallen, da

*) Im Manuskripte trägt dieses Kapitel nur die Nummer III, die Überschrift fehlt. Engel.

die Bezeichnung Strahlensystem nicht bloß älter sondern im Grunde auch ausdrucksvoller ist.

Die Gleichungen eines Kurvensystems haben die Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a, b) = 0,$$

lassen sich aber auch in der Form:

$$u(x, y, z) = a, \qquad v(x, y, z) = b$$

schreiben; die Kurven des Systems lassen sich als die Integralkurven eines simultanen Systems:

$$\frac{dx}{\alpha(x, y, z)} = \frac{dy}{\beta(x, y, z)} = \frac{dz}{\gamma(x, y, z)}$$

definieren oder als die Charakteristiken der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0.$$

Hier wollen wir jedoch die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zugrunde legen.

Verlangt man, daß die Kurve a, b von einer unendlich benachbarten Kurve: $a + da$, $b + db$ geschnitten werden soll, so muß werden:

$$\varphi_a da + \varphi_b db = 0, \qquad \psi_a da + \psi_b db = 0,$$

und eliminiert man x, y, z aus diesen vier Gleichungen, so kommt im allgemeinen eine Gleichung:

$$\omega\left(a, b, \frac{da}{db}\right) = 0.$$

Nun liefert jede Gleichung $b - \chi(a) = 0$ eine Fläche, die von ∞^1 Kurven des Systems erzeugt ist. Wird daher die Differentialgleichung $\omega = 0$ durch die Gleichung:

$$\Omega(b, a, K) = 0$$

mit der willkürlichen Konstanten K integriert, so erhält man ∞^1 Flächen, die von Kurven des Systems erzeugt sind und auf deren jeder je zwei benachbarte Kurven einander schneiden und somit eine Umhüllungskurve U bestimmen. Man bekommt so ∞^1 Kurven U, die eine Fläche f erzeugen, und diese Fläche, die wir als die *Brennfläche* des Systems bezeichnen, wird von jeder Kurve des Systems berührt.

Setzen wir z. B. voraus, daß die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in x, y, z, a, b algebraisch sind, so ist die Differentialgleichung $\omega = 0$ auch algebraisch, liefert aber im allgemeinen mehrere Bestimmungen für $db : da$. Sind die Kurven insbesondere Gerade, so hat $db : da$ bekanntlich zwei Werte, und das sagt aus, daß jede Gerade eines Strahlensystems von zwei benachbarten geschnitten wird.

Im allgemeinen wird, wenn ein Kurvensystem: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ vorliegt, jede Kurve a, b von mehreren, etwa von m verschiedenen benach-

barten Kurven des Systems geschnitten. In diesem Falle lassen sich die Kurven des Systems auf m Arten zu je ∞^1 Flächen zusammenfassen derart, daß die auf jeder derartigen Fläche gelegenen Kurven eine Umhüllungskurve haben. Dann wird also jede Kurve des Systems von m verschiedenen Kurven U berührt und sie wird dementsprechend die Brennfläche in m Punkten berühren, wobei die Brennfläche unter Umständen in mehrere und zwar höchstens in m verschiedene Flächen zerfallen kann.

Sind die Gleichungen: $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nicht algebraisch, so werden doch die Kurven des Systems im allgemeinen ebenfalls auf mehrere Arten zu je ∞^1 Flächen zusammengefaßt werden können, und jede Kurve des Systems wird die Brennfläche in mehreren Punkten berühren.

Eine Schar von ∞^3 geraden Linien bezeichnete Plücker als einen Linienkomplex. Dementsprechend bezeichnen wir eine Schar von ∞^3 Kurven, die den Raum ausfüllen, als einen *Kurvenkomplex*. Die Gleichungen eines solchen Komplexes haben die Form:

$$\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a, b, c) = 0. \tag{1}$$

Wählen wir eine bestimmte Kurve des Komplexes, etwa die Kurve a, b, c, so können wir alle benachbarten Kurven: $a + da$, $b + db$, $c + dc$ suchen, die diese Kurve schneiden. Wir finden sie durch Bildung der Gleichungen:

$$\varphi_a da + \varphi_b db + \varphi_c dc = 0, \qquad \psi_a da + \psi_b db + \psi_c dc = 0. \tag{2}$$

Indem wir sodann die Größen x, y, z zwischen den vier Gleichungen (1), (2) eliminieren, erhalten wir eine Mongesche Gleichung:

$$\Omega(a, b, c, da, db, dc) = 0 \tag{3}$$

als Antwort auf unsre Frage. Wir sehen also, daß jede Kurve des Komplexes von ∞^1 benachbarten Kurven des Komplexes geschnitten wird.

§ 2.

Ein Entsprechen zwischen zwei Kurvenkomplexen.

Wir betrachten jetzt zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0 \tag{4}$$

und deuten x, y, z als Koordinaten eines Punktes in einem Raume, x_1, y_1, z_1 als Koordinaten eines andern Punktes in einem andern Raume. Wir setzen dabei voraus, daß sich aus (4) weder die Größen x, y, z noch die Größen x_1, y_1, z_1 eliminieren lassen.

Erteilen wir x, y, z beliebige Werte a, b, c, so erhalten wir die Kurve:

$$\Omega_1(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad \Omega_2(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \tag{5}$$

die wir mit k_1 bezeichnen. Im Raume x_1, y_1, z_1 treten somit Kurven k_1

auf, und zwar können wir es so auffassen, daß dem Punkte $x = a, y = b, z = c$ des ersten Raumes die Kurve (5) des zweiten Raumes zugeordnet ist. Die Zahl der Kurven k_1 ist im allgemeinen ∞^3, sie kann aber auch geringer sein, indem immer unendlich vielen Punkten x, y, z dieselbe Kurve k_1 zugeordnet ist.

Dementsprechend liefern die Gleichungen:

$$(6) \qquad \Omega_1(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, a_1, b_1, c_1) = 0$$

gewisse Kurven k im Raume x, y, z. Jedem Punkte: $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$, $z_1 = c_1$ entspricht eine Kurve k, und daher ist die Zahl der Kurven k gleich ∞^3 oder kleiner.

Führen wir nun die Redeweise ein: Die Punkte x, y, z und x_1, y_1, z_1 sind konjugiert, wenn ihre Koordinaten die Gleichungen (4) erfüllen, so sehen wir, daß jeder Punkt x, y, z ∞^1 konjugierte Punkte besitzt, deren Ort eine Kurve k_1 ist. Dementsprechend hat jeder Punkt x_1, y_1, z_1 ∞^1 konjugierte Punkte, die eine Kurve k bilden.

Da wir vorausgesetzt haben, daß sich aus (4) weder die x, y, z noch die x_1, y_1, z_1 eliminieren lassen, so ist klar, daß weder die Kurven k alle auf einer Fläche des Raumes x, y, z liegen, noch die Kurven k_1 alle auf einer Fläche des Raumes x_1, y_1, z_1, daß also jede der beiden Kurvenscharen ihren Raum ganz ausfüllt und aus mindestens ∞^2 verschiedenen Kurven besteht. Enthielte nun eine der beiden Scharen, etwa die im Raume x, y, z, bloß ∞^2 verschiedene Kurven, so würden wir, wenn wir (4) nach zwei der Größen x, y, z auflösten, etwa nach y und z, zwei Gleichungen:

$$y = w_1(x, x_1, y_1, z_1), \qquad z = w_2(x, x_1, y_1, z_1)$$

erhalten, in denen die drei Parameter x_1, y_1, z_1 nicht wesentlich wären, die sich also auf die Form:

$$y = \bar{w}_1(x, \varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_1, y_1, z_1)),$$
$$z = \bar{w}_2(x, \varphi(x_1, y_1, z_1), \chi(x_1, y_1, z_1))$$

bringen ließen. Da x_1, y_1, z_1 sich nicht eliminieren lassen, so müßten diese Gleichungen nach φ und χ auflösbar sein, und es würde demnach auch die Kurvenschar im Raume x_1, y_1, z_1 bloß aus ∞^2 verschiedenen Kurven bestehen. Wir können daraus schließen, daß, sobald die eine Kurvenschar ∞^3 verschiedene Kurven enthält, von der andern dasselbe gelten muß. In jedem der beiden Räume gehen dann durch jeden Punkt des Raumes ∞^1 verschiedene Kurven der betreffenden Schar.

Wir dürfen also jetzt annehmen, daß die Kurven k sowohl als die Kurven k_1 ∞^3 an der Zahl sind. Dann sind die Kurven k Integralkurven

einer ganz bestimmten Mongeschen Gleichung, die man findet, indem man zwischen den Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z}dz = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z}dz = 0 \end{cases}$$

die Größen x_1, y_1, z_1 eliminiert. Diese Mongesche Gleichung:

$$(8)\qquad f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$$

ordnet jedem Punkte x, y, z einen Elementarkegel zu, der auch als Ort der Tangenten aller hindurchgehenden Kurven k definiert werden kann. Dementsprechend sind die Kurven k_1 die Integralkurven einer Mongeschen Gleichung:

$$(8_1)\qquad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1, dy_1, dz_1) = 0,$$

die man findet, wenn man zwischen den Gleichungen:

$$(7_1)\quad \begin{cases} \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z_1}dz_1 = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z_1}dz_1 = 0 \end{cases}$$

die Größen x, y, z eliminiert. Hier ist der einem Punkte x_1, y_1, z_1 zugeordnete Elementarkegel der Ort der Tangenten aller durch x_1, y_1, z_1 gehenden Kurven k_1.

Nach den letzten Entwicklungen des § 1 haben aber diese Mongeschen Gleichungen noch eine andere Bedeutung. In der Tat, sucht man die Bedingung dafür, daß die dem Punkte x_1, y_1, z_1 zugeordnete Kurve k von einer unendlich benachbarten Kurve k geschnitten wird, so kommt man wieder genau zu der Mongeschen Gleichung (8_1). Dementsprechend liefert die Mongesche Gleichung (8) die Bedingung dafür, daß die den beiden Punkten x, y, z und $x+dx, y+dy, z+dz$ zugeordneten Kurven k_1 einander schneiden.

Wenn wir daher von Ausnahmefällen absehen, die wir später besprechen werden, so können wir sagen:

Die Gleichungen:

$$(4)\qquad \Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

ordnen jedem Punkte x, y, z eine Kurve k_1, jedem Punkte x_1, y_1, z_1 eine Kurve k zu. Die ∞^3 Kurven k_1 erfüllen eine Mongesche Gleichung:

$$(8_1)\qquad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1, dy_1, dz_1) = 0$$

und die Kurven k eine Mongesche Gleichung:

$$f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0.$$

Wählen wir irgend eine Integralkurve K_1 der Mongeschen Gleichung (8_1), so sind deren ∞^1 Punkten ∞^1 Kurven k zugeordnet, die eine Kurve K

umhüllen, und zwar ist diese Kurve K ihrerseits eine Integralkurve der Mongeschen Gleichung (8). Ist andererseits K eine beliebige Integralkurve der Mongeschen Gleichung (8), so entsprechen ihren ∞^1 Punkten ∞^1 Kurven k_1 des Raumes x_1, y_1, z_1, die eine Kurve K_1' umhüllen, und zwar ist K_1' offenbar eine Integralkurve der Mongeschen Gleichung (8_1).

Auf die angegebene Weise erhält man nun aus jeder Integralkurve K_1 von (8_1) eine Integralkurve K von (8) und aus dieser wieder eine Integralkurve K_1' von (8_1). Es läßt sich aber zeigen, daß die beiden Kurven K_1 und K_1', die in der eben geschilderten Beziehung zu einer Integralkurve K stehen, identisch sind. Versuchen wir dies analytisch zu beweisen.

Es seien: $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, wo X, Y, Z Funktionen von t sind, die Gleichungen einer Integralkurve K von (8). Die Kurve K_1' ist die Umhüllungskurve der ∞^1 Kurven k_1:

$$\Omega_1(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$

die den Punkten von K entsprechen, ihre Gleichungen werden daher gefunden, wenn man t aus irgend drei unter den vier Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} \Omega_1(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0, & \Omega_2(X, Y, Z, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial X} X' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Y} Y' + \frac{\partial \Omega_1}{\partial Z} Z' = 0, & \frac{\partial \Omega_2}{\partial X} X' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial Y} Y' + \frac{\partial \Omega_2}{\partial Z} Z' = 0 \end{cases}$$

eliminiert.

Andererseits haben wir unter den Kurven k alle die auszuwählen, die K berühren. Nun ist die Tangente einer beliebigen Kurve k in dem Punkte x, y, z bestimmt durch:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} dz = 0,$$

soll daher diese Kurve k die Kurve K oder: $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ im Punkte x, y, z berühren, so müssen wieder die Gleichungen (9) bestehen, man erhält demnach als Ort der Punkte x_1, y_1, z_1, die den K berührenden Kurven k entsprechen, wieder die Kurve K_1', das heißt, die beiden Kurven K_1 und K_1' fallen wirklich zusammen.

Hierdurch ist gezeigt, daß zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen (8) und (8_1) ein Entsprechen derart stattfindet, daß jeder Integralkurve der einen Gleichung eine ganz bestimmte Integralkurve der andern zugeordnet ist, und zwar ist dieses Entsprechen reziprok, das heißt, wenn K eine Integralkurve von (8) ist und K_1 die ihr zugeordnete Integralkurve von (8_1), so ist die der Kurve K_1 entsprechende Integralkurve von (8) keine andere als K. Dieses Entsprechen zwischen den Integralkurven kann nun aber einfacher ausgedrückt werden durch ein Entsprechen zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen.

In der Tat, denken wir uns eine Integralkurve von (8) in der Weise dargestellt, daß x, y, z als Funktionen von t gegeben sind, so können wir nach den eben durchgeführten Betrachtungen auch die entsprechende Integralkurve von (8_1) so darstellen, daß x_1, y_1, z_1 gewisse Funktionen von t werden. Bezeichnen wir dann die Ableitungen nach t durch Akzente, so haben wir die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \Omega_1(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0, \quad \Omega_2(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=0 \\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial x}x'+\frac{\partial\Omega_1}{\partial y}y'+\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}z'=0, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial x}x'+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y}y'+\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}z'=0 \\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}x_1'+\frac{\partial\Omega_1}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\Omega_1}{\partial z_1}z_1'=0, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}x_1'+\frac{\partial\Omega_2}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_1}z_1'=0, \end{cases}$$

also sechs Relationen zwischen den zehn Größen: $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x':y':z', x_1':y_1':z_1'$. Zwei unter diesen sechs Relationen können durch die beiden Mongeschen Gleichungen (8) und (8_1) ersetzt werden, demnach sind die ∞^4 Linienelemente $x, y, z, x':y':z'$ der Gleichung (8) mit den ∞^4 Linienelementen $x_1, y_1, z_1, x_1':y_1':z_1'$ der Gleichung (8_1) durch vier unabhängige Relationen verbunden, wodurch eine nach beiden Seiten auflösbare Beziehung zwischen den Linienelementen beider Gleichungen bestimmt ist.

Schreiben wir die Mongeschen Gleichungen in aufgelöster Form, etwa so:

$$(11)\qquad \frac{z'}{x'}=F\left(x,y,z\frac{y'}{x'}\right)$$

und

$$(11_1)\qquad \frac{z_1'}{x_1'}=F_1\left(x_1,y_1,z_1\frac{y_1'}{x_1'}\right)$$

und betrachten wir demnach $x, y, z, y':x'$ als Bestimmungsstücke der ∞^4 Linienelemente von (8) und $x_1, y_1, z_1, y_1':x_1'$ als Bestimmungsstücke der ∞^4 Linienelemente von (8_1), so finden wir durch Auflösung einerseits vier Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} x_1=A\left(x,y,z,\frac{y'}{x'}\right), \quad y_1=B\left(x,y,z,\frac{y'}{x'}\right), \quad z_1=C\left(x,y,z,\frac{y'}{x'}\right) \\ \frac{y_1'}{x_1'}=D\left(x,y,z,\frac{y'}{x'}\right) \end{cases}$$

und andererseits vier Gleichungen:

$$(13)\qquad x=\mathsf{A}\left(x_1,y_1,z_1,\frac{y_1'}{x_1'}\right),\ \cdots, \quad \frac{y'}{x'}=\Delta\left(x_1,y_1,z_1,\frac{y_1'}{x_1'}\right).$$

Damit haben wir den analytischen Ausdruck für die Beziehung zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen gefunden.

Nehmen wir jetzt eine beliebige Integralkurve der einen Mongeschen Gleichung, etwa die Kurve K, so wissen wir, daß ihr eine Integralkurve K_1

der andern Mongeschen Gleichung entspricht. Um diese zu finden, bestimmen wir die ∞^1 Linienelemente $x, y, z, x' : y' : z'$ von K und erhalten durch die Formeln (12) und (11_1) die ∞^1 Linienelemente der Bildkurve K_1.

Da jede Integralkurve der einen Mongeschen Gleichung durch die gefundenen Transformationsformeln in eine Integralkurve der zweiten Mongeschen Gleichung übergeführt wird, so sehen wir, daß *unendlich benachbarte vereinigt liegende Linienelemente der einen Mongeschen Gleichung in solche unendlich benachbarte Linienelemente der andern übergehen, die ebenfalls vereinigt liegen.*

Wir sehen ferner, daß unsere Formeln eine solche Transformation zwischen den Linienelementen der beiden Mongeschen Gleichungen bestimmen, bei der Integralkurven der ersten Mongeschen Gleichung, die ein Linienelement gemein haben, das heißt, die einander berühren, in Integralkurven der zweiten Mongeschen Gleichung übergehen, die ihrerseits ebenfalls ein Linienelement gemein haben.

Der durch die Gleichungen (10) oder (11), (11_1), (12) vermittelte Zusammenhang zwischen den Integralkurven der beiden Mongeschen Gleichungen besitzt somit die wesentliche Eigenschaft, daß Berührung eine invariante Beziehung ist.

Nehmen wir jetzt eine Fläche φ im Raume x, y, z. Diese wird von Integralkurven der Mongeschen Gleichung (8) überdeckt. Ist zum Beispiel (8) in $x' : y' : z'$ vom zweiten Grade, sind also die Elementarkegel im Raume x, y, z vom zweiten Grade, so enthält die Fläche φ in jedem Punkte zwei Fortschreitungsrichtungen (zwei Linienelemente), die (8) erfüllen, und wird daher zweifach von Integralkurven der Gleichung (8) überdeckt. Überhaupt wird jede Fläche φ des Raumes x, y, z mehrfach von Integralkurven der Gleichung (8) überdeckt, wenn nicht (8) zufällig eine Pfaffsche Gleichung ist.

Wir wollen annehmen, daß die Fläche φ in jedem ihrer Punkte gerade m Linienelemente enthält, die der Mongeschen Gleichung (8) genügen, so daß die ∞^1 auf der Fläche liegenden Integralkurven von (8) in m Scharen zerfallen, die wir mit $k', k'', \cdots k^{(m)}$ bezeichnen. Dann gehen die ∞^1 Kurven k' in ∞^1 Integralkurven k_1' der Mongeschen Gleichung (8_1) über und diese ∞^1 Kurven k_1' bilden eine Fläche φ_1' des Raumes x_1, y_1, z_1. Entsprechend gehen die ∞^1 Kurven k'' in ∞^1 Integralkurven k_1'' von (8_1) über, die eine Fläche φ_1'' bilden, und so weiter. Auf diese Weise wird der Fläche φ eine ganze Anzahl von Flächen des Raumes x_1, y_1, z_1 zugeordnet, nämlich die m Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \cdots \varphi_1^{(m)}$.

Wir wissen andererseits, daß die Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ eine Berührungstransformation bestimmen, die jede Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in eine Fläche $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ überführt. Wir behaupten, daß diese Be-

ührungstransformation die früher betrachtete Fläche φ gerade in die ı Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \cdots \varphi_1^{(m)}$ überführt, die übrigens unter Umständen 'eile eines irreduzibeln Gebildes sein können.

Der Beweis ist leicht zu führen. Der Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$, ufgefaßt als Elementverein, geht ja über in die Elemente der Kurve:

$$\Omega_1(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(a, b, c, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Nehmen wir nun eine Integralkurve K der Mongeschen Gleichung (8), o hat sie mit jedem auf ihr gelegenen Punkte ∞^1 Flächenelemente ge- ıein. Daher führt unsere Berührungstransformation die Kurve K mit ıren ∞^1 Punkten über in einen Elementverein U mit ∞^1 Kurven k_1 ıd zwar so, daß U mit jeder dieser ∞^1 Kurven ∞^1 Flächenelemente ɜmein hat. Kurz die Flächenelemente der Kurve K gehen über in die ›² Elemente der Kurve, die wir früher mit K_1 bezeichnet haben.

Nun aber hat eine Fläche φ mit jeder auf ihr gelegenen Integral- ırve K von (8) ∞^1 Flächenelemente gemein, da aber K von der Be- hrungstransformation in die Kurve K_1 übergeführt wird, so muß K_1 f der Fläche liegen, in die φ übergeht. Mithin geht φ über in die Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \cdots \varphi_1^{(m)}$.

Man kann jedoch auch auf andere, in gewissem Sinne noch ein- ɔhere Weise eine geometrische Deutung unserer Berührungstransfor- ɪation erhalten.

Die Fläche φ hat mit jedem auf ihr gelegenen Punkte p ein Flächen- ɜment gemein. Da nun unsere Berührungstransformation den Punkt p eine Kurve k_1 verwandelt, so muß die Bildfläche φ_1 von φ die Kurve k_1 ırühren, indem sie mit ihr ein Flächenelement gemein hat.

Die ∞^2 Punkte einer Fläche φ transformieren sich daher in ∞^2 urven k_1, deren jede die Bildfläche φ_1 von φ berührt. Alle diese Kurven lden ein Kurvensystem, dessen Brennfläche gerade aus den Flächen besteht, e wir früher mit $\varphi_1', \varphi_1'', \cdots \varphi_1^{(m)}$ bezeichnet haben.

Halten wir uns daher innerhalb eines passend gewählten Bereiches ɜs Punktraumes x, y, z, so werden die in diesem Bereiche liegenden inienelemente der Mongeschen Gleichung (8) ein-eindeutig auf die Linien- ɛmente der Mongeschen Gleichung (8_1) in dem Raume x_1, y_1, z_1 bezogen. ɔagegen werden die Flächenelemente x, y, z, p, q dieses Bereiches nicht in-eindeutig auf die Flächenelemente des anderen Raumes bezogen. Ist ie Mongesche Gleichung (8) in bezug auf $x' : y' : z'$ vom m^{ten} Grade, o enthält jedes Flächenelement des betreffenden Bereiches m Linien- lemente, die der Gleichung (8) genügen; diese m Linienelemente gehen ber in m Linienelemente der Kurve k_1, in die der Punkt x, y, z des ʼlächenelementes x, y, z, p, q bei der Berührungstransformation über- ɟeführt wird. Demnach verwandelt sich das Flächenelement x, y, z, p, q

in m Flächenelemente der Kurve k_1, deren jedes eines der eben besprochenen m Linienelemente von k_1 enthält.

Jede Fläche φ des Raumes x, y, z geht also über in m Flächen $\varphi_1', \varphi_1'', \cdots \varphi_1^{(m)}$ des Raumes x_1, y_1, z_1. Dementsprechend wird die inverse Berührungstransformation jede Fläche φ_1' des zweiten Raumes in m_1 Flächen des ersten Raumes überführen, unter denen sich selbstverständlich die Fläche φ befindet.

Bezeichnen wir die innerhalb eines gewissen Bereiches ein-eindeutige Berührungstransformation, bei der φ in φ_1' übergeht, mit B', ferner die, bei der φ in φ_1'' übergeht, mit B'', und endlich mit B'^{-1} die, bei der φ_1' in φ übergeht, so ist

$$B'^{-1}B''$$

das Symbol einer Berührungstransformation, die φ_1' in φ_1'' verwandelt, und so weiter.

Unter Umständen kann man sich die Sache vorteilhaft auch folgendermaßen veranschaulichen.

Die Fläche φ enthält ∞^2 Linienelemente $x, y, z,\ x' : y' : z'$, die (8) erfüllen. Die Linienelementtransformation (11), (11_1), (12) führt diese ∞^2 Linienelemente in ∞^2 Linienelemente $x_1, y_1, z_1,\ x_1' : y_1' : z_1'$ über, die (8_1) erfüllen. Der Punktort dieser neuen Linienelemente ist das Bild der gegebenen Fläche φ.

Betrachten wir nun im Raume x, y, z eine Kurve l, die der Mongeschen Gleichung (8) nicht genügt, und wollen wir das Bild dieser Kurve im Raume x_1, y_1, z_1 finden, so stehen uns mehrere Wege offen.

Die Kurve l hat mit jedem auf ihr liegenden Punkte p ∞^1 Flächenelemente gemein, folglich hat ihr Bild l_1 mit der Bildkurve k_1 des Punktes p ebenfalls ∞^1 Flächenelemente gemein und enthält somit die Kurve k_1. Also führt unsere Berührungstransformation jede Kurve l des Raumes x, y, z, die der Gleichung (8) nicht genügt, in eine Fläche über, die von ∞^1 Kurven k_1 erzeugt ist, nämlich von den Kurven k_1, die den Punkten von l entsprechen.

§ 3.

Einige Sätze über Mongesche Gleichungen.

Es sei:

$$f(x, y, z, x' : y' : z') = 0$$

eine Mongesche Gleichung und zwar:

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad y' = \frac{dy}{ds}, \quad z' = \frac{dz}{ds},$$

wo s die Bogenlänge bezeichnet. Durch Differentiation ergibt sich:

$$f_x x'' + f_y y'' + f_z z'' + f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0,$$

also wird:

$$\frac{f_x x'' + f_y y'' + f_z z''}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = -\frac{f_x x' + f_y y' + f_z z'}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \cdot R,$$

wo R der Krümmungshalbmesser der betreffenden Integralkurve. Die linke Seite ist gleich $\cos\Theta$, wo Θ den Winkel bedeutet, den die Hauptnormale der Integralkurve mit der Normalen des Flächenelementes bildet, das den zu x, y, z gehörigen Elementarkegel längs der Tangente der Integralkurve berührt; also kommt:

$$\frac{\cos\Theta}{R} = -\frac{f_x x' + f_y y' + f_z z'}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$$

und hier hängt die rechte Seite nur von x, y, z, x', y', z' ab. Damit haben wir die beiden Sätze:

Alle Integralkurven einer Mongeschen Gleichung, die ein Linienelement und gleichseitig die Oskulationsebene gemein haben, besitzen in dem betreffenden Punkte dieselbe Krümmung.

Dreht sich eine Ebene um die Gerade eines Linienelementes der Mongeschen Gleichung $f = 0$, und konstruiert man für jede Lage der Ebene den gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt aller Integralkurven von $f = 0$, die dieses Linienelement enthalten und die betreffende Ebene zur Oskulationsebene haben, so liegen alle diese Krümmungsmittelpunkte auf einem Kreise.

Hiermit ist eine Erweiterung des Meusnierschen Theorems gewonnen.*)

Nehmen wir nun eine beliebige Fläche und eine beliebige nicht lineare Mongesche Gleichung, so enthält die Fläche immer unendlich viele Punkte, in deren jedem sie den zugeordneten Elementarkegel der Mongeschen Gleichung berührt. In jedem solchen Punkte fallen zwei von den auf der Fläche liegenden Linienelementen der Mongeschen Gleichung zusammen und durch dieses doppelt zählende Linienelement geht eine auf der Fläche liegende Integralkurve der Mongeschen Gleichung. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß der betreffende Punkt im allgemeinen kein regulärer Punkt der hindurchgehenden Integralkurve ist, ausgenommen wenn die Fläche auch in dem benachbarten Punkte der Kurve wiederum den Elementarkegel berührt.

Berührt aber die Fläche in jedem Punkte einer auf ihr liegenden Integralkurve einer nichtlinearen Mongeschen Gleichung den zugeordneten Elementarkegel, so oskuliert sie alle Integralkurven der Mongeschen Gleichung, die jene erste Integralkurve berühren.

*) [Vgl. die Note: „Zur Geometrie einer Mongeschen Gleichung", Leipz. Ber. 1898, S. 1–2.]

{Es sei nämlich, indem x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird,

(A) $$z' = \omega(x, y, z, y')$$

die nichtlineare Mongesche Gleichung und $z = \varphi(x, y)$ eine beliebige Fläche. Soll diese in dem Punkte $x, y, z = \varphi(x, y)$ den zugeordneten Elementarkegel berühren, so muß die Gleichung

(B) $$z' = \varphi_x + \varphi_y y',$$

die alle auf der Fläche $z = \varphi(x, y)$ liegenden Linienelemente x, y, z, y', z' bestimmt, wenn man y' und z' als rechtwinklige Koordinaten deutet und x, y, z als Parameter auffaßt, die Tangente der Kurve $z' = \omega(x, y, z, y')$ darstellen, es müssen also die beiden Gleichungen:

(C) $$\varphi_x + \varphi_y y' = \omega(x, y, z, y'), \quad \varphi_y = \omega_{y'},$$

wenn man in ihnen $z = \varphi(x, y)$ setzt, durch geeignete Wahl von y' befriedigt werden können. Man erhält daher aus (C) durch Elimination von y' eine Relation zwischen x und y, die den Ort aller Punkte bestimmt, in denen die Fläche den zugeordneten Elementarkegel der Mongeschen Gleichung (A) berührt.

Wir wollen nun annehmen, daß x, y, z ein Punkt ist, in dem die Fläche $z = \varphi(x, y)$ den zugeordneten Elementarkegel berührt, so daß also für diesen Punkt $x, y, z = \varphi(x, y)$ die Gleichungen (A), (B) und (C) durch gewisse Werte von y' und z' befriedigt werden; die Tangentialebene der Fläche $z = \varphi(x, y)$ in dem Punkte x, y, z berührt dann den diesem Punkte zugeordneten Elementarkegel längs der Geraden des Linienelementes x, y, z, y', z', und $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dx$ ist daher ein dem Punkte x, y, z unendlich benachbarter Punkt der Fläche.

Verlangen wir jetzt noch, daß die Fläche auch in dem Punkte $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dz$ den zugeordneten Elementarkegel berühre, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (C), wenn man in ihnen x, y, z, y' durch $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dx$, $y' + dy'$ ersetzt, durch geeignete Wahl von dy' befriedigt werden können. Die erste der Gleichungen (C) ergibt bei dieser Operation die folgende:

$$(\varphi_{xx} + 2y'\varphi_{xy} + y'^2\varphi_{yy})\,dx + \varphi_y\,dy' = (\omega_x + y'\omega_y + \omega\omega_z)\,dx + \omega_{y'}dy',$$

die wegen der zweiten Gleichung (C) von dy' ganz frei wird und sich auf die Bedingung:

(D) $$\varphi_{xx} + 2y'\varphi_{xy} + y'^2\varphi_{yy} = \omega_x + y'\omega_y + \omega\omega_z$$

reduziert, wo natürlich immer $\varphi(x, y)$ für z zu setzen ist. Ist die Bedingung (D) erfüllt, so ist offenbar auch unsre Forderung erfüllt und die zweite der Gleichungen (C) liefert durch die angegebene Operation den betreffenden Wert von dy'.

Die Bedingung (D) hat nun den begrifflichen Sinn, daß alle dem Linienelemente x, y, z, y', z' unendlich benachbarten Linienelemente, die der Mongeschen Gleichung (A) genügen und deren Punkt der Punkt $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dx$ ist, auf der Fläche $z = \varphi(x, y)$ liegen. In der Tat, ist $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dx$, $y' + \delta y'$, $z' + \delta z'$ ein beliebiges Linienelement, das der Gleichung (A) genügt, so ist:

$$\delta z' = (\omega_x + y'\omega_y + \omega\omega_z)\,dx + \omega_{y'}\delta y'$$

oder, wegen (C) und (D):

$$\delta z' = (\varphi_{xx} + 2y'\varphi_{xy} + y'^2\varphi_{yy})\,dx + \varphi_y\delta y',$$

was eben nach (B) aussagt, daß das Linienelement $x + dx$, ..., $z' + \delta z'$ auf der Fläche $z = \varphi(x, y)$ liegt.

Wenn daher die Fläche $z = \varphi(x, y)$ in den beiden unendlich benachbarten Punkten x, y, z und $x + dx$, $y + y'dx$, $z + z'dx$ den zugeordneten Elementarkegel berührt und dabei x, y, z, y', z' ein der Mongeschen Gleichung (A) genügendes Linienelement ist, so hat jede Integralkurve der Mongeschen Gleichung, die das Linienelement x, y, z, y', z' enthält, auch das benachbarte Linienelement mit der Fläche gemein, das heißt, sie wird von der Fläche $z = \varphi(x, y)$ oskuliert*). }

Zugleich ergibt sich noch der Satz:

Liegt eine Fläche vor, die in jedem ihrer Punkte den zugeordneten Elementarkegel berührt, so oskuliert sie alle sie berührenden Integralkurven der Mongeschen Gleichung.

§ 4.

Eine Klasse von Monge-Ampèreschen Gleichungen 2. Ordnung mit intermediären Integralen.

Liegt eine Schar von ∞^3 Kurven vor, die den Raum ausfüllen, so findet man alle Flächen, die in jedem ihrer Punkte von einer Kurve der Schar oskuliert werden, durch Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$r + 2Ns + N^2 t + U(x, y, z, p, q) = 0. \tag{14}$$

{ In der Tat, die betreffende Kurvenschar wird durch zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$z' = \omega(x, y, z, y'), \quad y'' = \chi(x, y, z, y')$$

definiert, aus denen folgt:

$$z'' = \omega_x + y'\omega_y + \omega\omega_z + \chi\omega_{y'} = \Phi(x, y, z, y').$$

Verlangt man nun, daß die Fläche $z = f(x, y)$ in jedem Punkte von einer Kurve der Schar oskuliert wird, so müssen überdies die Gleichungen:

$$z' = p + qy', \quad z'' = r + 2sy' + ty'^2 + qy''$$

erfüllt sein, es muß also werden:

$$p + qy' = \omega(x, y, z, y'), \quad r + 2sy' + ty'^2 + q\chi = \Phi(x, y, z, y') \tag{15}$$

woraus durch Elimination von y' eine partielle Differentialgleichung von der Form (14) hervorgeht. Erhält man aus: $p + qy' = \omega$ durch Auflösung:

$$y' = N(x, y, z, p, q),$$

so ist N im allgemeinen eine reguläre Funktion seiner Argumente, nur wenn das Flächenelement x, y, z, p, q den seinem Punkte zugeordneten Elementarkegel berührt, wenn also zugleich die Relation: $q = \omega_{y'}$ erfüllt ist, verhält sich N sicher nicht mehr regulär.

---

*) In einem andern Konvolut, das eine Menge vorläufiger, noch nicht zusammenhängend redigierter Aufzeichnungen enthält, spricht Lie den folgenden Satz aus: „Berührt eine Fläche in einem ihrer Punkte den zugeordneten Elementarkegel und oskuliert sie eine durch den Punkt gehende Integralkurve, so oskuliert sie alle durch diesen Punkt gehenden Integralkurven, die die erste berühren." Man überzeugt sich leicht, daß dieser Satz mit dem eben bewiesenen gleichbedeutend ist.

Erwähnt sei noch folgendes: Ist x, y, z, p, q ein Flächenelement einer Integralfläche von (14), so ist die durch den Punkt x, y, z gehende Komplexkurve, die die Fläche in x, y, z oskuliert, vollständig bestimmt und zwar durch die Werte:

$$y' = N(x, y, z, p, q), \quad z' = p + qN,$$

die y' und z' im Punkte x, y, z haben.}

Die Gleichung (14) hat intermediäre Integrale und deren sogar drei, $u(x, y, z, p, q) = a$, $v = b$, $w = c$, so daß also (vgl. S. 280) auch

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

bei beliebigem Ω stets ein intermediäres Integral ist.

{Offenbar befriedigt nämlich jede Fläche, die von ∞^1 Kurven unsrer Schar erzeugt wird, die Differentialgleichung (14). Nun aber werden (vgl. S. 226) unsre ∞^3 Kurven, aufgefaßt als Elementvereine, durch drei Gleichungen von der Form:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b, \quad w(x, y, z, p, q) = c$$

dargestellt, wo u, v, w paarweise in Involution liegen. Demnach besitzt z. B. die Gleichung: $u = a$ eine vollständige Lösung, die durch ∞^2 unsrer ∞^3 Kurven dargestellt wird, und jede Fläche, die von ∞^1 unter diesen ∞^2 Kurven erzeugt wird, ist eine Integralfläche von $u = a$, woraus hervorgeht, daß $u = a$ eine intermediäre Integralgleichung von (14) ist.}

Soll nun aber $F(x, y, z, p, q) = a$ ein intermediäres Integral von (14) sein, so muß (14) eine Folge der beiden Gleichungen:

$$F_p r + F_q s + F_x + pF_z = 0$$
$$F_p s + F_q t + F_y + qF_z = 0$$

sein, es muß also:

$$F_p^2 r + 2F_p F_q s + F_q^2 t + F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z) \equiv$$
$$\equiv F_p^2\{r + 2Ns + N^2 t + U\}$$

sein, das heißt:

$$F_q \equiv NF_p, \quad F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z) \equiv UF_p^2$$

oder:

$$(16) \qquad \begin{cases} F_q - NF_p = 0 \\ F_x + pF_z + N(F_y + qF_z) - UF_p = 0. \end{cases}$$

Diese beiden linearen partiellen Differentialgleichungen für F müssen drei unabhängige Lösungen besitzen, sie müssen also ein zweigliedriges vollständiges System bilden und da sie nach F_q und F_x aufgelöst sind, so muß der aus ihnen gebildete Klammerausdruck identisch verschwinden. Für die beiden Funktionen N und U ergibt das die Bedingungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} N_q - NN_p = 0 \\ N_x + pN_z + N(N_y + qN_z) - UN_p - U_q + NU_p = 0. \end{cases}$$

Um den begrifflichen Sinn der beiden Bedingungen (17) brauchen wir uns eigentlich nicht zu kümmern, sie sagen eben aus, daß (16) ein zweigliedriges vollständiges System ist, und daß das Problem zu einem

Kurvenkomplexe gehört. Zum Beispiel bedeutet die erste der Gleichungen (16), daß die eingliedrige Gruppe, die von der infinitesimalen Transformation:

$$\delta x = \delta y = \delta z = 0, \quad \delta p = -N\delta t, \quad \delta q = \delta t$$

erzeugt wird, jedes eine intermediäre Integralgleichung erfüllende Element x, y, z, p, q in ein ebensolches Element überführt. Nun aber haben die beiden unendlich benachbarten Elemente x, y, z, p, q und $x + \delta x, \cdots,$ $q + \delta q$ den Punkt x, y, z gemein, und ihre Ebenen, die durch die Gleichungen:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

und

$$dz - (p + \delta p)\,dx - (q + \delta q)\,dy = 0$$

bestimmt sind, haben die Richtung:

$$\delta p\,dx + \delta q\,dy = 0, \quad dz = p\,dx + q\,dy$$

gemein, also ist jedem Element x, y, z, p, q, das einer intermediären Integralgleichung genügt, die in ihm enthaltene Richtung:

$$dy = N\,dx, \quad dz = (p + Nq)\,dx$$

derart zugeordnet, daß das ganze Büschel aller durch diese Richtung gehenden Flächenelemente ebenfalls der intermediären Integralgleichung genügt. Dabei ist allerdings die Voraussetzung gemacht, daß sich N für das Element x, y, z, p, q regulär verhält.

Hierin liegt nun, daß jede intermediäre Integralgleichung, für deren Elemente sich N im allgemeinen regulär verhält, eine lineare partielle Differentialgleichung ist. Jede lineare partielle intermediäre Integralgleichung kann aber, das ist begrifflich klar, zu Charakteristiken nur Kurven des Komplexes haben, demnach sind die Integralflächen jeder solchen intermediären Integralgleichung von Kurven des Komplexes erzeugt.

{ Daß die Charakteristiken jeder linearen partiellen intermediären Integralgleichung Kurven des Komplexes sind, sieht man so ein: Ist x, y, z, p, q ein beliebiges Flächenelement einer solchen Integralgleichung, für das sich N regulär verhält, so geht, wie eben gezeigt, durch den Punkt x, y, z die Richtung:

$$dy = N\,dx, \quad dz = (p + Nq)\,dx,$$

die diesem Flächenelemente angehört, und alle ∞^1 der intermediären Integralgleichung genügenden Flächenelemente, die x, y, z zum Punkte haben, gehen auch durch diese Richtung, die infolgedessen die Tangente der durch den Punkt x, y, z gehenden charakteristischen Kurve C unsrer intermediären Integralgleichung ist. Nun aber ist nach S. 301 f. die eben besprochene Richtung zugleich die Tangente einer bestimmten Komplexkurve K, und K oskuliert jede Integralfläche von (14), also auch jede Integralfläche unsrer intermediären Integralgleichung, die durch eines jener ∞^1 Flächenelemente geht, also überhaupt alle durch den Punkt x, y, z gehenden

Integralflächen der intermediären Integralgleichung. Diese von Charakteristiken erzeugten Integralflächen enthalten sämtlich die charakteristische Kurve C; sie können daher von K dann und nur dann oskuliert werden, wenn C von K oskuliert wird. Demnach wird jede charakteristische Kurve unsrer intermediären Integralgleichung in jedem ihrer Punkte von einer Komplexkurve nicht bloß berührt, sondern zugleich oskuliert, das heißt sie ist selbst eine Komplexkurve.)

Die einzigen Flächenelemente, für die sich N nicht regulär verhält, sind die Flächenelemente, die die ihren Punkten zugeordneten Elementarkegel der Mongeschen Gleichung berühren, die durch unsern Kurvenkomplex bestimmt ist. Der Inbegriff dieser Flächenelemente bestimmt aber, wenn die Mongesche Gleichung keine Pfaffsche ist, stets eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Integralflächen in jedem Punkte den zugehörigen Elementarkegel berühren und also nach dem Früheren von jeder sie berührenden Integralkurve der Mongeschen Gleichung, mithin insbesondere von jeder sie berührenden Komplexkurve oskuliert werden. Demnach bildet in diesem Falle der besprochene Inbegriff von Flächenelementen immer eine singuläre intermediäre Integralgleichung.

Damit haben wir das

Theorem X. *Eine Monge-Ampèresche Gleichung von der Form:*

$$r + 2N(x, y, z, p, q)s + N^2 t + U(x, y, z, p, q) = 0$$

besitzt dann und nur dann eine intermediäre Integralgleichung von der Form $\Omega(u, v, w) = 0$, *wo* Ω *eine willkürliche Funktion von* u, v, w *bezeichnet und* u, v, w *drei unabhängige Funktionen von* x, y, z, p, q *sind, wenn das Problem in folgender Weise von einem Kurvenkomplex abhängt: Es werden alle Flächen gesucht, die in jedem Punkte eine Kurve des Komplexes oskulieren. Werden die Kurven als Elementmannigfaltigkeiten dargestellt durch*

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b, \quad w(x, y, z, p, q) = c,$$

so ist:

$$\Omega(u, v, w) = 0$$

die allgemeine Form einer intermediären Integralgleichung. Außerdem gibt es noch eine singuläre intermediäre Integralgleichung, die gebildet wird von dem Inbegriff aller Flächenelemente, die zu der durch den Kurvenkomplex bestimmten Mongeschen Gleichung gehören.

§ 5.

Weiteres über die in § 2 besprochene Berührungstransformation.

Es seien jetzt wieder zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

vorgelegt, die eine Berührungstransformation bestimmen. In jedem der

beiden Räume x, y, z und x_1, y_1, z_1 tritt dann ein Kurvenkomplex auf mit einer Mongeschen Gleichung:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$$

und:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0;$$

zu jeder dieser beiden Mongeschen Gleichungen gehört eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$r + 2Ns + N^2 t + U = 0$$

und:

$$r_1 + 2N_1 s_1 + N_1^2 t_1 + U_1 = 0$$

und jede dieser Differentialgleichungen besitzt eine singuläre intermediäre Integralgleichung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und:

$$F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0,$$

die durch die zu der betreffenden Mongeschen Gleichung gehörigen Flächenelemente bestimmt ist.

Die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entsprechen nun einander *nicht* bei der Berührungstransformation, dagegen wollen wir beweisen, daß unsere Berührungstransformation die Gleichung erster Ordnung $F = 0$ in die Gleichung $F_1 = 0$ überführt.

Liegt nämlich im Raume x, y, z eine Fläche vor, die in jedem ihrer Punkte den zugehörigen Elementarkegel berührt, also mit andern Worten eine Integralfläche von $F(x, y, z, p, q) = 0$, so gibt es auf dieser Fläche nicht wie im allgemeinen Falle m Scharen von Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0$, sondern bloß $m - 1$ Scharen, unter denen aber eine doppelt zählt. Das den ∞^2 Punkten der Fläche entsprechende Kurvensystem im Raume x_1, y_1, z_1 (vgl. S. 291 ff.) besitzt daher $m - 1$ Brennflächen $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots$, unter denen eine doppelt zählt. Diese doppelt zählende Brennfläche wird von den ∞^2 Kurven des Systems oskuliert, und da die Kurven des Systems Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0$ sind, so erfüllt sie augenscheinlich die partielle Differentialgleichung: $F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$. Also:

Theorem XI. *Unsere Berührungstransformation führt die Gleichung:* $F(x, y, z, p, q) = 0$ *in die Gleichung* $F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0$ *über.*

Anmerkung. Bei einer Berührungstransformation, die nur durch eine aequatio directrix:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

bestimmt ist, gelten ähnliche Beziehungen.

Auch hier treten zwei Mongesche Gleichungen auf:

$$f(x, y, z, dx : dy : dz) = 0, \quad f_1(x_1, y_1, z_1, dx_1 : dy_1 : dz_1) = 0,$$

von denen zum Beispiel die erste die Bedingung dafür ist, daß im Raume x_1, y_1, z_1 die beiden unendlich benachbarten Flächen:

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega(x + dx, y + dy, z + dz, x_1, y_1, z_1) = 0$$

einander berühren; ferner gehören zu diesen Mongeschen Gleichungen zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad F_1(x_1, y_1, z_1, p_1, q_1) = 0.$$

Wird nun eine beliebige Fläche von Integralkurven der Mongeschen Gleichung $f = 0$ gerade m-fach überdeckt, so wird eine Integralfläche der Gleichung $F = 0$ gerade $(m-1)$-fach überdeckt und eine der $m-1$ Scharen von Integralkurven zählt doppelt. Das System der ∞^2 Flächen, die im Raume x_1, y_1, z_1 den Punkten unserer Integralfläche entsprechen, besitzt daher $m-1$ Brennflächen, unter denen eine doppelt zählt.

Die Integralflächen von $F = 0$ sind diejenigen Flächen, die von den Flächen des Flächenkomplexes $\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$ oskuliert werden. Stellt man die Flächen des Komplexes durch drei Gleichungen:

$$u(x, y, z, p, q) = a, \quad v(x, y, z, p, q) = b, \quad w(x, y, z, p, q) = c$$

dar, so sind nach dem Früheren (vgl. S. 254, 274) alle Gleichungen von der Form: $\Omega(u, v, w) = 0$ intermediäre Integralgleichungen einer Monge-Ampèreschen Gleichung:

$$rt - s^2 + Lr + 2Ms + Nt + U = 0$$

und diese Gleichung hat eine singuläre intermediäre Integralgleichung, nämlich:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

{Ist $z = \omega(x, y, x_1, y_1, z_1)$, so findet man die eine der beiden Mongeschen Gleichungen, indem man x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 aus fünf der sechs Gleichungen:

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} z = \omega(x, y, x_1, y_1, z_1), \quad z' = \omega_x + y'\omega_y \\ \omega_{x_1} + p_1\omega_{z_1} = 0, \quad \omega_{y_1} + q_1\omega_{z_1} = 0 \\ \omega_{xx_1} + p_1\omega_{xz_1} + y'(\omega_{yx_1} + p_1\omega_{yz_1}) = 0 \\ \omega_{xy_1} + q_1\omega_{xz_1} + y'(\omega_{yy_1} + q_1\omega_{yz_1}) = 0 \end{cases}$$

als Funktionen von x, y, z, y' bestimmt und die gefundenen Werte in die sechste Gleichung: $z' = \omega_x + y'\omega_y$ einsetzt. Dabei werden x_1, y_1, z_1 solche Funktionen von y', daß:

$$\omega_{x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y'} + \omega_{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y'} + \omega_{z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y'} = 0$$

ist und infolgedessen:

$$\text{(F)} \quad \frac{\partial z_1}{\partial y'} = p_1\frac{\partial x_1}{\partial y'} + q_1\frac{\partial y_1}{\partial y'}.$$

Die Flächenelemente x, y, z, p, q, die zu der so gefundenen Mongeschen Gleichung gehören, erfüllen die Bedingung, die aus:

$$p + qy' = \omega_x + y'\omega_y$$

$$q = \omega_y + (\omega_{xx_1} + y'\omega_{yx_1})\frac{\partial x_1}{\partial y'} + (\omega_{xy_1} + y'\omega_{yy_1})\frac{\partial y_1}{\partial y'} + (\omega_{xz_1} + y'\omega_{yz_1})\frac{\partial z_1}{\partial y'}$$

durch Elimination von y' hervorgeht; aber diese beiden Gleichungen reduzieren sich vermöge (F) und (E) auf: $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, also kann man auch sagen, daß diese Flächenelemente die Gleichung erfüllen, die aus (E) und:

$$z' = p + qy', \quad p = \omega_x, \quad q = \omega_y$$

durch Elimination von $x_1, y_1, z_1, p_1, q_1, y', z'$ hervorgeht, oder kürzer die Gleichung, die aus:

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} z = \omega(x, y, x_1, y_1, z_1), \quad p = \omega_x, \quad q = \omega_y \\ \begin{vmatrix} \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ \omega_{xx_1} & \omega_{xy_1} & \omega_{xz_1} \\ \omega_{yx_1} & \omega_{yy_1} & \omega_{yz_1} \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

durch Elimination von x_1, y_1, z_1 erhalten wird. Demnach können die Flächenelemente der Mongeschen Gleichung auch definiert werden als diejenigen, für welche sich die Auflösungen der drei ersten Gleichungen (G) nach x_1, y_1, z_1 nicht mehr regulär verhalten.

Ist nun $z = \varphi(x, y)$ eine Integralfläche der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die aus (G) durch Elimination von x_1, y_1, z_1 entsteht, so kann man x_1, y_1, z_1 derart als Funktionen von x und y bestimmen, daß sich die Gleichungen (G) bei der Substitution:

$$z = \varphi, \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y$$

$$x_1 = \alpha(x, y), \quad y_1 = \beta(x, y), \quad z_1 = \gamma(x, y)$$

in Identitäten verwandeln. Dann ist also:

$$\omega_{x_1} dx_1 + \omega_{y_1} dy_1 + \omega_{z_1} dz_1 = 0$$

bei beliebigen dx und dy, und man erkennt, daß man wegen der letzten der Gleichungen (G) das Verhältnis $dx : dy$ immer so wählen kann, daß die beiden Gleichungen:

$$\omega_{xx_1} dx_1 + \omega_{xy_1} dy_1 + \omega_{xz_1} dz_1 = 0$$

$$\omega_{yx_1} dx_1 + \omega_{yy_1} dy_1 + \omega_{yz_1} dz_1 = 0$$

erfüllt sind. Mit andern Worten: Die Fläche $\mathfrak{z} = \varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ hat in dem Punkte x, y, z mit der Komplexfläche:

$$\mathfrak{z} = \omega(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y))$$

die beiden unendlich benachbarten Flächenelemente: x, y, z, p, q und $x + dx, \cdots, q + dq$ gemein, wo natürlich dem Verhältnisse $dx : dy$ der eben besprochene Wert zu erteilen ist. In diesem Sinne ist mithin hier das Wort oskulieren zu verstehen.

Noch ist zu bemerken, daß unter Umständen bei besonderer Beschaffenheit der Gleichung: $z = \omega(x, y, x_1, y_1, z_1)$ gar keine Mongesche Gleichung auftritt, wie schon das Beispiel: $z = x_1 x + y_1 y + z_1$ zeigt.}

§ 6.

Die beiden Mongeschen Gleichungen, die zu der in § 2 besprochenen Berührungstransformation gehören.

Ist eine Berührungstransformation durch zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

definiert, so tritt, wie wir gesehen haben, in jedem der beiden Räume x, y, z und x_1, y_1, z_1 eine Mongesche Gleichung auf. Es ist nun nicht ausgeschlossen, daß die eine dieser beiden Mongeschen Gleichungen eine Pfaffsche ist, aber es läßt sich nachweisen, daß, sobald die eine eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung ist, die andere keine Pfaffsche Gleichung sein kann.

Um das zu zeigen, denken wir uns in dem Raume X, Y, Z eine Schar von ∞^2 Flächen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0$$

gegeben und setzen voraus, daß vermöge $\omega = 0$ keine Relation von der Form:

$$\alpha(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial X} + \beta(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial Y} + \gamma(X, Y, Z)\frac{\partial \omega}{\partial Z} = 0$$

besteht oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß die ∞^2 Flächen keiner linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\alpha(X, Y, Z)\frac{\partial Z}{\partial X} + \beta(X, Y, Z)\frac{\partial Z}{\partial Y} - \gamma(X, Y, Z) = 0$$

genügen, daß sie also nicht von ∞^2 Kurven erzeugt sind. Die ∞^2 Flächen der Schar, die durch einen Punkt X, Y, Z gehen, bestimmen dann einen wirklichen Elementarkegel und die Flächen erfüllen eine nicht lineare partielle Differentialgleichung:

$$F\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat somit nicht bloß ∞^3 charakteristische Streifen, sondern auch ∞^3 charakteristische Kurven, die durch die beiden Gleichungen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0, \quad \omega_x + p\,\omega_y = 0$$

bestimmt sind und die Integralkurven einer nicht linearen Mongeschen Gleichung:

$$f(X, Y, Z, dx : dy : dz) = 0$$

sind. Mit andern Worten:

Liegt eine Gleichung:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0$$

vor, vermöge deren keine Relation von der Form:

$$\alpha(X, Y, Z)\,\omega_x + \beta(X, Y, Z)\,\omega_y + \gamma(X, Y, Z)\,\omega_z = 0$$

besteht, so ergibt die Elimination von x, y, p aus den beiden Gleichungen:

$$\omega(x, y, X, Y, Z) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y \equiv \bar{\omega}(x, y, p, X, Y, Z) = 0$$

und den durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen:

$$\omega_X dX + \omega_Y dY + \omega_Z dZ = 0, \quad \bar{\omega}_X dX + \bar{\omega}_Y dY + \bar{\omega}_Z dZ = 0$$

stets eine nicht lineare Mongesche Gleichung:

$$f(X, Y, Z, dX, dY, dZ) = 0.$$

Dieses analytische Resultat läßt sich nun aber anders geometrisch deuten:

Stellt die Gleichung:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0$$

in der Ebene ∞^3 verschiedene Kurven dar, das heißt, gibt es keine drei Funktionen α, β, γ von a, b, c allein derart, daß vermöge $\omega = 0$ die Relation:

$$\alpha(a, b, c)\,\omega_a + \beta(a, b, c)\,\omega_b + \gamma(a, b, c)\,\omega_c = 0$$

besteht, so findet die Bedingung für die Berührung zwischen zwei unendlich benachbarten Kurven der Schar $\omega = 0$ ihren analytischen Ausdruck durch Elimination von x, y, p zwischen den vier Gleichungen:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y \equiv \bar{\omega}(x, y, p, a, b, c) = 0$$
$$\omega_a da + \omega_b db + \omega_c dc = 0, \quad \bar{\omega}_a da + \bar{\omega}_b db + \bar{\omega}_c dc = 0$$

und diese Elimination führt auf eine einzige und zwar auf eine nicht lineare Mongesche Gleichung:

$$f(a, b, c, da : db : dc) = 0.$$

Beachtet man nun, daß die Pfaffsche Gleichung: $dy - p\,dx = 0$ als Normalform für jede nicht integrable Pfaffsche Gleichung:

$$\varphi(x, y, z)\,dx + \chi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz = 0$$

aufgefaßt werden kann und daß mithin jede Schar von ∞^3 Integralkurven einer solchen nicht integrablen Pfaffschen Gleichung auf die Normalform:

$$\omega(x, y, a, b, c) = 0, \quad \omega_x + p\omega_y = 0$$

gebracht werden kann, so erhält man unmittelbar den

Satz 30. *Liegt in den Veränderlichen x, y, z eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung:*

$$\varphi(x, y, z)\,dx + \chi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz = 0$$

vor und wird eine beliebige Schar von ∞^3 Integralkurven dieser Gleichung durch die beiden Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, X, Y, Z) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, X, Y, Z) = 0$$

mit den drei wesentlichen Parametern X, Y, Z dargestellt, so findet die Bedingung des Schneidens zweier unendlich benachbarter Kurven X, Y, Z und $X + dX, Y + dY, Z + dZ$ ihren Ausdruck in einer Mongeschen Gleichung:

$$f(X, Y, Z, dX : dY : dZ) = 0,$$

die nicht linear ist.

Wird daher unter den Voraussetzungen dieses Satzes zwischen den beiden Räumen x, y, z und X, Y, Z eine Berührungstransformation durch die beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ bestimmt, so besteht der Kurvenkomplex im Raume X, Y, Z aus den ∞^3 Charakteristiken der nicht linearen partiellen Differentialgleichung:

$$F\left(X, Y, Z, \frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}\right) = 0,$$

die zu der Mongeschen Gleichung $f = 0$ gehört.

In diesem Falle sind fortwährend die Linienelemente der Mongeschen Gleichung $f = 0$ innerhalb eines passend gewählten Bereiches ein-eindeutig auf die Linienelemente der Pfaffschen Gleichung: $\varphi\, dx + \chi\, dy + \psi\, dz = 0$ bezogen. Da aber die Pfaffsche Gleichung nur ∞^3 Flächenelemente enthält, die Mongesche Gleichung dagegen deren ∞^4, so ist die Beziehung zwischen den ∞^4 Flächenelementen der Mongeschen Gleichung und den ∞^3 Flächenelementen der Pfaffschen Gleichung ein-unendlichdeutig. Die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $F = 0$ gehen bei der Berührungstransformation über in Flächenelementstreifen der Pfaffschen Gleichung.

Sind daher zwei Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

so beschaffen, daß die zugehörigen Mongeschen Gleichungen beide linear, also beide Pfaffsche Gleichungen sind, so sind diese Pfaffschen Gleichungen beide integrabel.*) Dann tritt in jedem der beiden Räume ein Büschel von ∞^1 Flächen auf:

$$u(x, y, z) = a, \quad u_1(x_1, y_1, z_1) = a_1$$

und die beiden Pfaffschen Gleichungen haben die Form:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\, dx + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial z}\, dz = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\, dy_1 + \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\, dz_1 = 0.$$

Es ist ferner möglich das Gleichungensystem: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ auf die Form:

$$A(x, y, z) - B(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad W(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

zu bringen. Die Flächen der beiden Büschel sind innerhalb gewisser Be-

*) In dieser Fassung habe ich den Satz ohne Beweis in den Math. Ann. Bd. 5, S. 163 mitgeteilt.

reiche ein-eindeutig aufeinander bezogen. Jede Fläche des einen Büschels enthält ∞^3 Linienelemente, die innerhalb gewisser Bereiche ein-eindeutig auf die ∞^3 Linienelemente der zugeordneten Fläche des zweiten Büschels abgebildet werden, und zwar wird die Beziehung zwischen den Linienelementen dieser beiden zweidimensionalen Gebiete durch eine Berührungstransformation des Raumes von zwei Dimensionen vermittelt.

Als Beispiel mögen die beiden Gleichungen:

$$z_1 = z - xx_1, \quad y_1 = y$$

dienen, die zu der Berührungstransformation:

$$x_1 = p, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z - xp, \quad p_1 = -x, \quad q_1 = y$$

führen. Die beiden Pfaffschen Gleichungen sind hier: $dy = 0$ und $dy_1 = 0$ und die Berührungstransformation bestimmt auf jeder Ebene $y = \text{const}$ eine gewöhnliche Dualität.

Hiermit ist übrigens ein Schritt getan zur Bestimmung der ein-eindeutigen algebraischen Berührungstransformationen des Raumes.

Soll eine solche Berührungstransformation durch zwei algebraische Gleichungen:

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

bestimmt sein, so muß jede Fläche jedes der beiden Räume einfach von Integralkurven der betreffenden Mongeschen Gleichung überdeckt sein, daher müssen beide Mongesche Gleichungen Pfaffsche und deshalb beide integrabel sein. Demnach kann man eine der beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ in der Form:

$$\varphi(x, y, z) - \psi(x_1, y_1, z_1) = 0$$

annehmen. Da jede der ∞^1 Flächen: $\varphi = a$ unendlich viele algebraische Kurven enthält, so muß sie wohl selbst algebraisch sein. Hiermit wird es wohl möglich sein, die Frage auf die entsprechende Frage in der Ebene zurückzuführen. —

Ferner sei noch auf eine Tatsache hingewiesen, die sich aus den angestellten Betrachtungen ergibt: Ist eine nicht lineare Mongesche Gleichung vorgelegt, so bilden die ∞^3 charakteristischen Kurven der zugehörigen nicht linearen partiellen Differentialgleichung eine Kurvenschar, bei der die Bedingung für das Schneiden zweier unendlich benachbarter Kurven der Schar durch eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung dargestellt wird. Die Gleichungen dieser Kurvenschar bestimmen daher eine Berührungstransformation des Raumes und es wird zugleich zwischen den Integralkurven der Mongeschen und den Integralkurven der Pfaffschen Gleichung ein Entsprechen hergestellt, bei dem zwei einander berührenden Kurven der einen Art zwei einander berührende Kurven der andern Art entsprechen, während die Beziehung des Schneidens nicht erhalten bleibt.

Dagegen kann zwischen den Integralkurven von zwei nicht integrablen Pfaffschen Gleichungen ein Entsprechen dieser Art nicht hergestellt werden, sondern jedes Entsprechen zwischen den Integralkurven zweier solcher Gleichungen, bei dem Berührung erhalten bleibt, wird notwendig durch eine Punkttransformation des Raumes vermittelt.

Wir haben erkannt, daß bei einem Gleichungensysteme:

$$\Omega_1(x, y\, z, x_1, y_1, z_1) = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

drei Fälle wirklich eintreten können: *Erstens:* die zwei zugehörigen Mongeschen Gleichungen sind beide nicht linear, *zweitens:* die eine ist nicht linear, die andere eine nicht integrable Pfaffsche Gleichung, *drittens:* beide sind integrable Pfaffsche Gleichungen.

Es erübrigt noch zu bemerken, daß mit diesen drei Fällen sämtliche Möglichkeiten erschöpft sind. Ist nämlich eine der beiden Mongeschen Gleichungen, etwa die in x, y, z, linear und integrabel — der Fall der Nichtintegrabilität ist ja schon erledigt — und ist $u(x, y, z) = \text{const.}$ ihr Integral, so kann man eine der beiden Gleichungen: $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ durch eine von der Form: $u(x, y, z) - v(x_1, y_1, z_1) = 0$ ersetzen, und die zweite Mongesche Gleichung hat daher augenscheinlich die Form:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial v}{\partial z_1} dz_1 = 0,$$

ist also ebenfalls integrabel. Zu den drei angegebenen Fällen kann demnach wirklich kein anderer hinzukommen.

§ 7.

Gibt es Oskulationstransformationen der Kurven einer Ebene?

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen führen leicht zur Beantwortung einer Frage, die ich schon im Jahre 1874 aufgeworfen habe (Math. Ann. Bd. 8, S. 223 Anm.). Meine damals ausgesprochene Vermutung, daß diese Frage mit Nein zu beantworten sei, hat **Bäcklund**, der sich unabhängig von mir die Frage vorgelegt hatte, bald darauf bestätigt (Math. Ann. Bd. 9).

Es handelt sich um die Frage, ob es solche Transformationen der ebenen Kurven gibt, bei denen erst Berührung zweiter Ordnung eine invariante Beziehung ist. Eine solche Oskulationstransformation müßte die Form haben:

$$(18) \qquad \begin{cases} x_1 = X(x, y, y', y'') \\ y_1 = Y(x, y, y', y'') \\ y_1' = P(x, y, y', y'') \\ y_1'' = Q(x, y, y', y'') \end{cases}$$

und müßte Kurven im allgemeinen in Kurven verwandeln, präziser gesagt, sie müßte das System der beiden Pfaffschen Gleichungen:

$$dy - y'dx = 0, \quad dy' - y''dx = 0$$

invariant lassen, so daß also vermöge (18) Gleichungen von der Form:

$$dy_1 - y_1'dx_1 = \alpha(dy - y'dx) + \beta(dy' - y''dx)$$
$$dy_1' - y_1''dx_1 = \gamma(dy - y'dx) + \delta(dy' - y''dx)$$

bestänđen, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Funktionen von x, y, y', y'' sind.

Deuten wir x, y, y' und x_1, y_1, y_1' als Punktkoordinaten in zwei verschiedenen Räumen, so erscheinen alle Kurven der x, y-Ebene im Raume x, y, y' als Integralkurven der Pfaffschen Gleichung: $dy - y'dx = 0$ und die Kurven der x_1, y_1-Ebene im Raume x_1, y_1, y_1' als Integralkurven der Pfaffschen Gleichung: $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$. Die Gleichungen (18) vermitteln daher ein Entsprechen zwischen den Integralkurven der beiden nicht integrablen Pfaffschen Gleichungen: $dy - y'dx = 0$ und $dy_1 - y_1'dx_1 = 0$ und zwar derart, daß solchen Integralkurven, die einander berühren, wieder einander berührende Integralkurven entsprechen. Würde nun dieses Entsprechen nicht durch eine Punkttransformation zwischen den beiden Räumen x, y, y' und x_1, y_1, y_1' vermittelt, so müßten jedesmal gewissen ∞^3 Integralkurven der einen Pfaffschen Gleichung die Punkte des andern Raumes entsprechen. Da aber unsere beiden Pfaffschen Gleichungen nicht integrabel sind, so ist das ausgeschlossen, die Gleichungen (18) definieren daher eine Punkttransformation zwischen den beiden Räumen x, y, y' und x_1, y_1, y_1', das heißt X, Y, P sind von y'' frei und wir haben in (18) eine gewöhnliche Berührungstransformation der Ebene.

Es gibt also keine Oskulationstransformation der ebenen Kurven.

Inhalt.

Seite

Kapitel I. Die Berührungstransformationen des Raumes und ihre Bestimmung . . . . . 195—240

Kapitel II. Einführung in die Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen . . . . . 241—289

Kapitel III. Die Berührungstransformationen des Raumes, die durch zwei Gleichungen zwischen x, y, z, x_1, y_1, z_1 definiert werden. . . . . 289—313

Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie.

Von

Friedrich Schur in Karlsruhe.

Die Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, die Herr Hilbert im 57. Bande dieser Annalen S. 137ff. gegeben hat und zwar ohne Benützung des Raumes und eines Stetigkeitsaxioms, wird demjenigen Leser, welcher mit der projektiven Grundlegung der nichteuklidischen Geometrie weniger vertraut ist, etwas fremdartig erscheinen; nur der spätere Erfolg wird es ihm verständlich machen, warum Herr Hilbert das Rechnen mit Enden gerade so und nicht anders definiert. Es mag daher nicht ohne Interesse sein, zu zeigen, wie die Hilbertsche Begründung sich auch im engsten Anschlusse an die Begründung der projektiven Geometrie durchführen läßt, die man v. Staudt, Cayley und F. Klein verdankt.

Hilbert ersetzt das euklidische Parallelenaxiom durch das folgende *nichteuklidische:*

„Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet."

Nennt man dann a_1 resp. a_2 *parallel* zu den Halbgeraden b_1 resp. b_2, in die irgend ein Punkt B die Gerade b teilt, so zwar, daß a_1 und b_1 sowohl als a_2 und b_2 je auf derselben Seite der Geraden AB liegen, so wird zunächst auf die bekannten Sätze über parallele Geraden der nichteuklidischen Geometrie hingewiesen, und von allen Halbgeraden, die einander parallel sind, die Definition aufgestellt, daß sie dasselbe *Ende* bestimmen. Das nichteuklidische Parallelenaxiom sagt hiernach aus, daß jede Gerade zwei Enden besitzt, und daß jedes Ende mit einem eigentlichen Punkte durch eine und nur eine Gerade verbunden werden kann. Nunmehr kommt alles darauf an, zu zeigen, daß auch *irgend zwei Enden*

eine eigentliche Gerade bestimmen. Der Beweis dieses Satzes kann nach Hilbert zurückgeführt werden auf den anderen Satz:

„Wenn irgend zwei Geraden a, b vorgelegt sind, die sich weder schneiden noch zueinander parallel sind, so gibt es stets eine Gerade, welche auf beiden zugleich senkrecht steht."

Gerade in dem Beweise dieses Satzes ohne Benützung des Raumes oder eines Stetigkeitsaxioms liegt das wesentlich Neue in der Hilbertschen Abhandlung. Ist aber mit seiner Hilfe die Existenz der Verbindungsgeraden irgend zweier Enden nachgewiesen, so befindet man sich wieder auf bekanntem und wohl vorbereitetem Boden. Man wird dann zuerst den Satz*) beweisen.

Jedes Dreiend $\alpha\beta\gamma$ ist jedem andern Dreiend $\alpha'\beta'\gamma'$ entweder kongruent oder symmetrisch.

Zum Beweise dieses Satzes weisen wir zunächst darauf hin, daß *zwei parallele Geraden $A\alpha$ und $B\alpha$ stets durch eine Spiegelung ineinander übergeführt werden können.* Da nämlich die Halbierungslinie des Winkels $BA\alpha$ (Fig. 1) die $B\alpha$ trifft, so wird sie auch von der Halbierungslinie des Winkels $AB\alpha$ in einem Punkte C getroffen, der von AB ebenso weit absteht wie von $A\alpha$ und $B\alpha$. Sind daher $CP = CQ$ die Lote auf $A\alpha$ und $B\alpha$, so ist die Senkrechte von C auf PQ die gesuchte Achse der Spiegelung.

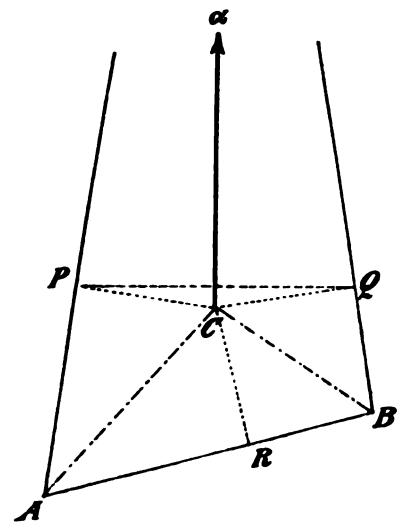


Fig. 1.

Ist nunmehr a die Achse der Spiegelung, die $\beta\alpha$ mit $\gamma\alpha$ vertauscht, so geht bei ihr $\beta\gamma$ in sich über, so daß a die Mitte A zwischen je zwei Punkten von $\beta\gamma$ enthalten muß, die durch die Spiegelung vertauscht werden (Fig. 2). Ebenso werden die Achsen b resp. c der Spiegelungen, die $\alpha\beta$ mit $\gamma\beta$ und $\alpha\gamma$ mit $\beta\gamma$ resp. vertauschen, die $\alpha\gamma$ und $\alpha\beta$ resp. in je einem Punkte B und C resp. treffen, und es ist unmittelbar klar, daß durch die Spiegelungen an a, b, c resp. die Punkte der Paare B, C; C, A; A, B resp. vertauscht werden, während A, B, C resp. fest bleiben. Die drei Achsen schneiden sich daher in dem Mittelpunkte M des gleichseitigen Dreiecks ABC und teilen den vollen

*) Vergl. hierzu Taurinus in Engel, Stäckel, Die Theorie der Parallellinien. S. 278 und Gauß' Werke, Bd. VIII, S. 221 und 226/7.

Winkel um M in drei einander gleiche Teile. Eine solche Teilung kann aber vom Schenkel a aus nur auf *eine* Art geschehen. Denn wäre auch $\sphericalangle(a, b_0) = \sphericalangle(b_0, c_0) = \sphericalangle(c_0, a)$ und etwa $\sphericalangle(a, b_0) > \sphericalangle(a, b)$, so wäre auch $\sphericalangle(a, c_0) > (a, c)$, also $\sphericalangle(b_0, c_0) < (b, c)$, folglich auch $\sphericalangle(a, b_0) < (a, b)$ gegen die Voraussetzung.

Sind daher $M'\alpha' = a'$, $M'\beta' = b'$, $M'\gamma' = c'$ die entsprechenden Spiegelachsen für irgend ein anderes Dreiend $\alpha'\beta'\gamma'$, und gehen a', b', c' bei der Spiegelung, die M mit M' vertauscht, in a_1, b_1, c_1 über, so müssen bei einer Spiegelung, die a_1 in a überführt, b_1 und c_1 entweder in b und c oder in c und b resp. übergehen, so daß man in der Tat durch die Aufeinanderfolge von höchstens drei Spiegelungen das Dreiend $\alpha'\beta'\gamma'$ in das Dreiend $\alpha\beta\gamma$ verwandeln kann.

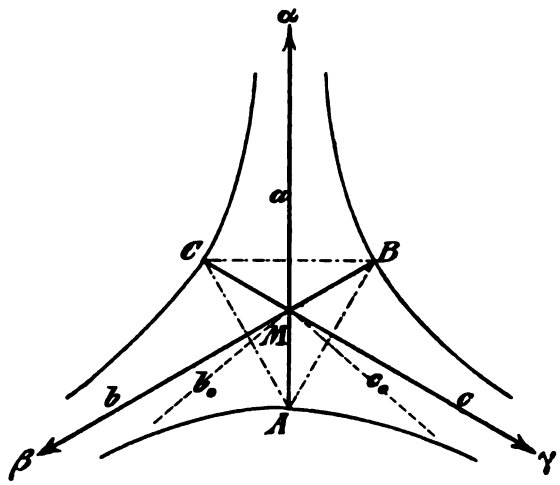


Fig. 2.

Durch wieviel und was für Spiegelungen auch diese Überführung des Dreiends $\alpha'\beta'\gamma'$ in das Dreiend $\alpha\beta\gamma$ auch geschehen mag, so muß doch jedem mit $\alpha'\beta'\gamma'$ verbundenen Punkte P' stets ein und derselbe mit $\alpha\beta\gamma$ verbundene Punkt P entsprechen. Denn sonst wäre es möglich, durch eine Aufeinanderfolge von Spiegelungen zwar das Dreiend $\alpha\beta\gamma$, nicht aber zugleich jeden andern Punkt P in sich überzuführen. Das ist aber ausgeschlossen, weil jedenfalls jeder Punkt einer der drei Seiten des Dreiends hierbei sich selbst entsprechen muß. Denn entspräche einem Punkte Q von $\alpha\beta$ der von ihm verschiedene Punkt Q_0, so wären die Geraden $Q\gamma$ und $Q_0\gamma$ parallel, obwohl $\sphericalangle\, \alpha Q\gamma = \sphericalangle\, \alpha Q_0\gamma$ ist. Es müssen daher auch die Lote von irgend einem Punkte P auf die Seiten des Dreiends sich selbst entsprechen, also auch P selbst.

Bei der Überführung von $\alpha'\beta'\gamma'$ in $\alpha\beta\gamma$ ist also auch jedem vierten Ende δ' eindeutig ein viertes Ende δ zugewiesen. Nennen wir daher eine Reihe von Enden $\alpha\beta\gamma\delta\cdots$ einer anderen Reihe von Enden $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\cdots$ *projektiv* oder:

$$\alpha\beta\gamma\delta\cdots \barwedge \alpha'\beta'\gamma'\delta'\cdots,$$

wenn die Enden der ersten Reihe durch eine Aufeinanderfolge von Spiegelungen in die entsprechenden Enden der zweiten Reihe übergeführt

werden können, so ist hiernach der Fundamentalsatz der Geometrie der Enden bewiesen.

Eine Projektivität zwischen zwei Reihen von Enden ist eindeutig bestimmt, wenn drei Enden der einen Reihe drei Enden der anderen als entsprechend zugewiesen sind.

Nunmehr kann das Rechnen mit Enden systematisch in bekannter Weise begründet werden, z. B. so, wie ich es in meiner Abhandlung „Über die Grundlagen der Geometrie" (diese Annalen Bd. 55, p. 281ff.) dargestellt habe, wobei man genau auf die von Hilbert angegebenen Regeln kommt. Nur ist zu bemerken, daß die Sätze über die von mir dort Prospektivitäten genannten Projektivitäten auch leicht auf dem Gebilde der Enden selbst begründet werden können.

Die einfachste Projektivität ist ja die Spiegelung selbst oder die Involution, aus der die Beziehung $(\alpha\beta\gamma\delta) \curlywedge (\beta\alpha\delta\gamma)$ folgt. Sie ist entweder die Spiegelung an einer Achse mit zwei sich selbst entsprechenden Elementen oder die Spiegelung an einem Zentrum ohne solche. Unter den Projektivitäten, die aus *zwei* Spiegelungen entstehen, heben wir diejenigen hervor, für welche die spiegelnden Achsen ein Ende ω gemein haben; wir wollen sie *Schiebungen in Beziehung auf das Ende* ω nennen. Bei einer solchen Schiebung kann *nur* das Element ω sich selbst entsprechen. Denn wäre η ein zweites sich selbst entsprechendes Ende und η' sein Bild in der ersten Spiegelung, so müßte umgekehrt η das Bild von η' in der zweiten Spiegelung sein, diese beiden Spiegelungen wären also, da sie auch ω fest lassen sollen, identisch, die Schiebung daher die Identität. Die Schiebungen sind also Prospektivitäten (cfr. a. a. O. p. 282), und es ist auch umgekehrt leicht zu sehen, daß jede Projektivität mit nur einem sich selbst entsprechenden Elemente ω eine Schiebung ist. Ist nämlich eine solche Projektivität durch Zuordnung der Enden $\omega\alpha_0\alpha_1$ zu den Enden $\omega\alpha_1\alpha_2$ bestimmt, so entsteht sie durch Aufeinanderfolge der Spiegelungen, deren erste α_1 fest läßt und α_0 mit α_2 vertauscht und deren zweite α_1 mit α_2 sowie ω mit ω' vertauscht, wenn ω' das Bild von ω in der ersten Spiegelung ist. Da aber bei der Aufeinanderfolge dieser beiden Spiegelungen auch ω' fest bleiben würde, so muß ω' mit ω zusammenfallen, und unsere Projektivität mit dem einzigen sich selbst entsprechenden Elemente ist in der Tat eine Schiebung. Zugleich sieht man, daß α_2 das Spiegelbild von α_0 für die Achse $\omega\alpha_1$ ist, daß also eine Schiebung in bezug auf das Ende ω bestimmt ist, falls einem Punkte α_0 der entsprechende α_1 zugeordnet ist. Daraus folgt, daß man die Schiebung auf mannigfaltige Art aus zwei Spiegelungen an Achsen durch ω zusammensetzen kann, und zwar so, daß die erste Achse eine beliebige Gerade durch ω ist. Denn ist hierbei β_1 das Bild von α_0, so gibt es ja stets eine Spiegelung, die $\beta_1\omega$ mit $\alpha_1\omega$ ver-

tauscht. Ist daher β_0 das Bild von α_1 in der ersten Spiegelung, so geht β_0 durch die Schiebung in β_1 über, und wir erhalten den Satz: Verwandelt eine Schiebung die Enden $\omega\alpha_0\beta_0$ in $\omega\alpha_1\beta_1$, so gehen durch eine Spiegelung $\omega\alpha_0\beta_0$ in $\omega\beta_1\alpha_1$ über. Endlich ergibt sich der Satz, daß die Aufeinanderfolge zweier Schiebungen in Beziehung auf das Ende ω eine ebensolche ist, aus der Bemerkung, daß man die beiden Schiebungen durch die Aufeinanderfolge von vier Spiegelungen ersetzen kann, von denen die zweite mit der dritten identisch ist.

Aus diesen Sätzen kann genau wie a. a. O. das Rechnen mit Enden entwickelt werden, und man sieht leicht, wie hieraus die Hilbertschen Definitionen folgen. Für die Addition ist das ja evident. Was die Multiplikation betrifft, so ist der von mir nach v. Staudt gegebenen Definition zufolge das Ende γ gleich dem Produkte der Enden α und β, wenn $(\infty 0\,1\,\beta) \barwedge (\infty 0\,\alpha\gamma)$, d. h. wenn durch die Aufeinanderfolge von Spiegelungen, bei denen die Gerade $\overline{\infty 0}$ in sich übergeht, die Enden $1, \beta$ in α, γ, folglich auch die Strecke zwischen den Fußpunkten der Lote von 1 und β auf die Gerade $\overline{\infty 0}$ in die entsprechende Strecke für die Lote von α und γ übergehen. Das ist aber genau die Hilbertsche Definition der Multiplikation.

Will man von der projektiven Geometrie der Enden zur projektiven Geometrie der ganzen Ebene übergehen, so kann man entweder mit Hilbert direkt durch die Enden Koordinaten einführen, in denen jede Gerade durch eine lineare Gleichung dargestellt ist, oder man kann zuerst die Projektivitäten zwischen einer Geraden und einem Strahlenbüschel durch diejenigen auf dem Gebilde der Enden definieren und dann beweisen, daß jede Perspektivität eine Projektivität ist. So kann man z. B. jedem Punkte P einer Geraden $\overline{\infty 0}$ das Ende x zuordnen, das das Spiegelbild des Endes 1 für die Senkrechte in P auf $\overline{\infty 0}$ ist, so daß, falls ξ und $-\xi$ die Enden dieser Senkrechten sind, $x = \xi^2$ ist. Ebenso kann man jedem Strahle durch einen Punkt C das Spiegelbild y des Endes 0 in Beziehung auf den Strahl zuordnen, so daß, wenn η und η' dessen Enden sind,

$$y = \frac{2\,\eta\eta'}{\eta + \eta'}$$

ist. Nunmehr definieren wir eine Projektivität als zwischen der Punktreihe auf $\overline{\infty 0}$ und dem Strahlenbüschel durch C bestehend, wenn eine solche zwischen den Enden x und y besteht, oder wenn x und y einer bilinearen Gleichung genügen. Dann ist leicht zu zeigen, daß *die Perspektivität zwischen der Punktreihe und dem Strahlenbüschel auch eine Projektivität ist.* Denn die Bedingungen, daß der Strahl $\overline{\eta\eta'}$ durch P resp. C geht, sprechen sich in den Gleichungen aus:

$$\xi^2 = \eta\eta' \quad \text{und} \quad \eta\eta' + a(\eta + \eta') + b = 0,$$

weil jede Spiegelung an einem Punkte sich durch eine symmetrische bilineare Gleichung zwischen jedem Ende und seinem Spiegelbilde ausdrückt. Es besteht daher in der Tat zwischen x und y die Gleichung:

$$xy + 2ax + by = 0.$$

Hiermit ist die Grundlage für die projektive Geometrie der Ebene gegeben, wenn man zuvor noch die sogenannten idealen Punkte und Geraden eingeführt hat. Diese werden hier am einfachsten dadurch definiert, daß man sagt: Alle zu einer Geraden senkrechten Geraden treffen sich in einem *idealen Punkte*, und alle idealen Punkte, die so zu den Geraden durch einen eigentlichen Punkt gehören, liegen auf einer *idealen Geraden*. Dann bestimmen zwei Punkte eine Gerade und zwei Geraden einen Punkt.

Wie und inwieweit hieraus die *Formeln der Metrik* ohne ein Stetigkeitsaxiom abgeleitet werden können, habe ich a. a. O. gezeigt. Es scheint mir daher nicht ganz verständlich, welche Ableitung Herr Hilbert im Auge hat, wenn er am Schlusse seiner Abhandlung sagt: „Auch sind dann die bekannten Formeln der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie ohne Schwierigkeit ableitbar." Denn alle mir sonst bekannten Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie — und nur diese können doch gemeint sein — und auch ihre Ableitungen enthalten die Exponentialfunktion, können also bei Vermeidung eines Stetigkeitsaxioms nicht in Betracht kommen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß es nicht ganz zutrifft, wenn Herr Hilbert in der Einleitung zu seiner Abhandlung sagt, daß die früheren Begründungen der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie wesentlich den Raum sowohl wie die Stetigkeit benützen. Die von mir in Bd. 51, S. 401 ff. und ebenso die später von Dehn in Bd. 53, S. 404 ff. dieser Annalen gegebene Begründung benützt zwar den Raum aber *kein Stetigkeitsaxiom*, dafür aber auch *nicht* das von Hilbert vorausgesetzte *nichteuklidische Parallelenaxiom*. Meine Begründung führte eben das von F. Klein aufgestellte Progamm, *alle Sätze abzuleiten, die von jeder Annahme über das Schneiden und Nicht-Schneiden der Geraden einer Ebene frei sind*, zum ersten Male ohne ein Stetigkeitsaxiom durch; und daß hierbei der Raum entbehrlich sei, ist durch die Hilbertsche Abhandlung nicht dargetan. In der Tat trägt das nichteuklidische Parallelenaxiom viel weiter sogar als das euklidische. Denn während weder bei meinen Voraussetzungen noch bei Annahme des euklidischen Parallelenaxioms etwas über das Schneiden der Geraden mit Kreisen ausgesagt werden kann*), folgt aus dem nichteuklidischen Parallelenaxiome unmittelbar der Satz: *Der Kreis schneidet jede Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkte kleiner ist als der Radius.* Man braucht, um dies einzusehen, nur den Kreis

*) Vergl. z. B. Veronese, Elementi di geometria p. 85.

durch eine zentrale Kollineation mit dem Mittelpunkte M des Kreises als Zentrum in das Gebilde der Enden zu verwandeln. Liegt dann der Fußpunkt F des Lotes von M auf eine Gerade g auf dem Radius durch MF, so ist das Bild von F ein eigentlicher Punkt, also auch das Bild von g eine eigentliche Gerade. Folglich enthält dies Bild von g zwei Enden, also auch g zwei Punkte des Kreises. Man sieht also, daß durch die Benutzung des Raumes keineswegs größere Voraussetzungen gemacht werden als durch die Postulierung von je zwei Parallelen durch einen Punkt zu einer Geraden.

Karlsruhe, im März 1904.

Schreber, Dr. K., die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 343 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

——— die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 3.60.

Schulze, Bruno, Generalmajor und Chef der Topographischen Abteilung der Landesaufnahme, Das militärische Aufnehmen, unter besonderer Berücksichtigung der Arbeiten der Königl. Preuß. Landesaufnahme nebst einigen Notizen über Photogrammetrie und über die topographischen Arbeiten Deutschland benachbarter Staaten. Nach den auf der Königl. Kriegsakademie gehaltenen Vorträgen bearbeitet. Mit 129 Figuren im Text. [XIII u. 305 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 8.—

Seliwanoff, Demetrius, Priv. Docent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 42 in den Text gedr. Fig. [XII u. 768 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 6.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 32 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 3.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 255 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 7.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 602 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Thaer, Prof. Dr. A., Bestimmung von Gestalt und Lage eines Kegelschnitts aus einer Gleichung zweiter Ordnung ohne Koordinaten-Transformation. Mit einer Tafel. [40 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.40.

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein**, Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 9.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Wienecke, Ernst, Lehrer in Berlin, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten z. Gebr. an allen Lehranst. Mit 59 Fig. i. Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 2.20.

Wölffing, Dr. Ernst, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 418 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 454 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 16.—

INHALT.

Seite

Luigi Cremona. Von M. Noether in Erlangen 1

Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. Par S. Bernstein à Paris. (Mit 5 Figuren im Text) . . . 20

Décomposition de la forme ternaire du troisième degré. Par K. Bes à Tilbourg (Hollande) 77

Zwei Anwendungen der Mengenlehre in der elementaren Geometrie. Von M. Dehn in Münster i. W. 84

Sur une intégrale définie. Par Niels Nielsen à Copenhague 89

Note sur les séries de fonctions bernoulliennes. Par Niels Nielsen à Copenhague 103

Über die Begründung der hyperbolischen Geometrie. Von H. Liebmann in Leipzig. (Mit 9 Figuren im Text) 110

Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II. Von A. Schoenflies in Königsberg i. Pr. 129

Über das Dirichletsche Prinzip. Von David Hilbert in Göttingen 161

Hamiltonsche Gruppen. Von Ernst Wendt in Bremen 187

Sophus Lie. Drei Kapitel aus dem unvollendeten zweiten Bande der Geometrie der Berührungstransformationen. Aus dem Nachlasse herausgegeben von Friedrich Engel in Greifswald 199

Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie. Von Friedrich Schur in Karlsruhe 314

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung den Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☛ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

Zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen.

Von

J. W. Lindeberg in Helsingfors.

1. Es sei 0 ein Punkt auf einer Lagrange'schen Kurve C, die dem Problem das Integral

$$(1) \qquad \int F(x, y, y')\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

zu einem Extremum zu machen, entspricht. Ferner sei 1 der zu 0 konjugierte Punkt auf C, 2 ein dritter Punkt dieser Kurve und C_{02} das zwischen den Punkten 0 und 2 fallende Stück derselben. Schließlich werde angenommen die Funktion $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ habe auf C_{02}, inklusive die Grenzen, ein festes Vorzeichen ohne zu verschwinden. Wenn der Punkt 2 zwischen 0 und 1 fällt, gibt dann bekanntlich der Bogen C_{02}, im Vergleich mit allen Kurven deren Endpunkte 0 und 2 sind, und die einer gewissen engeren Nachbarschaft desselben angehören, ein Extremum des Integrals (1). Wenn der Punkt 2 mit 1 zusammenfällt, gibt derselbe im allgemeinen nicht mehr ein Extremum und wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, so findet das Extremum niemals statt. Das Aufhören des Extremums in diesem letzten Falle wurde zuerst von Weierstraß mit Hilfe der Theorie der zweiten Variation streng nachgewiesen, und ganz neulich hat Kneser*) einen neuen Beweis dafür gegeben, der auch den Fall, wo der Punkt 2 mit 1 zusammenfällt, erledigt. Der Beweis von Kneser ist sehr einfach, erfordert aber daß von dem Punkte 1 ein Zweig der Enveloppe der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Lagrange'schen Kurven in der Richtung von 1 nach 0 ausgeht, und schließt somit den Fall aus, wo die Enveloppe in 1 einen Rückkehrpunkt hat und die beiden Zweige derselben die zu der Richtung von 1 nach 0 entgegengesetzte Richtung haben.

*) Kneser, Zur Variationsrechnung. Mathematische Annalen Bd. 50.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist zu zeigen wie man durch Verfolgung des von Kneser eingeschlagenen Weges die Frage ob und wann das Extremum aufhört ohne die zweite Variation in Betracht zu nehmen vollständig lösen kann. Aus dieser Untersuchung wird auch hervorgehen daß, obgleich ein Bogen von C der in 0 anfängt und über 1 hinausreicht niemals ein Extremum ergibt, doch verschiedene Fälle vorkommen können, wenn man auf die Möglichkeit Rücksicht nimmt, Punkte von C außerhalb C_{01} mit 0 vermittels Kurven zu verbinden, die wirklich ein Extremum ergeben.

Die Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde liegen, sind folgende:

1) Die Funktion $F(x, y, y')$ ist in der Umgebung jedes in Betracht kommenden Wertsystems von x, y und y' eine eindeutige reguläre analytische Funktion.

2) Die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ hat auf jedem in Frage kommenden Bogen von C ein konstantes Vorzeichen ohne zu verschwinden.

3) Jedes Stück von C, das in Betracht genommen wird, definiert y als eine eindeutige Funktion von x, deren Ableitung niemals unendlich wird.

Da es sich hauptsächlich um einen Beweis für das Aufhören des Extremums handeln wird, und das starke Extremum niemals eintreten kann ohne daß das schwache vorliegt, so werden wir nur diese letzte Art von Extremum berücksichtigen. Schließlich wollen wir, um die Redeweise abzukürzen, nur das Minimum in Betracht nehmen, und setzen also voraus, die Funktion $F_{y'y'}(x, y, y')$ sei immer positiv.

2. Es seien x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten der Punkte 0 und 1 $(x_0 < x_1)$, und $y = y(x, \lambda)$ die Gleichung der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Lagrange'schen Kurven. Hierbei nehmen wir an λ sei so gewählt, daß $\lambda = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, \lambda)$, und mit λ_0 bezeichnen wir den Wert von λ der der Kurve C entspricht. Die Funktion $y(x, \lambda)$ ist dann, auf Grund der über die Funktion $F(x, y, y')$ und ihre zweite Ableitung nach y' gemachten Voraussetzungen, in der Umgebung jedes Wertsystems $x_0 \leq x \leq x_1$, $\lambda = \lambda_0$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = 0; \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x_1, \lambda_0) = 0.$$

Die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ behält ferner im Intervalle $x_0 < x < x_1$ dasselbe Vorzeichen ohne zu verschwinden, und zwar wird sie, zufolge der über λ gemachten Voraussetzung, positiv. Hieraus folgt, daß die Größe $\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x}(x_1, \lambda_0)$, die nicht Null sein kann*), negativ ist.

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung 24.

Es sei noch $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x, \lambda)$ die erste Ableitung von $y(x, \lambda)$ nach λ, die für $x = x_1$, $\lambda = \lambda_0$ nicht verschwindet, und es werde gesetzt

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_1, \lambda_0) = M; \quad \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0) = N; \quad 2\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x}(x_1, \lambda_0) = -L^2.$$

Man hat dann

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) - y(x_1, \lambda_0) &= M(x - x_1) - L^2(x - x_1)(\lambda - \lambda_0) \\ &\quad + \frac{N}{n}(\lambda - \lambda_0)^n + R_1(x - x_1, \lambda - \lambda_0), \end{aligned} \tag{2}$$

wo $R_1(x - x_1, \lambda - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $x - x_1$ und $\lambda - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, wo die Glieder, die nur $x - x_1$ oder nur $\lambda - \lambda_0$ enthalten, von höherem Grade als resp. der ersten und der n^{ten} und die übrigen Glieder von höherem Grade als der zweiten sind. Die Reihenentwicklung von $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ in der Umgebung von $x = x_1, \lambda = \lambda_0$ fängt also mit den Gliedern $-L^2(x - x_1) + N(\lambda - \lambda_0)^{n-1}$ an, und die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 0$ gibt daher, nach $x - x_1$ aufgelöst, das Resultat

$$x - x_1 = \frac{N}{L^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_2(\lambda - \lambda_0), \tag{3}$$

wo $R_2(\lambda - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, die nur Glieder von höherer Ordnung als der $n - 1^{\text{ten}}$ enthält. Diese Gleichung stellt, zusammen mit (2), die Enveloppe der Kurvenschar $y = y(x, \lambda)$ dar. Wenn wir für $x - x_1$ den Ausdruck (3) substituieren, nimmt (2) die einfachere Form

$$y - y_1 = \frac{MN}{L^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_3(\lambda - \lambda_0), \tag{4}$$

wo $R_3(\lambda - \lambda_0)$ dieselbe Bedeutung hat wie $R_2(\lambda - \lambda_0)$, und die Enveloppe wird somit auch durch die zwei Gleichungen (3) und (4) repräsentiert.

Wir wenden uns zunächst zu einer Untersuchung der Gestalt der Enveloppe und des Verlaufes der Kurven $y = y(x, \lambda)$ in der Umgebung des Punktes 1. Hierbei unterscheiden wir die folgenden vier Fälle:

(a) n ist gerade,
(b) n ist ungerade und N positiv,
(c) n ist ungerade und N negativ,
(d) n ist unendlich.

Im Falle (a) kann man, da die Größe N nach ihrer Definition von Null verschieden ist, aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar schließen, daß die Enveloppe in 1 einen gewöhnlichen Punkt hat. Um zu untersuchen wie die Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ im Verhältnis zu der Enveloppe verlaufen, verfahren wir wie folgt.

Es sei λ' ein Wert von λ aus der Umgebung von λ_0, und mit x' werde die Abszisse des Punktes bezeichnet, wo die Kurve $y = y(x, \lambda')$ die Enveloppe berührt. Beachten wir, daß nach (3)

$$x' - x_1 = \frac{N}{L^2}(\lambda' - \lambda_0)^{n-1} + R_2(\lambda' - \lambda_0)$$

und bilden wir mit Hilfe der Gleichung (2) die Differenz $y(x', \lambda') - y(x', \lambda_0)$, so kommt

$$(5) \qquad y(x', \lambda') - y(x', \lambda_0) = \left(\frac{N}{n} - N\right)(\lambda' - \lambda_0)^n + R_4(\lambda' - \lambda_0),$$

wo $R_4(\lambda' - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $\lambda' - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, die nur Glieder von höherem Grade als der n^{ten} enthält. Die rechte Seite dieser Gleichung behält nun für jedes λ' aus der Umgebung von λ_0 ein konstantes Vorzeichen, das nur von dem Zeichen von N abhängt. Wenn beobachtet wird, daß $y(x', \lambda')$ die Ordinate des Punktes der Enveloppe ist, deren Abszisse x' ist, so folgt hieraus, daß die Kurve C in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit der Enveloppe vollständig entweder oberhalb oder unterhalb derselben fällt. Jedenfalls schneidet also die Kurve C die Enveloppe im Punkte 1 nicht. Was die zu C benachbarten Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ betrifft, so verlaufen sie offenbar in der Umgebung ihrer Berührungspunkte mit der Enveloppe ähnlich wie die Kurve C.

Es sei jetzt, immer unter der Voraussetzung (a), ε eine positive Konstante und T_ε die Gesamtheit der Bogen, die zu den Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ gehören, für welche $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, und die zwischen dem Punkte 0 und den Berührungspunkten dieser Kurven mit der Enveloppe fallen. Wir wollen zeigen, daß diese Gesamtheit, wenn ε hinreichend klein ist, ein gewisses Gebiet der Ebene vollständig aber einfach bedeckt.

Zunächst können wir offenbar zwei positive Größen ε_0 und ε_1 so feststellen, daß die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ im Gebiete $|x - x_0| < \varepsilon_0$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ nur für $x = x_0$, $\lambda = \lambda_0$ und im Gebiete $|x - x_1| < \varepsilon_1$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1$ nur für Wertsysteme von x und λ, die der Gleichung (3) genügen, Null wird. Da diese Ableitung eine in der Umgebung der Wertsysteme $x_0 \leq x \leq x_1$, $\lambda = \lambda_0$ stetige Funktion ihrer Argumente ist und $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ im Intervalle $x_0 + \varepsilon_0 < x \leq x_1 - \varepsilon_1$ nicht Null wird, so ist es ferner möglich eine positive Größe ε_2 so klein zu wählen, daß die genannte Ableitung im Gebiete $x_0 + \varepsilon_0 \leq x \leq x_1 - \varepsilon_1$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_2$ nicht verschwindet. Schließlich ist, da die Voraussetzung (a) unserer Betrachtung zu Grunde liegt, die Existenz einer solchen positiven Größe ε_3 gesichert, daß die durch die Gleichung (3) definierte Funktion x von λ im Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_3$

entweder beständig zunehmend oder beständig abnehmend ist. Wenn nun ε kleiner ist als die kleinste der Größen ε_0, ε_1, ε_2 und ε_3, so geht in folgender Weise hervor, daß die Gesamtheit T_ε ein gewisses Gebiet der Ebene genau einfach bedeckt.

Es seien λ' und λ'' $(\lambda' < \lambda'')$ zwei Werte von λ aus dem Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ und mit x' und x'' mögen die Abszissen der Punkte bezeichnet werden, wo die entsprechenden Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ die Enveloppe berühren. Aus den Feststellungen über ε folgt, daß die Kurven, für welche $\lambda' < \lambda < \lambda''$, die Enveloppe in Punkten berühren, deren Abszissen zwischen x' und x'' fallen, und weiter, daß, wenn ξ größer als x_0 aber kleiner als x' und x'' ist, die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\xi, \lambda)$ im Intervalle $\lambda' < \lambda < \lambda''$ wesentlich positiv ist. Die Werte der Größen $y(\xi, \lambda')$ und $y(\xi, \lambda'')$ können daher nicht gleich sein, und also können die Bogen der Schar T_ε, die zu den Werten λ' und λ'' von λ gehören, einander nicht schneiden. Da λ' und λ'' beliebige Werte von λ aus dem Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ sind, so folgt hieraus, daß keine zwei Bogen der Gesamtheit T_ε einander schneiden können.

Insbesondere schneiden die Teile der Kurven $y = y(x, \lambda_0 + \varepsilon)$ und $y = y(x, \lambda_0 - \varepsilon)$, die zwischen dem Punkte 0 und den Berührungspunkten derselben mit der Enveloppe fallen, weder einander noch den Bogen C_{01}. Wir bezeichnen das Gebiet der Ebene, das von diesen Kurvenstücken und der Enveloppe begrenzt wird, mit S_ε, und behaupten, daß durch jeden Punkt dieses Gebietes ein Bogen der Gesamtheit T_ε geht.

Wenn ξ, η ein Punkt dieses Gebietes ist, so schneidet die Gerade $x = \xi$ die Begrenzung desselben in zwei Punkten, von denen der eine immer auf eine der begrenzenden Lagrange'schen Kurven fällt, der zweite entweder auf die andere Lagrange'sche Kurve oder auf die Enveloppe. Im ersten Falle sind die Ordinaten der Schnittpunkte $y(\xi, \lambda_0 + \varepsilon)$ und $y(\xi, \lambda_0 - \varepsilon)$, und da η zwischen diesen beiden Werten liegt, so muß es, da die Funktion $y(\xi, \lambda)$ im Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ stetig ist, einen Wert von λ in diesem Intervalle geben, für welchen $y(\xi, \lambda) = \eta$. Da die entsprechende Kurve $y = y(x, \lambda)$ die Enveloppe in einem Punkte berührt, deren Abszisse größer als ξ ist, so liegt also der Punkt ξ, η auf der Strecke dieser Kurve, die zu der Gesamtheit T_ε gehört. Im zweiten Falle sei λ' der Wert von λ der zu der Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ gehört, die die Enveloppe in ihrem Schnittpunkte mit der Geraden $x = \xi$ berührt. Die Größe λ' liegt zwischen $\lambda_0 + \varepsilon$ und $\lambda_0 - \varepsilon$ und es gibt, je nachdem der zweite Schnittpunkt zu der Kurve $y = y(x, \lambda_0 + \varepsilon)$ oder $y = y(x, \lambda_0 - \varepsilon)$ gehört, entweder zwischen λ' und $\lambda_0 + \varepsilon$ oder zwischen λ' und $\lambda_0 - \varepsilon$ einen Wert von λ, für welchen $y(\xi, \lambda) = \eta$. Hieraus folgt, gleich wie oben, daß

auch in diesem Falle der betrachtete Punkt auf einem Bogen der Gesamtheit T_ε liegt, und unsere Behauptung ist hiermit bewiesen.

Da nun keine zwei Bogen der Schar T_ε einander schneiden können und durch jeden Punkt des Gebietes S_ε ein solcher Bogen geht, bedeckt diese Schar also vollständig aber einfach das genannte Gebiet.

Nach dem vorigen wissen wir, daß die Kurve C die Enveloppe im Punkte 1 nicht schneidet. Sie tritt also nach der Berührung mit derselben wieder in das Gebiet S_ε ein (Fig. 1), und wir können somit behaupten, daß jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels eines Bogens der Gesamtheit T_ε verbunden werden kann. Man kann auch bemerken, daß dieser Bogen sich unendlich nahe an C schließt, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt.

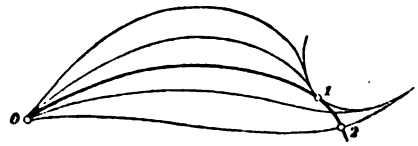


Fig. 1.

Im Falle (b) folgt aus den Gleichungen (3) und (4), daß die Enveloppe in 1 einen Rückkehrpunkt hat, wovon die beiden Zweige nach rechts ausgehen. Die Gleichung

$$(6)\qquad \begin{aligned} &y(x,\lambda)-y(x,\lambda_0)\\ &\quad=(\lambda-\lambda_0)\left\{-L^2(x-x_1)+\frac{N}{n}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+R_5(\lambda-\lambda_0,x-x_1)\right\}, \end{aligned}$$

die unmittelbar aus (2) folgt und wo $R_5(x-x_1, \lambda-\lambda_0)$ eine nach Potenzen von $x-x_1$ und $\lambda-\lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, in welcher die von $x-x_1$ freien Glieder von höherem Grade als n und die übrigen Glieder von höherem Grade als 1 sind, zeigt uns in diesem Falle zunächst, daß die Schnittpunkte der Geraden $x=x_1$ mit den Kurven $y=y(x,\lambda)$, $\lambda>\lambda_0$ oberhalb C liegen, während die Schnittpunkte dieser Geraden mit der andern Hälfte der Kurven $y=y(x,\lambda)$ sich unterhalb C befinden. Ferner folgt aus (5), daß eine Kurve der Schar $y=y(x,\lambda)$, die einem Werte λ' von λ entspricht, der größer als λ_0 ist, die Enveloppe unterhalb C berührt. Sie schneidet also erst die Kurve C außerhalb C_{01} und berührt nachher die Enveloppe (Fig. 2). Ebenso sieht man, daß, wenn $\lambda'<\lambda_0$, die entsprechende Kurve der Schar $y=y(x,\lambda)$ erst die Kurve C außerhalb C_{01} schneidet und nachher die Enveloppe oberhalb C berührt.

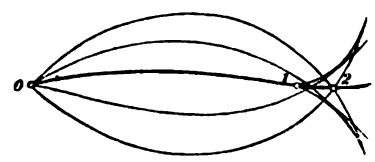


Fig. 2.

Bezeichnen wir jetzt mit $T_{+\varepsilon}$ die Gesamtheit der Bogen, die zu den Kurven der Schar $y=y(x,\lambda)$ für welche $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ gehören und vom Punkte 0 bis zu den Berührungspunkten dieser Kurven mit der Enve-

loppe gerechnet sind, so gelten offenbar für diese Gesamtheit, wenn ε hinreichend klein ist, alle im Falle (a) hinsichtlich der Gesamtheit T_ε gemachten Schlüsse. Ebenso gelten diese Schlüsse für die Gesamtheit $T_{-\varepsilon}$ die aus den Kurven $y = y(x, \lambda)$ für welche $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$ ähnlich wie $T_{+\varepsilon}$ aus der andern Hälfte derselben hervorgeht. Die beiden Scharen $T_{+\varepsilon}$ und $T_{-\varepsilon}$ bedecken also gewisse Gebiete der Ebene genau einfach, und es geht durch jeden Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, sowohl ein Bogen von $T_{+\varepsilon}$ als ein Bogen von $T_{-\varepsilon}$.

Wenn der Fall (c) vorliegt, so hat die Enveloppe wie im vorigen Falle in 1 einen Rückkehrpunkt, die beiden Zweige derselben gehen aber diesmal von diesem Punkte nach links aus. Um zu sehen, ob und wo die Kurven $y = y(x, \lambda)$ die Kurve C schneiden, lösen wir die Gleichung $y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0) = 0$ nach $x - x_1$ auf und erhalten dabei, wegen der Gleichung (6), ein Resultat von der Form

$$x - x_1 = \frac{N}{nL^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_6(\lambda - \lambda_0),$$

wo $R_6(\lambda - \lambda_0)$ nur Glieder in $\lambda - \lambda_0$ von höherem Grade als $n - 1$ enthält. Gehört nun λ einer gewissen Umgebung von λ_0, so sind, da n ungerade und N negativ ist, die zugehörigen Werte von x alle kleiner als x_1. Die entsprechenden Kurven $y = y(x, \lambda)$ schneiden also die Kurve C auf der Strecke C_{01} (Fig. 3), und wir können also behaupten, daß durch die Punkte von C, die außerhalb C_{01} in der Nähe von 1 liegen, keine Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ für welche $|\lambda - \lambda_0|$ klein ist gehen.

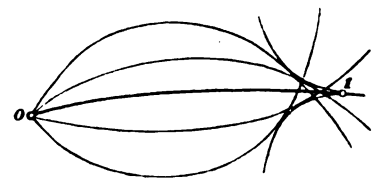


Fig. 3.

Im Falle (d) schließlich gehen alle Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ durch den Punkt 1. Die Punkte aus der Umgebung von 1, die auf C liegen, können also nicht mit 0 vermittels andern Kurven der betrachteten Schar als der Kurve C verbunden werden.

3. Es sei jetzt c ein Bogen einer Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$, der in seiner ganzen Ausdehnung zwischen 0 und dem Berührungspunkte dieser Kurve mit der Enveloppe fällt, und mit T werde eine Schar von Bogen der Kurven $y = y(x, \lambda)$ bezeichnet, die ein das Kurvenstück enthaltendes Gebiet S der Ebene genau einfach bedeckt. Ferner sei $\bar{c}$ eine im Gebiete S verlaufende reguläre Kurve mit denselben Endpunkten wie c und $p(x, y)$ die Funktion von x und y, die in jedem Punkte von S mit der Ableitung des durch denselben gehenden Bogens der Schar T übereinstimmt. Wenn I_c und $I_{\bar{c}}$ die Werte des Integrals (1) über respektive c und $\bar{c}$ erstreckt bedeuten, so hat man dann*)

*) Siehe z. B. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung 20.

$$(7)\quad I_{\bar{c}} - I_c = \int_{\bar{c}} \left\{ F(x,y,y') - F(x,y,p(x,y)) - (y' - p(x,y)) \frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,p(x,y)) \right\} dx$$
$$\left(y' = \frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

wo das Integral über die Kurve $\bar{c}$ zu erstrecken ist.

Wenn nun der Fall (a) vorliegt und T_s die Bogengesamtheit ist, die für die Bestimmung der Funktion $p(x, y)$ zu Grunde liegt, so gilt also diese Gleichung zunächst, wenn c ein Stück von C_{01} ist, das keinen der Endpunkte 0 und 1 enthält, und $\bar{c}$ eine reguläre Kurve mit denselben Endpunkten bedeutet, die vollständig im Innern des Gebietes S_s liegt. Die genannte Gleichung gilt aber noch, wie man ohne Schwierigkeit durch einen Grenzübergang einsieht, wenn man als c den Bogen C_{01} selbst nimmt und als $\bar{c}$ die Kurve, die von 0 bis zu einem Punkte 3 der Enveloppe mit dem diese Punkte verbindenden Bogen der Gesamtheit T_s, und von 3 bis 1 mit der Enveloppe selbst zusammenfällt. Die Tangente der Kurve $\bar{c}$ fällt aber dann in jedem Punkte mit der Tangente des durch denselben gehenden Bogens der Gesamtheit T_s zusammen, und die Größe y' erhält also in jedem Punkte von $\bar{c}$ denselben Wert wie $p(x, y)$. Hieraus folgt, daß der Integrand der Gleichung (7) in jedem Punkte verschwindet, und es kommt also

$$I_{\bar{c}} - I_c = 0.$$

Nun ist zu bemerken, daß die Enveloppe in der Umgebung von 1 keine Lagrange'sche Kurve ist; denn durch einen Punkt können nicht zwei Lagrange'sche Kurven mit derselben Tangente gehen, wenn die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ für den von dem Punkte und der Tangente definierten Wertsystem von x, y und y' von Null verschieden ist. Es gibt also in jeder beliebigen noch so eng festgestellten Nachbarschaft des Bogens 3 1 der Enveloppe die Punkte 3 und 1 verbindende Kurven, die dem Integrale (1) kleinere Werte erteilen als dieser Bogen. Hieraus folgt unmittelbar, daß es auch in jeder Nachbarschaft des Bogens C_{01} Kurven gibt, die das Integral (1) kleiner machen als dieser, und hiermit ist bewiesen, daß das Stück C_{01} von C im Falle (a) kein Minimum geben kann.

Ein Stück C_{02} von C, das über 1 hinausreicht, ergibt also auch nicht ein Minimum.

Im § 2 wurde erwähnt, daß jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels eines Bogens der Gesamtheit T_s verbunden werden kann, und daß sich dieser Bogen, den wir mit C'_{02} bezeichnen wollen, unendlich nahe an C schließt, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt. Da nun die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ für jedes, durch ein Element des Bogens C_{02} definierte Wertsystem von x, y und y', positiv ist, so

kann man also, indem man den Punkt 2 hinreichend nahe an 1 nimmt, bewirken, daß diese Ableitung auch für alle durch den Bogen C'_{02} definierte Wertsysteme dieser Größen positiv wird. Wenn dies der Fall ist, so gibt C'_{02} im Vergleich mit allen Kurven einer gewissen Nachbarschaft ein Minimum des Integrals (1), denn der Endpunkt dieses Bogens liegt vor dem zum Anfangspunkte konjugierten Punkte der entsprechenden Lagrange'schen Kurve.

Man kann bemerken, daß, wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, auch die Kurve C_{02} zu den Kurven gehört, im Vergleich mit welchen das Minimum stattfindet. Die Gleichung (7) gilt nämlich noch, wenn man C'_{02} als c und C_{02} als $\bar{c}$ nimmt. Im Intervalle von 0 bis 1 stimmen dann die Werte von y' und $p(x,y)$ überein, und der Integrand der Gleichung (7) verschwindet daher in jedem Punkte dieses Intervalles. Von 1 bis 2 werden dagegen die Werte von y' und $p(x,y)$ verschieden, denn die Bogen der Gesamtheit T_ε schneiden die Kurve C unter nicht verschwindendem Winkel. Beachtet man, daß dieser Winkel in 1 Null ist und sich beim Fortgange längs C stetig verändert, so kann hieraus geschlossen werden, daß, wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, die genannten Werte zu dem Bereiche gehören, wo der Integrand der Gleichung (7), zufolge der über $F_{y'y'}(x,y,y')$ gemachten Voraussetzung, positiv verbleibt ohne zu verschwinden. Man erhält also $I_{\bar{c}} - I_c > 0$, und hiermit ist die gemachte Behauptung bewiesen.

Im Falle (b) ergibt das Stück C_{01} von C noch ein Minimum. Die Gleichung (7) gilt nämlich dann noch, wenn man als c das Stück C_{01} von C nimmt und als $\bar{c}$ eine beliebige Kurve aus der Nachbarschaft von C_{01}, und der Integrand dieser Gleichung kann nicht längs einer solchen Kurve identisch verschwinden. Wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, kann man in folgender Weise zeigen, daß das Minimum nicht mehr stattfindet.

Es werde angenommen, daß der Punkt 2 so nahe an 1 liegt, daß derselbe mit 0 vermittels eines der Gesamtheit $T_{+\varepsilon}$ zugehörigen Bogens C'_{02} verbunden werden kann. Ist die Funktion $p(x,y)$ so bestimmt, daß sie der Bogenschar $T_{+\varepsilon}$ entspricht, so können wir dieses Bogenstück als c und das Stück C_{02} von C als $\bar{c}$ nehmen. Der Integrand der Gleichung (7) wird dann Null auf der Strecke von 0 bis 1. Wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, wird derselbe aber von 1 bis 2 positiv und von Null verschieden, denn die Bogen der Schar $T_{+\varepsilon}$ können nicht die Kurve C in ihren Schnittpunkten mit derselben berühren. Der Bogen C'_{02} gibt also dem Integrale (1) einen kleineren Wert als der Bogen C_{02}.

Hiermit ist aber noch nicht bewiesen, daß der Bogen C_{02} nicht ein Minimum ergeben kann, sondern wir müssen noch zeigen, daß es auch in

beliebiger Nähe derselben Kurven gibt, die das Integral (1) kleiner machen als dieser Bogen.

Wenn 3 ein Punkt von C bedeutet, der sich zwischen 1 und 2 befindet, folgt unmittelbar aus dem obigen, daß das Kurvenstück, das aus dem die Punkte 0 und 3 verbindenden Bogen der Gesamtheit $T_{+\,\varepsilon}$ und des Stückes 3 2 von C zusammengesetzt ist, das Integral (1) kleiner macht als der Bogen C_{02}. Indem man den Punkt 3 hinreichend nahe an 1 nimmt, kann man aber bewirken, daß das genannte Kurvenstück einer beliebig eng festgestellten Nachbarschaft der Kurve C_{02} angehört. Es gibt also in jeder solchen Nachbarschaft Kurven mit denselben Endpunkten wie C_{02} die dem Integrale (1) kleinere Werte ergeben als dieser Bogen, und hiermit ist bewiesen, daß derselbe nicht ein Minimum ergibt.

Da es auch einen der Gesamtheit $T_{-\,\varepsilon}$ zugehörigen Bogen gibt, der durch 2 geht, so kann in dem vorliegenden Falle jeder Punkt von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} fällt, vermittels zweier Bogen mit 0 verbunden werden, die beide im Vergleich mit den Kurven gewisser Nachbarschaften derselben Minima ergeben, und diese Bogen schließen sich beide unendlich nahe an C, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt.

Im Falle (c) kann man, wie im Falle (a) zeigen, daß der Bogen C_{01} und also auch ein Bogen C_{02}, der über 1 hinausreicht, nicht mehr ein Minimum ergibt. Wie schon im vorigen § bemerkt wurde, ist in diesem Falle auch keine in der Nähe von C fallende Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ vorhanden, die durch einen Punkt 2 von C, der außerhalb C_{01} in der Nähe von 1 liegt, geht. Da keine andere als eine Lagrange'sche Kurve ein Minimum ergeben kann, folgt hieraus, daß es in diesem Falle keinen in der Nähe von C fallenden Bogen gibt, der einen solchen Punkt mit 0 verbindet und ein Minimum des Integrals (1) ergibt.

Wenn schließlich der Fall (d) vorliegt, geben offenbar auf Grund der Gleichung (7), die Teile von den Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$, die zwischen die Punkte 0 und 1 fallen, dem Integrale (1) alle denselben Wert, und der Bogen C_{01} gibt also kein Minimum. Es gibt aber diesmal keine die Punkte 0 und 1 verbindende Kurven, die dem Integrale kleinere Werte erteilen als C_{01}. Liegt der Punkt 2 auf C außerhalb C_{01}, so gibt es auch solche benachbarte Kurven, die das Integral (1) kleiner machen als C_{02}. Eine Kurve, die von 0 bis 1 mit einer zu C benachbarten Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ zusammenfällt und von 1 bis 2 längs C läuft, erteilt nämlich dem Integrale (1) denselben Wert wie C_{02}, und da diese Kurve in 1 einen Eckpunkt hat, so gibt es in der Nachbarschaft derselben Kurven, die dem Integrale (1) noch kleinere Werte erteilen.

Indem wir uns der Bedeutung von n und N erinnern, können wir jetzt in folgender Weise die erhaltenen Resultate zusammenfassen:

Wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, so gibt derselbe niemals ein Extremum. Der Bogen C_{01} selbst gibt im allgemeinen auch nicht ein Extremum; wenn aber n ungerade und $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0)$ positiv ist, so findet hiervon eine Ausnahme statt, indem das Extremum noch besteht.

Ist n gerade, so kann jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels einer aber nur einer Lagrange'schen Kurve verbunden werden, die in der Nähe von C_{02} verläuft und die im Vergleich mit allen Kurven einer gewissen Nachbarschaft derselben, zu welcher auch der Bogen C_{02} gehört, ein Extremum ergibt. In dem Falle wo n ungerade ist, gibt es zwei solche Bogen, wenn $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0)$ positiv, aber keinen einzigen, wenn diese Größe negativ ist. Ist n unendlich, so gibt es auch keinen Bogen dieser Art.

Zur Theorie des relativen Extremums der einfachen Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen.

Von

J. W. LINDEBERG in Helsingfors.

Vergleicht man miteinander die Theorien des relativen und des absoluten Extremums, so findet man, daß zwischen denselben eine große Analogie besteht. So sind die Kriterien des schwachen Extremums einander vollständig äquivalent, und die Methoden diese Kriterien abzuleiten sind sehr ähnlich. Andrerseits ist aber die Theorie des relativen Extremums in einigen Punkten noch nicht so weit geführt wie die des absoluten, und insbesondere sind die Sätze zur näheren Bestimmung der Art des Extremums in der ersten sehr wenig befriedigend.

Im folgenden wird versucht diesem Mangel abzuhelfen, indem ein allgemeiner Satz bewiesen wird, wonach die Art des Extremums bei dem einfachsten Problem des relativen Extremums ebenso einfach wie bei dem Problem des absoluten Extremums bestimmt werden kann.

Um unsere Aufgabe genau formulieren zu können, erinnern wir zunächst an die Hauptpunkte der erwähnten Theorien.

1. Es sei $F(x, y, y')$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und $y = y(x)$ die Gleichung einer Lagrangeschen Kurve C, die dem Problem das Integral

$$\int F(x, y, y')\,dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \tag{1}$$

zu einem absoluten Extremum zu machen entspricht. Ferner sei c ein regulärer Bogen von C, der keine mit der y-Achse parallele Tangente zuläßt und der mit einem Felde umgeben werden kann. Weiter bezeichnen wir mit $p(x, y)$ die Funktion von x und y, die in jedem Punkte des Feldes mit der Ableitung der durch denselben gehenden Lagrangeschen Kurve übereinstimmt, und schließlich werde eine Funktion E der vier Argumente x, y, y', p durch die Gleichung

$$E(x, y, y', p) = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, p)$$

definiert.

Wenn nun c' irgend eine im Felde verlaufende reguläre Kurve mit denselben Endpunkten wie c ist, so hat man*)

$$(2) \quad \int_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int_{c} F(x, y, y')\,dx = \int_{c'} E(x, y, y', p(x, y))\,dx,$$

wobei die Integrale über die respektiven Kurven c' und c zu erstrecken sind.

Indem wir uns auf den Fall des Minimums beschränken, führen wir jetzt die folgenden Voraussetzungen ein:

Die Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ ist, wenn $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ $(x_1 < x_2)$ die Endpunkte von c sind, für $x_1 \leq x \leq x_2$, $y = y(x)$, $y' = y'(x)$ positiv, ohne zu verschwinden,

Die Funktion $E(x, y, y', p)$ ist im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x),$$

wo ϱ_0' eine gewisse positive Zahl bedeutet, positiv und verschwindet nur für $y' = y'(x)$.

Auf Grund der ersten dieser Voraussetzungen ist es möglich, die positive Größe ε_1 so klein festzustellen, daß die Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ in dem Bereiche $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - y(x)| < \varepsilon_1$, $|y' - y'(x)| < \varepsilon_1$ positiv und nicht Null ist; da

$$E(x, y, y' p) = \frac{(y' - p)^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, p + \vartheta(y' - p)), \qquad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

bleibt auch die Funktion $E(x, y, y', p)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_1,\ |y' - y'(x)| < \varepsilon_1,\ |p - y'(x)| < \varepsilon_1$$

positiv und verschwindet nur für $y' = p$. Ferner sei bemerkt, daß nach der zweiten Voraussetzung die Funktion $E(x, y, y', p)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x)$$

positiv ist, ohne zu verschwinden. Da sie in bezug auf alle ihre Argumente stetig ist, kann man also die positive Größe ε_2 so klein bestimmen, daß diese Eigenschaft noch im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_2,\ \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p - y'(x)| < \varepsilon_2$$

besteht. Die Größe ε_2 muß offenbar kleiner als ε_1 sein und man kann somit behaupten, daß die Funktion $E(x, y, y', p)$ im ganzen Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y - y(x)| < \varepsilon_2,\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p - y'(x)| < \varepsilon_2$$

positiv bleibt und nur für $y' = p$ Null wird.

Wegen der Stetigkeit von $p(x, y)$ ist es noch möglich, ε_3 so klein zu wählen, daß $|p(x, y) - y'(x)| < \varepsilon_2$ für $x_1 \leq x \leq x_2$, $|y - y(x)| < \varepsilon_3$.

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung.

Wenn ε die kleinere der Größen ε_2 und ε_3 bedeutet, wird also die Funktion $E(x, y, y', p(x, y))$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon, \ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0'$$

positiv und verschwindet nur für $y' = p(x, y)$.

Es bezeichne jetzt $T_{\varrho\varrho'}$ die Gesamtheit aller die Endpunkte von c verbindenden regulären Kurven $y = Y(x)$, die im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ den Ungleichungen

$$|Y(x) - y(x)| < \varrho, \ |Y'(x) - y'(x)| < \varrho'$$

genügen. Ist $\varrho < \varepsilon$ und gehört die Kurve c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$, so wird nach dem Obigen die Funktion $E(x, y, y', p(x, y))$ in jedem Punkte von c' positiv. Da ferner die Ableitung der Kurve c' nicht in jedem Punkte derselben mit der Funktion $p(x, y)$ übereinstimmen kann, kann der Integrand der rechten Seite von (2) nicht in jedem Punkte derselben verschwinden und diese Gleichung gibt uns also

$$\int_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int_{c} F(x, y, y')\, dx > 0.$$

Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

Wenn sich der Bogen c mit einem Felde umgeben läßt und $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ *im Bereiche*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad y' = y'(x)$$

ein festes Vorzeichen besitzt, ohne zu verschwinden, und $E(x, y, y', p)$ *im Bereiche*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ y = y(x), \ |y' - y'(x)| < \varrho_0', \ p = y'(x)$$

dasselbe Vorzeichen behält und nur für $y' = y'(x)$ *verschwindet, so kann man stets* ϱ *so klein bestimmen, daß die Kurve c im Vergleich mit allen Kurven der Gesamtheit* $T_{\varrho\varrho_0'}$ *absolutes Extremum des Integrals* (1) *ergibt.*

2. Wir werden jetzt sehen, daß der Ausdehnung des obigen Satzes zu dem einfachsten Problem des relativen Extremums besondere Schwierigkeiten entgegenstehen.

Indem wir mit $G(x, y, y')$ eine reguläre Funktion der Argumente x, y, y' bezeichnen, so sei

$$\int G(x, y, y')\, dx \tag{3}$$

das Integral, das für alle in Frage kommenden Kurven einen konstanten Wert behalten soll. Wenn λ ein willkürlicher Parameter ist und

$$F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') = H(x, y, y', \lambda)$$

gesetzt wird, ist die Lagrangesche Gleichung des Problems

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial H}{\partial y'} = 0. \tag{4}$$

Es sei $y = y(x)$ die Gleichung einer Integralkurve C von (4) und c ein Stück dieser Kurve, das überall regulär verläuft und keine mit der y-Achse parallele Tangente hat. Die Koordinaten der Endpunkte 1 und 2 von c seien $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, und mit $x_0 y_0$ mögen die Koordinaten eines zu 1 benachbarten Punktes 0 von C bezeichnet werden, der so liegt, daß $x_0 < x_1$. Ferner sei $y = y(x, \mu, \lambda)$ die Gleichung der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Integralkurven der Gleichung (4) und es werde angenommen, daß die Kurve C aus dieser Gleichung für $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ hervorgeht. Schließlich sei ω die Funktion von x, μ und λ, die für jedes Wertsystem der Argumente mit dem Werte des Integrals (3) vom Punkte 0 längs der Kurve $y = y(x, \mu, \lambda)$ bis zu dem Punkte mit der Abszisse x erstreckt übereinstimmt.

Wir führen jetzt die folgenden Voraussetzungen ein:

a) *Die Funktionaldeterminante* $\frac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ *ist für* $x_1 \leq x \leq x_2$, $\mu = \mu_0$, $\lambda = \lambda_0$ *nicht Null.*

b) *Die Ableitung* $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ *ist für*

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ y' = y'(x),\ \lambda = \lambda_0$$

positiv und von Null verschieden.

c) *Die Funktion*

$$E(x, y, y', p, \lambda) = H(x, y, y', \lambda) - H(x, y, p, \lambda) - (y' - p)\frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, p, \lambda)$$

bleibt im Bereiche:

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y = y(x),\ |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\ p = y'(x),\ \lambda = \lambda_0$$

überall positiv und verschwindet nur für $y' = y'(x)$.

Dies sind die Annahmen, die bei dem Problem des relativen Minimums den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen entsprechen.

Es sei nun c' eine Kurve mit denselben Endpunkten wie c, die überall regulär verläuft und keine mit der y-Achse parallele Tangente zuläßt, und es werden von dieser Kurve die folgenden Annahmen gemacht:

a') Sie gibt dem Integrale (3) denselben Wert wie der Bogen c.

b') Durch jeden Punkt 3 von c' geht eine solche Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$, daß das Integral (3) denselben Wert erhält, wenn es über das Stück 03 dieser Kurve oder über die Kurve, die aus dem Bogen 01 von C und 13 von c' zusammengesetzt ist, erstreckt wird.

c') Die Werte von μ und λ, die zu der durch den Punkt 3 gehenden oben definierten Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$ gehören, bilden zusammen mit der Abszisse x von 3 für jede Lage dieses Punktes ein solches Wertsystem von μ, λ und x, für welches die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ nicht verschwindet.

Wir bezeichnen mit $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ die zwei Funktionen von x, die für jedes x mit den Werten der Parameter λ und μ, die zu der durch den entsprechenden Punkt 3 gehenden oben erwähnten Kurve der Schar $y = y(x, \mu, \lambda)$ gehören, übereinstimmen. Ferner definieren wir die Funktion $p(x)$ durch die Gleichung $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, \mu(x), \lambda(x))$. Alsdann hat man*)

$$(5) \quad \int_{c'} F(x, y, y')dx - \int_{c} F(x, y, y')dx = \int_{c} E(x, y, y', p(x), \lambda(x))dx,$$

welche Gleichung für das Problem des relativen Extremums von grundlegender Bedeutung ist. Sie ist der Gleichung (2) sehr ähnlich; ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, daß in der Gleichung (5) zwei Funktionen $p(x)$ und $\lambda(x)$ vorkommen, die von der Gestalt des Bogens c' abhängen.

Da die Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ und also die ganze Gleichung (5) nur unter der Voraussetzung (b') einen Sinn haben, wollen wir zunächst diese Voraussetzung etwas näher in Betracht nehmen.

Es seien $x_3 y_3$ die Koordinaten des Punktes 3, I_{03} der Wert des Integrals (3) über die Kurve erstreckt, die aus dem Stücke 01 von C und 13 von c' zusammengesetzt ist, und δ der größte Wert, den irgend eine der Größen $|y_3 - y(x_3)|$ und $|I_{03} - \omega(x_3, \mu_0, \lambda_0)|$ im Intervalle $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ annimmt. Wenn δ hinreichend klein ist, kann man zufolge der Voraussetzung (a) die Gleichungen

$$y_3 = y(x_3, \mu, \lambda)$$
$$I_{03} = \omega(x_3, \mu, \lambda)$$

für jedes x_3 im Intervalle $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ nach μ und λ auflösen und hieraus folgt unmittelbar, daß, wenn ϱ und ϱ' hinreichend klein sind, die Voraussetzung (b') für alle Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ erfüllt ist. Etwas Näheres über die Werte, die hierbei ϱ und ϱ' erteilt werden können, scheint es aber sehr schwer zu sein zu entscheiden, und aus diesem Grunde ist die Gleichung (5) nicht unmittelbar zur Ableitung von Kriterien über die Art des Extremums geeignet.

Das schwache Minimum läßt sich aber ohne Schwierigkeit auf Grund unserer Voraussetzungen nachweisen.

Zufolge der Voraussetzung (b) können wir erstens eine positive Größe ε so feststellen, daß $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad |y - y(x)| < \varepsilon, \quad |y' - y'(x)| < \varepsilon, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

positiv bleibt, ohne zu verschwinden, und da

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung.

$$E(x, y, y', p, \lambda) = \frac{(y'-p)^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, p + \vartheta(y'-p), \lambda), \quad (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

behält auch die Funktion E im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2, \ |y - y(x)| < \varepsilon, \ |y' - y'(x)| < \varepsilon, \ |p - y'(x)| < \varepsilon, \ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

dasselbe Vorzeichen und verschwindet nur für $y' = p$.

Nach dem Vorigen ist nun, wenn ϱ und ϱ' hinreichend klein sind, die Voraussetzung (b') für jede Kurve der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ erfüllt, und es ist offenbar möglich, ϱ und ϱ' noch so klein zu bestimmen, daß auch die Voraussetzung (c') für diese Kurven erfüllt ist und daß, wenn die Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ einer solchen Kurve entsprechen, die Ungleichungen

$$|\lambda(x) - \lambda_0| < \varepsilon, \quad |p(x) - y'(x)| < \varepsilon$$

im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ bestehen. Die Funktion $E(x, y, y', p(x), \lambda(x))$ kann dann auf einer solchen Kurve nicht negativ werden, und da sie längs einer Kurve, die die Voraussetzung (a') erfüllt, nicht identisch verschwinden kann, gibt uns die Gleichung (5) für diese letzten Kurven

$$\int_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int_{c} F(x, y, y')\, dx > 0,$$

und hiermit ist gezeigt, daß c wirklich so genanntes schwaches relatives Minimum ergibt.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn sich auch die Voraussetzung (b') unter sehr allgemeinen Bedingungen als erfüllt nachweisen ließe, uns doch bei der Ausnutzung der Voraussetzung (c) zu näherer Bestimmung der Art des Extremums neue Schwierigkeiten entgegentreten würden. Wenn ϱ' irgend einen festen Wert hat, können wir nämlich nicht durch Verkleinerung nur von ϱ bewirken, daß die zu den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ gehörigen Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ von λ_0 resp. $y'(x)$ beliebig wenig verschieden sind, und es scheint also, als ob die Voraussetzung (c) für kein bestimmtes ϱ' hinreichend sei, um die Unveränderlichkeit des Vorzeichens von dem Integrande der Gleichung (5) längs den Kurven einer entsprechenden Kurvengesamtheit allgemein zu sichern.

Im folgenden wollen wir zeigen, wie diese Schwierigkeiten sich umgehen lassen, und zunächst wollen wir den Grundgedanken, der den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet, kurz andeuten.

3. Soll das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda_0)\, dx \tag{6}$$

zu einem absoluten Minimum gemacht werden, so ist die Lagrangesche Gleichung des Problems

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, y', \lambda_0) - \frac{d}{dx} \frac{\partial H}{\partial y'}(x, y, y', \lambda_0) = 0,$$

und dieselbe wird offenbar von der Kurve C befriedigt. Es sei c' eine die Endpunkte von c verbindende reguläre Kurve, die dem Integrale (6) einen größeren Wert als c gibt. Man hat dann, zufolge der Definition von $H(x, y, y', \lambda)$,

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c} F\,dx - \lambda_0 \left(\int_{c'} G\,dx - \int_{c} G\,dx\right) > 0,$$

und wenn der Bogen c' noch die Eigenschaft hat, dem Integrale (3) denselben Wert wie c zu geben, erhält man also

$$\int_{c'} F\,dx - \int_{c} F\,dx > 0.$$

Es werde jetzt angenommen, daß der Bogen c sich mit einem Felde im Sinne des obigen Problems umgeben läßt. Auf Grund der Voraussetzungen (b) und (c) folgt dann aus dem Satze des Paragraphen 1, daß, wenn ϱ hinreichend klein ist, c sicher im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0}$ absolutes Minimum des Integrals (6) ergibt. Dann gibt aber nach dem Obigen jede Kurve dieser Gesamtheit, die die Voraussetzung (a') erfüllt, dem Integrale (1) einen größeren Wert als c, und hieraus folgt unmittelbar, daß der dem Satze des Paragraphen 1 analoge Satz bei dem Problem des relativen Extremums wenigstens in dem Falle richtig ist, wo sich der betrachtete Bogen mit einem Felde, das dem oben angegebenen Problem des absoluten Extremums entspricht, umgeben läßt.

Indem wir annehmen, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist, setzen wir jetzt fernerhin voraus, c' sei eine die Endpunkte von c verbindende reguläre Kurve, und bezeichnen mit $\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2, \cdots, \xi_n\eta_n$ die Koordinaten einer Reihe von Punkten, die auf c' so liegen, daß $\xi_i < \xi_{i+1}$, und von denen $\xi_1\eta_1$ und $\xi_n\eta_n$ mit den Punkten 1 und 2 zusammenfallen. Ferner wollen wir annehmen, daß es einen solchen Wert λ' von λ gibt, daß jede zwei aufeinander folgende Punkte dieser Reihe vermittels Integralkurven der Gleichung (4) verbunden werden können, die dem Werte λ' von λ entsprechen, und daß die aus diesen Bogen zusammengesetzte, die Endpunkte von c verbindende Kurve c'' dem Integrale (3) denselben Wert gibt wie c. Schließlich mögen die Stücke von c' und c'', die zwischen den Punkten $\xi_i\eta_i$ und $\xi_{i+1}\eta_{i+1}$ fallen, mit c_i' und c_i'' bezeichnet werden.

Obgleich nun c nicht mit einem Felde im Sinne des Problems, das Integral (6) zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben werden kann, ist es jedoch möglich, daß die einzelnen Bogen c_i'' sich mit Feldern im Sinne des Problems, das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda')\,dx$$

zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben lassen. Wir wollen annehmen, daß dies der Fall ist und daß, mit Anwendung der Gleichung (2), sich zeigen läßt:

$$\int_{c_i'} H(x, y, y', \lambda')dx - \int_{c_i''} H(x, y, y', \lambda')dx > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Summieren wir von $i = 1$ bis $i = n-1$, erhalten wir, mit Beachtung der Definition von $H(x, y, y', \lambda')$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i'} F dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i''} F dx - \lambda' \left(\sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i'} G dx - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{c_i''} G dx \right) > 0;$$

wenn c' die Voraussetzung (a') erfüllt, so folgt hieraus, wegen unserer Annahme, daß dies auch mit c'' der Fall ist,

$$\int_{c'} F dx - \int_{c''} F dx > 0.$$

Nun ist es nach § 2 stets möglich, ϱ und ϱ' so klein zu bestimmen, daß c im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ relatives Minimum des Integrals (1) ergibt. Wenn auch c' nicht dieser Gesamtheit angehört, ist es offenbar möglich, daß c'' eine Kurve derselben ist, und wenn dies der Fall ist, hat man

$$\int_{c''} F dx - \int_{c} F dx > 0$$

und folglich auch

$$\int_{c'} F dx - \int_{c} F dx > 0.$$

Es öffnet sich also hier ein neuer Weg, die Kurve c mit benachbarten Kurven hinsichtlich der Werte, die sie dem Integrale (1) erteilen, zu vergleichen. Im folgenden wird gezeigt, wie sich der oben angedeutete Gedanke streng durchführen läßt und uns zu der Ausdehnung des Satzes des § 1 auf das Problem des relativen Extremums führt.

Zunächst werden wir eine Reihe von Hilfssätzen beweisen, die wir für unseres Hauptproblem brauchen.

4. Da die Gleichung (4) von der zweiten Ordnung ist, wird das allgemeine Integral derselben außer von λ, das schon in der Gleichung vorkommt, noch von zwei willkürlichen Parametern abhängen. Wir wollen zunächst eine Schar von Integralkurven in Betracht ziehen, die außer von λ nur von einem Parameter $\varkappa$ abhängt. Es sei $y = g(x, \lambda, \varkappa)$ die Gleichung einer solchen Schar, aus welcher C für $\lambda = \lambda_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ hervorgeht, und von der Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ werde angenommen, daß sie in der Umgebung jedes Wertsystems $x_1 \leq x \leq x_2$, $\lambda = \lambda_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ regulär ist.

Wenn man die Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ und ihre Ableitung nach x anstatt y und y' in die Gleichung (4) einführt und die so erhaltene Identität nach $\varkappa$ differenziert, ergibt sich, daß die Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \varkappa}(x, \lambda_0, \varkappa_0)$ einer linearen Differentialgleichung

$$(7) \qquad u'' + p(x)u' + q(x)u = 0 \qquad \left(u' = \frac{du}{dx},\ u'' = \frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

genügt, wo $p(x)$ und $q(x)$ zufolge der Voraussetzung (b) im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ reguläre analytische Funktionen sind, die nur von der Gleichung $y = y(x)$ von C und von den Funktionen $F(x, y, y')$ und $G(x, y, y')$ abhängen, aber keineswegs von der Art, wie der Parameter $\varkappa$ in der Funktion $g(x, \lambda, \varkappa)$ eingeht.

Wir wollen einige Sätze hinsichtlich der Integrale von (7) ableiten.

Wenn ξ ein Wert von x in dem Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ ist und a eine gewisse positive Zahl bedeutet, so sei $u_a(x)$ das Integral von (7), das den Bedingungen $u_a(\xi) = a$, $u_a'(\xi) = 0$ genügt. Da u_a eine nebst ihren Ableitungen stetige Funktion von x sein muß, können wir erstens einen solchen Intervall $|x - \xi| < l_1$ abgrenzen, daß in demselben $|u_a| < 2a$, $|u_a'| < 2a$. Aus (7) folgt dann, wenn M der größte Wert ist, den irgend eine der Funktionen $|p(x)|$ und $|q(x)|$ im Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$ annimmt, daß im Intervalle $|x - \xi| < l_1$ die Ungleichung $|u_a''| < 4aM$ besteht, und hieraus folgt weiter

$$(8) \qquad \begin{aligned} |u_a'| &< 4aM|x - \xi| \\ |u_a| &< a + 2aM(x - \xi)^2 \end{aligned}$$

für dieselben Werte von x. Wenn aber l_2 die kleinere der Größen 1 und $\frac{1}{2M}$ bedeutet, so sind die rechten Seiten dieser Ungleichungen für $|x - \xi| < l_2$ kleiner als $2a$. Wir werden sehen, daß dies auch mit den linken Seiten der Fall sein muß.

Wenn x vom Werte ξ ausgehend stetig bis zu dem Werte $\xi + l_2$ wächst, gelten nach dem Obigen die Ungleichungen (8) sicher, solange $|u_a| < 2a$ und $|u_a'| < 2a$. Andrerseits kann keine der Funktionen $|u_a|$ und $|u_a'|$ den Wert $2a$ im Intervalle $\xi < x < \xi + l_2$ erreichen, ohne daß diese Ungleichungen schon vordem aufgehört haben zu gelten. Die genannten Ungleichungen müssen also in dem ganzen in Frage stehenden Intervalle bestehen, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der oben gemachten Behauptung.*)

*) Ernst Lindelöf bedient sich in einer Abhandlung „Demonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles“ (Journal de Mathématiques 1900) einer analogen Schlußweise.

Im Intervalle $|x-\xi|<l_2$ hat man nun somit $|u_a''|<4aM$ und daraus folgt, da $u_a'(\xi)=0$,

$$u_a > a - 2aM(x-\xi)^2.$$

Beachtet man die Bedeutung von l_2, so kann man hieraus den Schluß ziehen, daß u_a im Intervalle $|x-\xi|<l_2$ nicht Null wird. Da l_2 in keiner Weise von ξ abhängt, kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 1. *Es läßt sich eine nur von $p(x)$ und $q(x)$ abhängige positive Größe l derart bestimmen, daß, wenn $u(x)$ irgend ein Integral von (7) ist und die Ableitung $u'(x)$ für einen Wert ξ von x aus dem Intervalle $x_1 \leq x \leq x_2$, für welchen $u(x)$ nicht verschwindet, Null wird, die Funktion $u(x)$ im Intervalle $|x-\xi|<l$ von Null verschieden sein muß.*

Als unmittelbare Folgerung hieraus ergibt sich noch:

Hilfssatz 2. *Hat ein Integral $u(x)$ von (7) in zwei Punkten ξ_1 und ξ_2 $(\xi_1<\xi_2)$ dasselbe Vorzeichen, ohne zu verschwinden, und ist $\xi_2-\xi_1<l$, so kann das Integral $u(x)$ im Intervalle $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$ nicht Null werden.*

In der Tat, wenn das Integral $u(x)$ im Intervalle $\xi_1<x<\xi_2$ verschwinden würde, müßte dasselbe in diesem Intervalle ein Maximum oder Minimum besitzen und die Ableitung der Funktion $u(x)$ müßte also auch in demselben Null werden. Wenn nun $u'(x)$ in einem Punkte verschwinden würde, wo auch $u(x)$ Null ist, müßte offenbar $u(x)$ identisch verschwinden, und wenn das Verschwinden von $u'(x)$ in einem Punkte stattfinden würde, wo $u(x)$ einen endlichen Wert hat, müßte $u(x)$ nach dem Hilfssatze 1 in dem betrachteten Intervalle von Null verschieden bleiben. Da diese beiden Konsequenzen unseren Annahmen widersprechen, folgt hieraus die Richtigkeit des Satzes 2.

Es seien jetzt ξ ein Wert von x zwischen x_1 und x_2 und

$$y = y_\xi(x, \nu, \mu, \lambda)$$

das allgemeine Integral von (4), wo ν und μ so gewählt sind, daß

$$\nu = y_\xi(\xi, \nu, \mu, \lambda),$$

$$\mu = \frac{\partial y_\xi}{\partial x}(\xi, \nu, \mu, \lambda).$$

Wenn ν_0, μ_0 und λ_0 die Werte der Parameter sind, die der Kurve C entsprechen, so ist, wegen der Voraussetzung (b), die Funktion $y_\xi(x, \nu, \mu, \lambda)$ in der Umgebung jedes Wertsystems $x_1 \leq x \leq x_2$, $\nu=\nu_0$, $\mu=\mu_0$, $\lambda=\lambda_0$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und aus der gemachten Annahme über die Parameter ν und μ folgt:

$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 1, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \nu \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0,$$
$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \mu \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 1,$$
$$\frac{\partial y_\xi}{\partial \lambda}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 y_\xi}{\partial \lambda \partial x}(\xi, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0.$$

Wenden wir den Satz 1 auf die Ableitungen $\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ und $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ an, so erhalten wir, mit Berücksichtigung dieser letzten Gleichungen, ohne Schwierigkeit den folgenden Satz:

Hilfssatz 3. *Die Ableitung* $\frac{\partial y_\xi}{\partial \nu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ *ist im Intervalle* $|x - \xi| < l$ *positiv, ohne zu verschwinden, und die Ableitung* $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ *ist Null für* $x = \xi$, *negativ im Intervalle* $\xi - l < x < \xi$ *und positiv im Intervalle* $\xi < x < \xi + l$.

Schließlich wollen wir, indem wir zur Abkürzung die Ableitungen $\frac{\partial y_\xi}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ und $\frac{\partial y_\xi}{\partial \lambda}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0)$ mit $y_\mu(x)$ und $y_\lambda(x)$ bezeichnen, einen Satz hinsichtlich des Quotienten $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ beweisen.

Die Funktion $y_\lambda(x)$ genügt nicht der linearen Differentialgleichung (7), sondern man hat, wenn $r(x)$ die Funktion von x bedeutet, die durch Einführung von $y(x)$, $y'(x)$ und λ_0 anstatt y, y' und λ in dem Ausdrucke

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right) : \frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}$$

entsteht,

$$\frac{d^2 y_\lambda}{dx^2} + p(x)\frac{dy_\lambda}{dx} + q(x) y_\lambda + r(x) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $y_\mu(x)$ und subtrahieren aus der so entstandenen Gleichung die Gleichung

$$y_\lambda(x)\left(\frac{d^2 y_\mu}{dx^2} + p(x)\frac{dy_\mu}{dx} + q(x) y_\mu\right) = 0,$$

erhalten wir, wenn $y_\mu y_\lambda' - y_\lambda y_\mu' = w$ gesetzt wird,

$$\frac{dw}{dx} + pw + r y_\mu = 0,$$

und hieraus folgt, da $w(\xi) = 0$,

$$w = -e^{-\int_\xi^x p(x)\,dx} \cdot \int_\xi^x r(x)\, y_\mu(x) e^{\int_\xi^x p(x)\,dx}\, dx$$

Es sei jetzt l_1 eine positive Größe, die kleiner als l ist, und es werde angenommen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'} \tag{9}$$

für alle durch die Elemente des Stückes von c, das zwischen die Geraden $x = \xi$ und $x = \xi + l_1$ fällt, definierte Wertsysteme von x, y und y' dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes verschwindet. Da nach dem Satze 3 $y_\mu(x)$ in dem Intervalle $\xi < x < \xi + l_1$ positiv und von Null verschieden ist, folgt aus der obigen Gleichung, wenn noch die Voraussetzung (b) beachtet wird, daß w und der Ausdruck (9) in demselben entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nun ist aber

$$\frac{d}{dx}\frac{y_\lambda}{y_\mu} = \frac{w}{(y_\mu)^2}.$$

Die Ableitung des Quotienten $\frac{y_\lambda}{y_\mu}$ wird also positiv oder negativ, je nachdem der Ausdruck (9) negativ oder positiv ist, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Hilfssatz 4. *Wenn der Ausdruck* (9) *auf der Strecke von c zwischen die Geraden* $x = \xi$ *und* $x = \xi + l_1$ $(l_1 < l)$ *dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes verschwindet, so ist der Quotient* $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ *in dem Intervalle* $\xi < x < \xi + l_1$ *beständig zunehmend oder beständig abnehmend, je nachdem der genannte Ausdruck in demselben negativ oder positiv ist.*

5. Es seien jetzt $x_0 y_0$ und $\xi_0 \eta_0$ zwei Punkte von c, die so liegen, daß, wenn l die Konstante des Satzes 1 ist, die Ungleichungen $x_0 > \xi_0$, $x_0 - \xi_0 < l$ bestehen. Alsdann behaupten wir, daß, wenn die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ gewissen Umgebungen der Punkte $x_0 y_0$ und $\xi_0\eta_0$ angehören und λ' ein beliebiger Wert von λ aus einem gewissen, den Wert λ_0 enthaltendem Intervalle ist, die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ vermittels einer Integralkurve von (4), die dem Wert λ' entspricht, verbunden werden können.

In der Tat, wenn $y = y_{\xi_0}(x, \nu, \mu, \lambda)$ das allgemeine Integral von (4) ist, wo ν und μ so gewählt sind, daß

$$\nu = y_{\xi_0}(\xi_0, \nu, \mu, \lambda), \qquad \mu = \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial x}(\xi_0, \nu, \mu, \lambda),$$

hat man, zufolge dieser Annahme betreffend der Parameter,

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda) = 1, \qquad \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = 0.$$

Ferner ist, auf Grund des Satzes 3,

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \neq 0$$

und also wird

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0), & \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(\xi_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \nu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0), & \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x_0, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die Gleichungen

$$y' = y_{\xi_0}(x', \nu, \mu, \lambda),$$
$$\eta = y_{\xi_0}(\xi, \nu, \mu, \lambda)$$

können somit in der Umgebung des Wertsystems $y' = y_0, x' = x_0, \eta = \eta_0, \xi = \xi_0, \lambda = \lambda_0$ nach ν und μ aufgelöst werden, und hieraus folgt unmittelbar die Richtigkeit der oben gemachten Behauptung.

Führen wir die durch die obigen Gleichungen definierten Funktionen ν und μ in $y_{\xi_0}(x, \nu, \mu, \lambda)$ ein, so entsteht eine Funktion der sechs Argumente x, x', y', ξ, η und λ, die wir mit $\vartheta(x, x', y', \xi, \eta, \lambda)$ bezeichnen wollen. Diese Funktion ist offenbar regulär in der Umgebung jedes Wertsystems

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ y' = y(x'),\ \eta = y(\xi),\ |x' - \xi| < l,\ \lambda = \lambda_0$$

und die Gleichung

$$y = \vartheta(x, x', y', \xi, \eta, \lambda)$$

stellt die durch die Punkte $x'y'$ und $\xi\eta$ gehende Integralkurve der Gleichung (4) mit der isoperimetrischen Konstante λ dar.

6. Wir wollen jetzt das Integral (3) längs einer Lagrangeschen Kurve mit der isoperimetrischen Konstante λ vom Punkte $x'y'$ bis zu dem Punkte $\xi\eta$ derselben erstreckt in Betracht nehmen. Indem wir dieses Integral, das offenbar eine in der Umgebung jedes Wertsystems

$$|x' - \xi| < l,\ y' = y(x'),\ \eta = y(\xi),\ \lambda = \lambda_0$$

reguläre Funktion von x', y', ξ, η und λ ist, mit $\Theta(x', y', \xi, \eta, \lambda)$ bezeichnen, soll der folgende Satz bewiesen werden:

Hilfssatz 5. *Wenn x_0y_0 und $\xi_0\eta_0$ solche Punkte von c sind, daß $x_0 > \xi_0$ und $x_0 - \xi_0 < l$, und der Ausdruck* (9) *auf der Strecke von c zwischen den Geraden $x = \xi_0$ und $x = x_0$ dasselbe Vorzeichen behält und nur möglicherweise in den Endpunkten des Stückes Null wird, so ist die Ableitung*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda_0)$$

positiv und nicht Null.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \mu}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = y_\mu(x), \qquad \frac{\partial y_{\xi_0}}{\partial \lambda}(x, \nu_0, \mu_0, \lambda_0) = y_\lambda(x),$$

und weiter, indem wir die Funktion $\mu = \varphi(\lambda)$ durch die Gleichung

$$y_{\xi_0}(x_0, \nu_0, \mu, \lambda) = y_0$$

definieren,

$$y_{\xi_0}(x, \nu_0, \varphi(\lambda), \lambda) = g(x, \lambda).$$

Die Gleichung $y = g(x, \lambda)$ stellt dann die Integralkurven von (4) dar, die durch die Punkte $x_0 y_0$ und $\xi_0 \eta_0$ gehen, und man hat somit

$$\Theta(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda) = \int_{\xi_0}^{x_0} G(x, g(x, \lambda), g'(x, \lambda))\, dx,$$

woraus folgt, wenn man nach λ differenziert und rechts partiell integriert,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0, \lambda_0) = \int_{\xi_0}^{x_0} \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\frac{\partial g}{\partial \lambda}\, dx, \tag{10}$$

wobei auf der rechten Seite $\lambda = \lambda_0$ zu setzen ist. Wir wollen das Vorzeichen der Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ näher untersuchen.

Aus der Definition von $g(x, \lambda)$ folgt

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0) = y_\mu(x)\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) + y_\lambda(x) = y_\mu(x)\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) + \frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}\right).$$

Der erste Faktor rechts ist nach dem Satze 3 im Intervalle $\xi_0 < x < x_0$ positiv und das Vorzeichen des ganzen Ausdruckes hängt also vom zweiten Faktor ab. Da nach der Definition von $\varphi(\lambda)$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda}(\lambda_0) = -\frac{y_\lambda(x_0)}{y_\mu(x_0)},$$

so ist dieser Faktor für $x = x_0$ Null. Da ferner das zweite Glied $\frac{y_\lambda(x)}{y_\mu(x)}$ nach dem Satze 4 in dem Intervalle $\xi_0 < x < x_0$ beständig zunehmend oder beständig abnehmend ist, je nachdem der Ausdruck (9) in demselben negativ oder positiv ist, so folgt hieraus, daß der in Frage stehende Faktor und somit die Ableitung $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ in demselben Intervalle positiv oder negativ ist, je nachdem der Ausdruck (9) positiv oder negativ ist. Der Integrand der Gleichung (10) ist also bei unseren Voraussetzungen immer positiv und das ganze Integral also positiv und nicht Null. Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

7. Wir führen jetzt die Voraussetzung ein, daß der Ausdruck (9) auf der Kurve c nicht überall verschwindet. Derselbe kann dann offenbar nur

eine endliche Anzahl von Nullstellen auf c besitzen; es sei $a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_nb_n$ eine Reihe von Punkten dieses Bogens, unter welchen sich alle Nullpunkte von (9) befinden und von welchen a_1b_1 und a_nb_n mit den respektiven Punkten 1 und 2 zusammenfallen, und es werde angenommen, daß die Abszissen a_i den Ungleichungen

$$a_i < a_{i+1}, \quad a_{i+1} - a_i < l \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

genügen.

Wenn λ von λ_0 und $y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}$ von den respektiven Werten $b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}$ wenig verschieden sind, können nach § 5 und zufolge unserer Voraussetzungen betreffend die Punkte a_ib_i jede zwei aufeinander folgende Punkte der Reihe $a_1b_1, a_2y_2, \cdots, a_{n-1}y_{n-1}, a_nb_n$ vermittels Integralkurven von (4) mit der isoperimetrischen Konstante λ verbunden werden; wir betrachten das Integral (3) über die aus diesen Kurven zusammengesetzte die Punkte 1 und 2 verbindende Kurve erstreckt. Dieses Integral wird offenbar eine in der Umgebung des Wertsystems $b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0$ reguläre Funktion der Argumente $y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}$ und λ sein und wenn diese Funktion mit $\Phi(y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, \lambda)$ bezeichnet wird, hat man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \lambda_0).$$

Da zufolge unserer Annahme über die Punkte a_ib_i der Ausdruck (9) zwischen jeden zweier solcher Punkte ein festes Vorzeichen behält, ohne zu verschwinden, so ist nach dem Satze 5

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda}(a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \lambda_0) > 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

und also wird auch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0) \neq 0.$$

Dies zeigt uns aber, daß die Gleichung

$$\Phi(y_2, y_3, \cdots, y_{n-1}, \lambda) = \Phi(b_2, b_3, \cdots, b_{n-1}, \lambda_0)$$

in der Umgebung des Wertsystems $y_2 = b_2, y_3 = b_3, \cdots, y_{n-1} = b_{n-1}$ nach λ aufgelöst werden kann, d. h. daß, wenn irgend eine Punktreihe $a_2y_2, a_3y_3, \cdots, a_{n-1}y_{n-1}$ aus der Umgebung der Reihe $a_2b_2, a_3b_3, \cdots, a_{n-1}b_{n-1}$ gegeben ist, es möglich ist, λ so zu bestimmen, daß das Integral (3) längs der aus den entsprechenden Lagrangeschen Kurven zusammengesetzten Kurve erstreckt, denselben Wert erhält, wie wenn es über c erstreckt wird. Wenn wir mit S_h den Flächenstreifen bezeichnen, der von den Kurven $y = y(x) + h$ und $y = y(x) - h$ und den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ begrenzt ist, können wir also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 6. *Es läßt sich eine positive Größe h_1 so feststellen, daß, wenn $h < h_1$, zu jeder Punktreihe $a_1 b_1$, $a_2 y_2$, $\cdots$, $a_{n-1} y_{n-1}$, $a_n b_n$ innerhalb S_h ein solcher Wert λ' von λ gehört, daß jede zwei aufeinander folgende Punkte dieser Reihe vermittels regulärer Integralkurven von* (4) *mit der isoperimetrischen Konstante λ' verbunden werden können und daß die aus dieser Kurven zusammengesetzte, die Endpunkte von c verbindende Kurve dem Integrale* (3) *denselben Wert wie c gibt.*

Wir bezeichnen mit T_h die Gesamtheit aller die Punkte 1 und 2 verbindenden, aus Integralkurven von (4) zusammengesetzten Kurven, die in der oben angegebenen Weise Punktreihen $a_2 y_2$, $a_3 y_3$, $\cdots$, $a_{n-1} y_{n-1}$ innerhalb S_h entsprechen. Ferner sei λ_h die obere Grenze der zu diesen Kurven gehörigen Werten von $|\lambda' - \lambda_0|$.

Die Größe λ_h verschwindet offenbar gleichzeitig mit h, und da die Kurven T_h von Stücken der Kurven $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ (§ 5) zusammengesetzt sind, wo $|y_i - b_i| < h$, $|y_{i+1} - b_{i+1}| < h$ und $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_h$, so können wir hieraus und aus der Regularität der Funktion

$$\vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$$

in der Umgebung der Wertsysteme

$$a_i \leq x \leq a_{i+1}, \quad y_i = b_i, \quad y_{i+1} = b_{i+1}, \quad \lambda = \lambda_0$$

noch auf das Bestehen des folgenden Satzes schließen:

Hilfssatz 7. *Wenn die positiven Größen ϱ und ϱ' noch so klein festgestellt worden sind, kann doch stets durch hinreichende Verkleinerung von h bewirkt werden, daß alle Kurven T_h der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ angehören.*

8. Wir wollen jetzt noch untersuchen, inwiefern sich die Stücke der Kurven T_h mit Feldern umgeben lassen, die dem Problem das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda) dx, \tag{11}$$

wo λ die zu der betrachteten Kurve gehörige isoperimetrische Konstante ist, zu einem absoluten Minimum zu machen entsprechen. Wir haben also das zwischen den Geraden $x = a_i$ und $x = a_{i+1}$ fallende Stück einer Kurve $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ zu untersuchen unter der Annahme, daß $|y_i - b_i| < h$, $|y_{i+1} - b_{i+1}| < h$, $|\lambda - \lambda_0| < \lambda_h$.

Wenn wir

$$\vartheta(x, a_i, y_i + \varkappa, a_{i+1}, y_{i+1} + \varkappa, \lambda) = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$$

setzen, stellt offenbar die Gleichung $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$, wenn darin nur $\varkappa$ als variabel angenommen wird, eine Schar von Integralkurven der Gleichung (4) dar, woraus die Kurve $y = \vartheta(x, a_i, y_i, a_{i+1}, y_{i+1}, \lambda)$ für $\varkappa = 0$ hervorgeht. Ferner kann man unmittelbar aus der Definition von φ schließen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x_i, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x_{i+1}, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) = 1.$$

Hieraus folgt weiter, nach dem Satze 2, daß die Ableitung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0)$$

im Intervalle $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ größer als Null bleibt und da $\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ in der Umgebung der Wertsysteme $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $y_i = b_i$, $y_{i+1} = b_{i+1}$, $\varkappa = 0$, $\lambda = \lambda_0$ in bezug auf ihre sämtlichen Argumente regulär ist, ist es also möglich, eine positive Größe ε so klein zu wählen, daß die Ungleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda) > 0$ im Bereiche

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad |y_i - b_i| < \varepsilon, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon, \quad |\varkappa| < \varepsilon, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

besteht.

Mit m bezeichnen wir das Minimum von $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ in diesem Bereiche und mit M das Maximum der Summe $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y_{i+1}}\right| + \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\right|$ in demselben. Ist ε_1 eine positive Größe $< \varepsilon$ und genügen y_i, y_{i+1} und λ den Bedingungen

$$|y_i - b_i| < \varepsilon_1, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon_1, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1,$$

hat man

$$|\varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0)| < M\varepsilon_1$$

für $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. Andrerseits ist aber, wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$, für dieselben Wertsysteme von y_i, y_{i+1} und λ

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) > m\varepsilon_2$$

und

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, -\varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda) < -m\varepsilon_2.$$

Bestimmen wir nun ε_1 so, daß $m\varepsilon_2 > M\varepsilon_1$ und setzen wir $m\varepsilon_2 - M\varepsilon_1 = \delta$, wird also sicher

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) > \delta,$$
$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, -\varepsilon_2, \lambda) - \varphi(x, b_i, b_{i+1}, 0, \lambda_0) < -\delta$$

für

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad |y_i - b_i| < \varepsilon_1, \quad |y_{i+1} - b_{i+1}| < \varepsilon_1, \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1.$$

Dies besagt aber, daß die Kurven der Schar $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$, die den Werten von $\varkappa$ zwischen $-\varepsilon_2$ und $+\varepsilon_2$ entsprechen, das Gebiet, das von den Kurven $y = y(x) + \delta$ und $y = y(x) - \delta$ und den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ begrenzt ist, vollständig ausfüllen. Da sie eine Gesamtheit von Lagrangeschen Kurven mit derselben isoperimetrischen Konstante λ sind, und die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial \varkappa}(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$ für $|\varkappa| < \varepsilon_2$ nicht verschwindet, so bilden diese Kurven in dem genannten Gebiete ein Feld im Sinne des Problems, das Integral (11) zu einem absoluten Minimum zu machen, das die Kurve $y = \varphi(x, y_i, y_{i+1}, 0, \lambda)$ umgibt. Nehmen wir nun h kleiner als δ und ε_1 und noch so, daß auch $\lambda_h < \varepsilon_1$, kann also

das zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ fallende Stück jeder Kurve der Gesamtheit T_h mit einem solchen Felde umgeben werden, daß der Teil von S_h, der zwischen diese Geraden fällt, vollständig bedeckt wird. Wir können also den folgenden Satz aussprechen:

Hilfssatz 8. *Es läßt sich eine solche positive Größe h_2 bestimmen, daß, wenn $h < h_2$, jedes einzelne Stück einer Kurve der Gesamtheit T_h mit der isoperimetrischen Konstante λ mit einem Felde im Sinne des Problems, das Integral* (11) *zu einem absoluten Minimum zu machen, umgeben werden kann, und daß dieses Feld den Teil des Flächenstreifens S_h zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ vollständig ausfüllt.*

9. Indem wir unter h_1 und h_2 die Konstante der Sätze 6 und 8 verstehen, sei jetzt angenommen, daß $h < h_1$ und h_2 ist und es sei c' eine die Endpunkte von c verbindende Kurve, die in ihrer ganzen Ausdehnung im Inneren von S_h verläuft und dem Integrale (3) denselben Wert wie c gibt. Nach dem Satze 6 gibt es sicher eine Kurve c'' der Gesamtheit T_h, die durch die Schnittpunkte von c' mit den Geraden

$$x = a_2,\ x = a_3,\ \cdots,\ x = a_{n-1}$$

geht; es seien $y_2', y_3', \cdots, y_{n-1}'$ die Ordinaten dieser Schnittpunkte. Ferner seien c_i' und c_i'' die Teile von c' und c'', die zwischen den Geraden $x = a_i$ und $x = a_{i+1}$ fallen, und λ' der Wert von λ, der der Kurve c'' entspricht. Die Kurvenschar $y = \varphi(x, y_i', y_{i+1}', \varkappa, \lambda')$ bildet dann ein das Kurvenstück c_i'' umgebendes Feld im Sinne des Problems, das Integral

$$\int H(x, y, y', \lambda')\, dx$$

zu einem absoluten Minimum zu machen, und dieses Feld bedeckt, zufolge unserer obigen Annahme über die Größe von h und nach dem Satze 8, vollständig den Teil von S_h, der zwischen den Geraden $x = x_i$ und $x = x_{i+1}$ fällt. Wenn $p_{c'}(x, y)$ die Funktion von x und y bedeutet, die in jedem Punkte eines solchen Gebietes mit der Ableitung der durch denselben gehenden Kurve des zugehörigen Feldes übereinstimmt, hat man nach Paragraph 1

$$\int_{c_i'} H(x, y, y', \lambda') - \int_{c_i''} H(x, y, y', \lambda')\, dx = \int_{c_i'} E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')\, dx$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

wo die Funktion E die im Paragraph 2 definierte Funktion von x, y, y', p und λ bedeutet. Wenn man die Summe beiderseits von $i = 1$ bis $i = n-1$ bildet und beachtet, daß c' und c'' dem Integrale (3) denselben Wert erteilen, erhält man hieraus

$$(12)\quad \int_{c'} F(x, y, y')\, dx - \int_{c''} F(x, y, y')\, dx = \int_{c'} E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')\, dx.$$

In der rechten Seite dieser Gleichung sind nun noch λ' und $p_{c'}(x, y)$ Größen, die von der Gestalt der Kurve c' abhängen. Diese Abhängigkeit hat aber jetzt nicht mehr denselben Charakter, wie die Abhängigkeit der Funktionen $\lambda(x)$ und $p(x)$ von c' in der Gleichung (5), sondern wir können jetzt auf Grund der erhaltenen Gleichung Schlüsse machen, die denen des Paragraphen 1 analog sind.

Zunächst sei folgendes hinsichtlich der Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ bemerkt.

Aus der Voraussetzung (b) folgt erstens, wie schon im Paragraph 2 gezeigt wurde, daß, wenn ε_1 eine hinreichend kleine positive Konstante ist, die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y-y(x)|<\varepsilon_1,\ |y'-y'(x)|<\varepsilon_1,\ |p-y'(x)|<\varepsilon_1,\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon_1$$

positiv bleibt und nur für $y' = p$ verschwindet. Andrerseits wird diese Funktion zufolge der Voraussetzung (c) für

$$x_1 \leq x \leq x_2,\quad y = y(x),\quad \varepsilon_1 \leq |y' - y'(x)| \leq \varrho_0',\quad p = y'(x),\quad \lambda = \lambda_0$$

positiv, ohne zu verschwinden, und da sie in der Umgebung dieser Wertsysteme stetig ist, so kann man eine solche positive Konstante ε_2 finden, daß sie noch im Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y-y(x)|<\varepsilon_2,\ \varepsilon_1 \leq |y'-y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p-y'(x)| \leq \varepsilon_2,\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon_2$$

positiv wird, ohne zu verschwinden. Wenn $\varepsilon_3 < \varepsilon_1$ und ε_2, wird also die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ im ganzen Bereiche

$$x_1 \leq x \leq x_2,\ |y-y(x)|<\varepsilon_3,\ |y'-y'(x)| \leq \varrho_0',\ |p-y'(x)|<\varepsilon_3,\ |\lambda-\lambda_0|<\varepsilon_3$$

positiv und verschwindet nur für $p = y'$.

Nun ist es offenbar, da $|\lambda' - \lambda_0| < \lambda_h$ und die Funktion

$$\varphi(x, y_i, y_{i+1}, \varkappa, \lambda)$$

für jedes i in der Umgebung der Wertsysteme

$$x_i \leq x \leq x_{i+1},\quad y_i = b_i,\quad y_{i+1} = b_{i+1},\quad \varkappa = 0,\quad \lambda = \lambda_0$$

regulär ist, möglich, η_1 so klein zu bestimmen, daß, wenn $h < \eta_1$ und c' im Inneren von S_h verläuft, erstens $|\lambda' - \lambda_0| < \varepsilon_3$ und zweitens in jedem Punkte von c' die Ungleichung $|p_{c'}(x, y) - y'(x)| < \varepsilon_3$ besteht. Wenn $\varrho < \eta_1$ und ε_3 und c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$ angehört, wird also

$$E(x, y, y', p_{c'}(x, y), \lambda')$$

in jedem Punkte von c' positiv und die Gleichung (12) gibt uns folglich

$$\int_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int_{c''} F(x, y, y')\,dx \geq 0,$$

wobei die Gleichheit nur dann besteht, wenn c' und c'' zusammenfallen.

Ferner sei nun noch daran erinnert, daß nach Paragraph 2 c sicher schwaches relatives Minimum des Integrals (1) ergibt. Bedenken wir,

daß es nach dem Satze 7 stets möglich ist, durch hinreichende Verkleinerung von h zu bewirken, daß alle Kurven der Gesamtheit T_h einer noch so beschränkten Kurvengesamtheit $T_{\varrho\varrho'}$ angehören, so ist es also möglich, eine solche positive Zahl η_2 zu finden, daß, wenn $h < \eta_2$, alle Kurven T_h zu den Kurven gehören, im Vergleich mit welchen das Minimum besteht. Ist $h < \eta_2$ und verläuft c' in dem Gebiete S_h, hat man folglich

$$\int_{c''} F(x, y, y')\,dx - \int_{c} F(x, y, y',)\,dx \geq 0,$$

wobei wieder die Gleichheit nur dann besteht, wenn c'' mit c zusammenfällt. Wenn $\varrho < \eta_1$, η_2 und ε_3, hat man also für jede Kurve c' der Gesamtheit $T_{\varrho\varrho_0'}$

$$\int_{c'} F(x, y, y')\,dx - \int_{c} F(x, y, y')\,dx \geq 0,$$

und wir gelangen somit schließlich, indem wir von dem Ausnahmefalle wo der Ausdruck (9) auf c identisch verschwindet absehen, zu dem folgenden Satze:

Wenn die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(y, \omega)}{\partial(\mu, \lambda)}$ *für jedes Wertsystem*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad \mu = \mu_0, \quad \lambda = \lambda_0$$

und die Ableitung $\frac{\partial^2 H}{\partial y'^2}(x, y, y', \lambda)$ *für alle Wertsysteme*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad y' = y'(x), \quad \lambda = \lambda_0$$

von Null verschieden sind und die Funktion $E(x, y, y', p, \lambda)$ *im Bereiche*

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = y(x), \quad |y' - y'(x)| \leq \varrho_0', \quad p = y'(x), \quad \lambda = \lambda_0$$

dasselbe Vorzeichen behält und nur dann verschwindet, wenn $y' = y'(x)$, *so kann stets* ϱ *so klein gewählt werden, daß die Kurve* c *im Vergleich mit den Kurven der Gesamtheit* $T_{\varrho\varrho_0'}$ *relatives Extremum des Integrals* (1) *ergibt.*

A characteristic property of isothermal systems of curves.

By

EDWARD KASNER of New York.

In connection with a given simply infinite system of curves, either in the plane or in space, we may consider the doubly infinite system composed of all the isogonal trajectories of the given system. The question then suggests itself: When will this doubly infinite system be *linear*, that is, expressible by an equation of the first degree in the two parameters involved? The answer brings to light a new characteristic property of isothermal systems:

The ∞^2 isogonal trajectories constitute a linear (two-parameter) system when, and only when, the given system is isothermal

We note in the first place that all the properties considered are invariant under conformal transformation. Hence in the discussion it will be sufficient to consider systems in the plane. For, any system in space, as well as the isogonal trajectories, determines a surface, and every surface may be represented conformally on the plane.

The proof of the first part of the theorem is simple. Any isothermal system may be conformally transformed into a system of parallel straight lines. The isogonal trajectories of the given system are thus converted into the isogonal trajectories of the parallel lines, that is, into the totality of straight lines. Remembering that a linear system may be defined as one which is equivalent, under the group of all point-transformations, to the totality of straight lines, it follows that the isogonal trajectories of the isothermal system form a linear system. It is easy to confirm this analytically. Let the isothermal system, in terms of its thermometric parameter be

$$\Phi(x, y) = \text{const.},$$

so that Φ is an harmonic function. Then if $\Psi(x, y)$ is the conjugate harmonic function, the isogonal trajectories are

$$\Phi + \text{const.}\ \Psi = \text{const.}$$

We pass now to the second part of the theorem, whose proof is not so evident. If the differential equation of the given system is

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

then that of the isogonal trajectories is

$$y'' = \frac{(1+y'^2)(f_x + y' f_y)}{1+f^2},$$

where the subscripts denote partial differentiation. The discussion is simplified by putting

$$f = \tan F;$$

the equation of the given system is then

$$y' = \tan F, \tag{2}$$

and that of the trajectories is

$$y'' = (1+y'^2)(F_x + y' F_y). \tag{3}$$

We make use now of a fundamental theorem due to S. Lie and R. Liouville*): The differential equation of any linear two-parameter system of curves,

$$f_1(x, y) + \text{const.}\, f_2(x, y) + \text{const.}\, f_3(x, y) = 0,$$

is of the form

$$y' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

where A, B, C, D are functions of x, y fulfilling the conditions:

$$(BD - D_y)_y - (AD + \tfrac{1}{3}B_x - \tfrac{2}{3}C_y)_x + C(AD + \tfrac{1}{3}B_x - \tfrac{2}{3}C_y) - D(AC + A_x) = 0, \tag{4'}$$

$$-(AC + A_x)_x + (AD + \tfrac{2}{3}B_x - \tfrac{1}{3}C_y)_y + B(AD + \tfrac{2}{3}B_x - \tfrac{1}{3}C_y) - A(BD - D_y) = 0; \tag{4''}$$

these conditions are also sufficient.

Applying the conditions to (3), we obtain, for the determination of F, two partial differential equations of the third order, which may be written

$$\Delta_x + 2F_y\Delta = 0, \tag{5'}$$

$$\Delta_y - 2F_x\Delta = 0, \tag{5''}$$

where

$$\Delta \equiv F_{xx} + F_{yy}.$$

The discussion of these equation may be carried out without difficulty.

*) J. éc. polyt., cah. 57 (1887), p. 219. Liouville does not refer to Lie, but the latter, according to Vessiot's report in the Encykl. der Math. (II A 4 b, p. 287), considered the same question in the Norw. Arch. for 1883.

Differentiating the first with respect to y and the second with respect to x and subtracting the results, we have

$$F_x\Delta_x + F_y\Delta_y + \Delta^2 = 0.$$

Eliminating Δ_x and Δ_y from this equation by means of (5′) and (5″), it follows that $\Delta^2 = 0$. Hence the equations (5′), (5″) can be satisfied simultaneously only by $\Delta = 0$, that is, by

$$F_{xx} + F_{yy} = 0.$$

From this it follows, according to a theorem of Lie*), that the given system (1) must be isothermal. This completes the proof of the theorem stated at the beginning.

Incidentally, the previous discussion suggests the answer to a question which is of interest in itself. The conditions (4′), (4″) above determine the differential equations of the second order which are equivalent, under the group of all point-transformations, to $y'' = 0$. We inquire now under what conditions a differential equation is *conformally* equivalent to $y'' = 0$. It is necessary and sufficient that the equation should represent the isogonal trajectories of an isothermal system, that is, it must be of the form (3) and in addition F must be an harmonic function. This result may be restated as follows:

The necessary and sufficient condition in order that a differential equation of the second order shall be equivalent, under the infinite group of conformal transformations, to the equation $y'' = 0$, is that it be of the form

$$y'' = Ay'^3 + By'^2 + Cy' + D,$$

where the coefficients are functions of x, y such that

$$A = C, \quad B = D, \quad A_x - B_y = 0, \quad A_y + B_x = 0.$$

An equation of this type may be integrated by means of three quadratures. First determine the function F as the integral of the exact differential

$$A\,dy + B\,dx;$$

then integrate the equation

$$y' = \tan(F + a),$$

which for every value of the constant a represents an isothermal system, by Lie's method**) involving two quadratures.

New York, December 1903.

*) Lie-Scheffers, Differentialgleichungen, p. 157.

**) Lie-Scheffers, ibid. There is however a simpler method, namely the introduction of minimal coordinates, which involves but one quadrature.

Les séries de factorielles et les opérations fondamentales.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

Dans son grand Mémoire sur les intégrales *eulériennes* Binet*) a remarqué en passant que les séries de factorielles, soumises aux opérations fondamentales du calcul aux différences finies, nous conduiront à des résultats très simples. En effet, on pourra dire, nous le verrons plus bas dans le § 5, que les séries de factorielles sont, de ce point de vue, *formellement* les séries de puissances négatives entières du calcul aux différences finies; mais cette analogie n'est pas générale, comme le montre clairement le § 6 du Mémoire que voici.

Binet fait remarquer aussi que les séries de factorielles, soumises aux deux opérations fondamentales de l'Analyse, savoir la différentiation et l'intégration, nous ne conduiront pas à des résultats simples. En effet, Binet n'a possédé aucun moyen général pour une étude approfondie de telles questions parce qu'il n'a connu aucune théorie générale des séries de factorielles.

Dans des publications récentes**) j'ai donné les fondements d'une telle théorie générale et je me suis proposé d'étudier dans le Mémoire que voici les opérations fondamentales effectuées sur une série de factorielles.

Généralement on pourra dire que les deux opérations fondamentales susdites de l'Analyse sont des opérations naturelles pour une série de puissances, ce qui n'a pas lieu pour les deux opérations fondamentales correspondantes du calcul aux différences finies. En effet, dans une Note***) récente j'ai démontré que l'intégration finie d'une série de puissances ne peut pas être effectuée généralement terme à terme dans le sens ordi-

*) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, p. 126; 1839.

**) Comptes rendus 30 décembre 1901; 20 janvier 1902. Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 409—453; 1902.

***) Mathematische Annalen, t. 59, p. 103; 1904.

naire de ce mot. Voilà certainement la raison du fait que l'Analyse a dominé entièrement pendant le siècle passé, tandis que le calcul aux différences finies n'a fait aucun progrès considérable dans la même époque, ce qui est très regrettable, parce que la définition naturelle et systématique de plusieurs fonctions fondamentales est impossible sans appliquer des équations aux différences finies. Nous nous bornerons à citer ici la fonction gamma, les fonctions sphériques et cylindriques.

Inversement, les deux opérations fondamentales du calcul aux différences finies sont des opérations naturelles pour une série de factorielles tandis que les opérations correspondantes de l'Analyse sont beaucoup plus difficiles; mais ces deux dernières opérations peuvent être effectuées généralement terme à terme et les fonctions ainsi obtenues sont développables dans une série de factorielles aussi.

---

§ 1.

Les fonctions développables en série de factorielles.

Dans mes recherches générales sur les séries de factorielles de cette forme

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{1}$$

où les coefficients b_s sont indépendants de x, j'ai démontré qu'une fonction, développable dans une telle série, doit satisfaire à ces conditions *nécessaires* et *suffisantes* à la fois:*)

1° La fonction $\Omega(x)$ doit se présenter sous forme d'une certaine intégrale définie, savoir:

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt, \tag{2}$$

où la fontion $\varphi(t)$, la *fonction génératrice* de $\Omega(x)$, est holomorphe aux environs du point $t = 1$; de plus, le rayon de convergence de la série de puissances correspondante

$$\begin{cases} \varphi(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots \\ n!\, b_n = (-1)^n \varphi^{(n)}(1) \end{cases} \tag{3}$$

où les coefficients b_s doivent être les mêmes qui figurent dans (1), est égal à l'unité au moins.

2° Le point $t = 0$ peut être point singulier de $\varphi(t)$ mais tel que $\varphi(t)$ a, pour $t = +0$, des dérivées d'un ordre quelconque, et de plus, soit

*) Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 419; 1902.

$\varphi^{(p)}(t)$ la première de ces dérivées, p designant un positif entier fini, qui est infinie pour $t = +0$, il doit être possible de déterminer un nombre réel λ, qui ne surpasse pas une certaine limite, tel que

$$\lim_{t=+0} |t^{x+p} \cdot \varphi^{(p)}(t)| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}, \tag{4}$$

selon que $\Re(x) \gtrless \lambda$. Nous désignons toujours ce nombre λ comme *le premier nombre caractéristique* de $\varphi(t)$.

Cela posé, on peut démontrer*) qu'il est possible de déterminer un positif entier N si grand que, dans tout l'intervalle $0 \leqq t < 1$, nous aurons pour $n \geq N$

$$\left| \frac{t^{x+n} \cdot \varphi^{(p)}(t)}{\Gamma(x+n+1)} \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > E' \end{matrix} \tag{5}$$

selon que $\Re(x) \gtrless \lambda$, tandis que ε et E désignent deux quantités positives aussi petite respectivement aussi grande qu'on le veut.

Dans le cas particulier, où la fonction $\varphi(1-t)$ n'a pas sur la circonférence du cercle $|t| = 1$ d'autres points singuliers outre $t = 1$, les inégalités (5) sont vraies pour $t = 1$ encore.

Supposons que $t = 0$ soit point ordinaire de $\varphi(t)$, nous pouvons dans (4) et (5) admettre $\lambda = -p$, où p désigne un positif entier fini mais aussi grand qu'on le veut.

Considérons maintenant le cas général, où $\varphi(1-t)$ a d'autres points singuliers, outre $t = 1$, situés sur la circonférence susdite, il doit être possible de déterminer un autre nombre réel λ' qui ne surpasse pas une certaine limite et tel que, avec les mêmes désignations que dans (5)

$$\left| \frac{\varphi^{(n)}(1)}{\Gamma(x+n+1)} \right| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > E' \end{matrix} \tag{5^{bis}}$$

selon que $\Re(x) \gtrless \lambda'$; ce nombre λ' est désigné comme *le second nombre caractéristique* de $\varphi(t)$.

Quant à la convergence de la série de factorielles (1), elle présente des propriétés très singulières, nous le verrons plus bas. Généralement nous définissons le champ de convergence de la série (1) comme la partie du plan des x, où cette autre série infinie

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{\Gamma(x+s+1)}$$

est convergente. On voit en vérité que cette série nouvelle et la série $\Omega(x)$ elle-même seront en même temps convergentes ou divergentes à l'exception

*) Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 421; 1902.

dans les points isolés $0, -1, -2, -3, \cdots$ situés peut-être dans le champ susdit.

Cela posé, nous avons démontré cette proposition intéressante concernant la convergence de $\Omega(x)$:

La série $\Omega(x)$ est divergente dans les points isolés $0, -1, -2, -3, \cdots$ situés dans son champ de convergence; mais, designons par ε une quantité positive aussi petite qu'on le veut, la série $\Omega(x-\omega)$, où ω désigne un des points susdits, sera convergente, pourvu que $|x-\omega| > \varepsilon$.

C'est-à-dire que la limite du champ de convergence de $\Omega(x)$ n'est pas déterminée nécessairement par le premier point singulier de la fonction.

Il est très facile de démontrer cette autre proposition aussi:

Supposons finis tous les termes de $\Omega(x)$, la série $\Omega(x')$ sera absolument convergente, pourvu que $\Re(x'-x) > 1$.

En effet, posons

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}, \quad \lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x),$$

nous aurons immédiatement, en posant $x = \xi + i\eta$, $x' = \xi' + i\eta'$,

$$\left| \frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{x'(x'+1)\cdots(x'+n-1)} \right| = \left| \frac{\Gamma_n(x')}{\Gamma_n(x)} \right| \cdot n^{\xi-\xi'}, \tag{6}$$

et voilà la démonstration de la proposition susdite.

Comme corrollaire de notre proposition ainsi démontrée nous avons cette autre:

Supposons développable en série de la forme (1) *une fonction donnée, un tel développement ne peut être effectué que d'une seule manière.*

En effet, si dans l'identité

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s'}{x(x+1)\cdots(x+s)} \tag{α}$$

les deux séries de factorielles sont convergentes toutes les deux pour $x = \omega$, ces deux série sont certainement *absolument* convergentes dans tout le demi-plan défini par l'inégalité $\Re(x) > \Re(\omega) + 1$. Cela posé, multiplions par x les deux membres de (α), puis mettons $\Re(x) = +\infty$, ce qui est permis, nous aurons $b_0 = b_0'$, et ainsi de suite.

Combinons encore les formules (1), (5^{bis}) et (6), nous trouvons cette autre proposition due à M. Pincherle:*)

La série de factorielles $\Omega(x)$ est certainement absolument convergente dans le demi-plan défini par l'inégalité $\Re(x) > \lambda' + 1$.

---

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, février 1902.

§ 2.

Champ de convergence d'une série de factorielles.

Déterminons maintenant, avec plus de détails que dans mon premier Mémoire, le champ de convergence d'une série de factorielles de la forme (1). A cet égard nous avons à prendre comme point de départ la formule (2); nous aurons en intégrant par parties

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} + R_n(x), \tag{7}$$

où nous avons posé pour abrèger

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1)\cdots(x+n)} \cdot \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t)\, t^{x+n}\, dt. \tag{7^{bis}}$$

La formule (7) n'est démontrée que dans le cas, où nous avons supposé à la fois $\Re(x) > 0$ et $\Re(x) > \lambda$, il est vrai; mais, prenons comme point de départ la formule (1), nous verrons que le terme de reste $R_n(x)$ s'exprime toujours à l'aide de (7^{bis}).

Cela posé, appliquons les formules (4), (5) et (5^{bis}), nous aurons immédiatement cette valeur limite

$$\lim_{n=\infty} |R_n(x)| = 0, \tag{8}$$

pourvu que nous ayons à la fois $\Re(x) > \lambda$ et $\Re(x) > \lambda'$, ce qui donnera, en vertu de la proposition de M. Pincherle, cette inégalité

$$\lambda \leqq \lambda' + 1, \tag{9}$$

tandis que nous avons démontré ce théorème général:

La limite du champ de convergence d'une série de factorielles est une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels; c'est la même chose avec la limite du champ de convergence absolue de la série susdite.

Ce résultat a été indiqué sans démonstration par M. Jensen dans son excellent Mémoire sur la fonction gamma.*) De plus, nous aurons cette autre proposition intéressante:

La distance des deux lignes parallèles susdites ne peut jamais être plus grande que l'unité. La convergence d'une série de factorielles est toujours uniforme et la somme d'une telle série est une fonction analytique de x, même dans la bande susdite, où la convergence n'est pas absolue.

Discutons maintenant tous les cas différents dépendants de la grandeur des deux nombres caractéristiques λ et λ':

---

*) Nyt Tidsskrift for Matematik t. II B; 1891.

1° *Le rayon de convergence de la série de puissances obtenue pour* $\varphi(1-t)$ *est plus grand que l'unité, le champ de convergence de* $\Omega(x)$ *est tout le plan des* x.

Considérons par exemple la fonction

$$\beta(x) = -\frac{1}{2}D_x\mathrm{B}\left(\frac{x}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \cdots,$$

nous aurons cette expression intégrale

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt, \tag{10}$$

ce qui donnera la série de factorielles:

$$\beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}}, \tag{10^{bis}}$$

résultat qui peut être démontré aisément d'un point de vue élémentaire*) aussi.

2° $\lambda' \geqq \lambda$; *la série* $\Omega(x)$ *est convergente, pourvu que* $\Re(x) > \lambda'$ *et non absolument convergente dans la bande* $\lambda' < \Re(x) < \lambda' + 1$.

Prenons comme premier exemple la fonction

$$\beta_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}\,dt}{2-t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{x+2} + \cdots, \tag{11}$$

nous aurons

$$\beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0. \tag{11^{bis}}$$

Comme second exemple considérons la fonction

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{x}{3}-1}}{1+t}\,dt = 3\cdot\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^3}\,dt,$$

nous aurons cette série de factorielles

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\sin\frac{2s+1}{6}\pi}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0. \tag{12}$$

3° $\lambda' = \lambda - \varkappa$, *où* $0 < \varkappa < 1$; $\Omega(x)$ *est convergente, pourvu que* $\Re(x) > \lambda$, *et non absolument convergente dans la bande* $\lambda < \Re(x) < \lambda + 1 - \varkappa$.

*) Rivista trimestral di Matemáticas (sous presse).

4^0 $\lambda = \lambda - 1$; $\Omega(x)$ *est toujours absolument convergente, pourvu que* $\Re(x) > \lambda$.

Posons comme premier exemple $\varphi(t) = t^{-\omega}$, nous aurons cette formule élémentaire, due à Stirling:

$$(13) \qquad \frac{1}{x-\omega} = \frac{1}{x} + \sum_{s+1}^{s=\infty} \frac{\omega(\omega+1)\cdots(\omega+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > \Re(\omega).$$

Pour obtenir un exemple plus général désignons par $\psi(t)$ une fonction génératrice qui satisfait aux conditions énumérées dans le § 1 et qui est de plus holomorphe aux environs du point $t = 0$, puis mettons

$$(14) \qquad \Omega(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{-\omega} \cdot t^{x-1} dt,$$

nous aurons

$$\Omega(x) - \frac{\psi(0)}{x-\omega} = \int_0^1 (\psi(t) - \varphi(0)) t^{-\omega} \cdot t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera pour la nouvelle fonction génératrice

$$\varphi(t) = (\psi(t) - \varphi(0)) t^{-\omega}$$

le premier nombre caractéristique égal à $\Re(\omega) - 1$; c'est-à-dire que la série de factorielles obtenue pour la fonction (14) est convergente et cela toujours absolument, pourvu que $\Re(x-\omega) > 0$.

En nous s'appuyant sur nos résultats précédents, nous déduirons immédiatement une proposition intéressante concernant la série de Taylor.

Supposons en effet que dans cette série de puissances, dont le rayon de convergence est égal à $r \geqq 1$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

les coefficients a_n satisfassent à cette condition

$$|n^{-\alpha} \cdot a_n| \begin{matrix} < \varepsilon \\ > E \end{matrix}, \quad \text{pour } n \geqq N,$$

selon que $\alpha \gtrless \lambda'$. De plus, supposons que $f(x)$ ait sur la circonférence du cercle $|x| = r$ des points singuliers

$$x_1 = re^{i\theta_1}, \quad x_2 = re^{i\theta_2}, \quad x_3 = re^{i\theta_3}, \quad \cdots$$

tels que dans ces points les dérivées $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \cdots, f^{(p_n)}(x)$ prises au rayon passant par le point x_n existent et supposons que parmi ces dérivées $f^{(p_n)}(x)$ soit la première qui deviendra infinie mais de sorte que

$$\lim_{\varrho=+0} |\varrho^{\alpha+p_n} f^{(p_n)}((r-\varrho)e^{i\theta_n})| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

selon que $\alpha \gtrless \lambda_n$, nous aurons cette proposition:

Les nombres λ_n et λ' ainsi définies satisfont tous à la condition

$$\lambda_n \leqq \lambda' + 1.$$

§ 3.

Addition et multiplication de deux séries de factorielles.

Considérons maintenant ces deux séries de factorielles

$$(15) \quad \begin{cases} \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, & \Re(x) > \Lambda, \\ \Omega_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, c_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, & \Re(x) > \Lambda', \end{cases}$$

ou bien, comme intégrales définies,

$$(15^{bis}) \qquad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt, \quad \Omega_1(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{x-1} dt,$$

tandis que nous désignons par λ et λ' respectivement par λ_1 et λ_1' les deux classes de nombres caractéristiques des fonctions génératrices $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

Cela posé, on effectuera immédiatement l'addition et la soustraction des deux séries de factorielles $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$, tandis que la multiplication de ces deux séries est beaucoup plus difficile. Or, en m'appuyant sur les résultats précédents, j'ai démontré récemment ce théorème général:*)

Le produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ est toujours développable en série de factorielles qui est convergente, pourvu que nous ayons à la fois

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(x) > \Lambda, \quad \Re(x) > \Lambda',$$

conditions qui sont toujours suffisantes et généralement nécessaires aussi.

Mais naturellement l'expression générale des coefficients de la série de factorielles ainsi obtenue, à l'aide des coefficients donnés b_s et c_s, deviendra très compliquée. Posons

$$(16) \qquad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\, A_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}.$$

nous aurons généralement

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 17 janvier 1904

$$(16^{bis}) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (n-s)!\, s!\, c_{n-s} \cdot B_{n-s,s},$$

où nous avons posé pour abréger

$$B_{r,s} = \sum_{p=0}^{p=r} \binom{r+p}{p} b_{r-p}.$$

Quant à la fonction génératrice du produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$, nous aurons cette expression élégante

$$(17) \qquad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \int_0^1 X(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(17^{bis}) \qquad X(t) = \int_t^1 \psi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = \int_t^1 \varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\psi(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha,$$

formule qui nous fournit un moyen pratique pour former la série de factorielles (16), dont nous avons déterminé en avant le champ de convergence.

Considérons comme premier exemple la fonction $\beta(x)$ introduite dans la formule (10), nous aurons, en vertu de (17^{bis}), cette formule particulière

$$(18) \qquad (\beta(x))^2 = \int_0^1 \frac{2\log(1+t) - 2\log 2 - \log t}{1-t} \cdot t^{x-1}\, dt,$$

que j'ai démontrée récemment par un calcul direct*) aussi; nous trouvons ici cette série de factorielles:

$$(19) \qquad (\beta(x))^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \frac{2^s - 1}{(s+1)2^s}, \quad \Re(x) > 0,$$

qui est toujours *absolument* convergente.

Considérons encore la fonction $\beta_1(x)$ introduite dans (11), nous aurons

$$(20) \qquad (\beta_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{\log(2-t) - \log t}{4-t} \cdot t^{x-1}\, dt,$$

ce qui donnera cette série de factorielles

$$(21) \qquad (\beta_1(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0,$$

*) Annali di Matematica (3), t. 9, p. 203; 1903.

où nous avons posé pour abréger

$$b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s - 1}{s \cdot 3^{n-s+1}}. \tag{21bis}$$

Or, nous avons évidemment

$$|b_n| < 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}} < 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=r} \frac{1}{3^{n-r+1}} + \frac{2}{r+1} \cdot \sum_{s=r+1}^{s=n} \frac{1}{3^{n-s+1}},$$

ce qui donnera cette valeur majorante

$$|b_n| < \frac{1}{3^{n-r}} + \frac{1}{r+1};$$

choisissons maintenant $r = \frac{n}{2}$, $r = \frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair, nous aurons ces deux nombres caractéristiques de la fonction génératrice correspondante: $\lambda = 0$, $\lambda' = -1$; c'est-à-dire que la série de factorielles (21) est toujours *absolument* convergente dans son champ de convergence.

Nous aurons enfin cette autre formule

$$\beta(x)\beta_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(2-t) + \log(1+t) - \log 2 - \log t}{2+t} \cdot t^{x-1} dt, \tag{22}$$

ce qui donnera ce développement en série de factorielles

$$\beta(x)\beta_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0, \tag{23}$$

où nous avons posé pour abréger

$$b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}} \left(1 - (-1)^s - \frac{1}{2^s}\right); \tag{23bis}$$

c'est-à-dire que la série de factorielles (23) est toujours *absolument* convergente dans son champ de convergence.

Comme une autre application de notre théorie de la multiplication de deux séries de factorielles, posons dans (16) $c_0 = 1$, $c_s = 0$ pour $s \geqq 1$, nous aurons particulièrement

$$\Omega_1(x) = \frac{1}{x},$$

d'où, en vertu de (16), cette formule remarquable

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,(b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_s)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \tag{24}$$

qui est certainement valable, pourvu que nous ayons à la fois

$$(24^{bis}) \qquad \Re(x) > 0, \quad \Re(x) > \Lambda.$$

Nous aurons par exemple

$$(25) \quad \begin{cases} \beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, 2 \sin^2 \frac{s+1}{6}\pi}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \\ \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)} \cdot \frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}}, \\ \beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(2s)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+2s+1)}, \end{cases}$$

séries particulières qui sont *absolument* convergentes toutes les trois, pourvu que $\Re(x) > 0$.

La série nouvelle ainsi obtenue pour $\beta(x)$ est une conséquence de cette équation aux différences finies

$$\beta(x) = \frac{1}{x} - \beta(x+1);$$

en effet, mettons dans (10^{bis}) $x+1$ au lieu de x, puis dans (13) $\omega = 1$ et $x+1$ au lieu de x, nous retrouvons la série susdite; de plus, la série obtenue pour $\beta_1(x)$ est une conséquence immédiate de (11^{bis}).

Considérons encore, à cause du résultat remarquable, cette autre série déduite directement de (11^{bis})

$$(26) \qquad 1 - (x-1)\beta_1(x-1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (s+1)!}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > 1,$$

nous aurons immédiatement

$$(26^{bis}) \quad 1 - (x-1)\beta_1(x-1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\left(1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^s (s+1)\right)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)},$$

$$\Re(x) > 0;$$

c'est-à-dire que la série nouvelle (26^{bis}) est *convergente* encore dans la bande $0 < \Re(x) < 1$, où la série (26) elle-même et *divergente*.

Cela posé, les exemples que nous venons de traiter montrent clairement la vérité de cette proposition, très singulière, ce me semble:

Il peut arriver que la série de factorielles obtenue pour le produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ *deviendra absolument convergente dans la bande du plan des* x, *où un ou deux des facteurs susdits ne sont représentés que par une série non absolument convergente. De plus, il peut arriver que la série susdite deviendra convergente hors du champ commun de convergence des deux facteurs.*

§ 4.

Différentiation et intégration d'une série de factorielles.

Une série de factorielles peut être différentiée et intégrée terme à terme dans tout son champ de convergence, parce qu'elle est toujours uniformément convergente, ce qui a lieu aussi pour les deux nouvelles séries ainsi obtenues. Ici nous avons à chercher les développements en séries de factorielles de $\Omega^{(1)}(x)$ et de $\int\Omega(x)\,dx$.

Considérons d'abord la dérivée $\Omega^{(1)}(x)$, nous aurons, en vertu de (2),

$$\Omega^{(1)}(x)=\int_0^1\psi(t)\,t^{x-1}\,dt,\quad \psi(t)=\varphi(t)\log t, \tag{27}$$

de sorte que la nouvelle fonction génératrices $\psi(t)$ a généralement dans $t=0$ un point critique; le nombre caractéristique correspondant λ_1 deviendra égal au plus grand des deux nombres 0 et λ.

Quant au second nombre caractéristique λ_1' de $\psi(t)$, nous aurons d'abord

$$(-1)^n\psi^{(n)}(1)=-n!\left(\frac{b_{n-1}}{1}+\frac{b_{n-2}}{2}+\cdots+\frac{b_0}{n}\right),\quad n\geqq 1;$$

car nous avons généralement $b_s=(-1)^s\varphi^{(s)}(1)$. Désignons maintenant par r un positif entier qui deviendra infiniment grand avec n mais telque

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{r}{n^\varepsilon}\right)=0,$$

où ε désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut, nous aurons une identité de cette forme

$$\frac{1}{n!}\,|\psi^{(n)}(1)|<\frac{Kn^{\lambda'+\varepsilon}}{n-r-1}+K'\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-r}\right)n^{\lambda'+\varepsilon},$$

où K et K' désignent deux quantités positives finies; c'est-à-dire que λ_1' doit être égal au plus grand des deux nombres -1 et λ', de sorte que nous avons démontré ce théorème général:

La dérivée d'une série de factorielles $\Omega(x)$ est développable en série de factorielles comme suit:

$$\Omega^{(1)}(x)=-\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s!\left(\frac{b_{s-1}}{1}+\frac{b_{s-2}}{2}+\cdots+\frac{b_0}{s}\right)}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \tag{28}$$

série qui est convergente dans la partie du champ de convergence de $\Omega(x)$ qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

Les coefficients de la série (28) deviendront assez compliqués même pour les simples fonctions que nous avons introduites dans les deux paragraphes précédents.

Quant à l'intégrale indéfinie de $\Omega(x)$, nous avons immédiatement

$$(29) \qquad \int \Omega(x)\,dx - b_0 \log x + K = \int_0^1 \chi(t)\, t^{x-1}\,dt,$$

où K désigne une constante arbitraire, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(29^{bis}) \qquad \chi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{\log t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{1-t} \cdot \frac{1-t}{\log t},$$

ce qui montre que $\chi(t)$ a dans $t = 0$ un point singulier, dont le nombre caractéristique λ'' est généralement égal au plus grand des deux nombres 0 et λ.

Pour déterminer le second nombre caractéristique λ_1'' de $\chi(t)$ nous aurons évidemment

$$(-1)^n \chi^{(n)}(1) = (D_t^n \chi(1-t))_{t=0} = n! \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_{n-s+1}}{s!} \left(D_t^s \left(\frac{t}{\log(1-t)} \right) \right)_{t=0}.$$

Cela posé, une formule bien connue*) donnera

$$(\alpha) \qquad D_t^n \left(\frac{t}{\log(1-t)} \right)_{t=0} = \frac{n+1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s \binom{n}{s}}{\binom{n+s}{s}} \cdot \frac{C_{n+s}^n}{s+1},$$

où les coefficients C_p^r sont les nombres de Stirling, savoir les nombres positifs entiers définis à l'aide de cette identité

$$(30) \quad x(x+1)\cdots(x+p-1) = C_p^0 x^p + C_p^1 x^{p-1} + \cdots + C_p^r x^{p-r} + \cdots + C_p^{p-1} x.$$

Désignons maintenant par P_n l'expression figurant au second membre de (α), nous verrons qu'il est possible de déterminer un nombre positif fini K tel que

$$|P_n| < (n-1)!\, K,$$

ce qui donnera immédiatement cette autre inégalité

$$|\chi^{(n)}(1)| < K'\, n! \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{b_{n-s-1}}{s+1},$$

où K' désigne un nouveau nombre positif fini, de sorte que le second nombre caractéristique λ_1'' est généralement égal au plus grand des deux nombres -1 et λ'; c'est-à-dire que nous avons démontré cet autre théorème général:

*) Voir par exemple Schlömilch: Compendium, t. II, p. 15; 1879.

La fonction $\int \Omega(x)\,dx - b_0 \log x$ *est développable en série de factorielles comme suit*

$$(31) \qquad \int \Omega(x)\,dx - b_0 \log x = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,(b_1 P_s + b_2 P_{s-1} + \cdots + b_{s+1} P_0)}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

série qui est convergente dans la partie du champ de convergence de la série $\Omega(x)$ *qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.*

On voit que les expressions générales des coefficients de la série (31) sont très compliquées; mais, après avoir démontré la possibilité du développement en série de factorielles de la fonction susdite, nous avons à étudier dans le § 7 ce problème d'un autre point de vue.

§ 5.

Différentiation et intégration finie de $\Omega(x)$.

Remarquons que $\Omega(x+1)$ est absolument convergente dans tout le champ de convergence de $\Omega(x)$, nous aurons immédiatement ce théorème général:

La différence $\Delta\Omega(x) = \Omega(x+1) - \Omega(x)$ *d'une série de factorielles est développable en série de factorielles comme suit:*

$$(32) \qquad \Delta\Omega(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)!\,b_s}{x(x+1)\cdots(x+s+1)},$$

série qui a le même champ de convergence que $\Omega(x)$.

Supposons ensuite

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,t^{x-1}\,dt,$$

nous aurons immédiatement

$$(32^{bis}) \qquad \Delta\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,(t-1)\,t^{x-1}\,dt$$

Quant à l'opération inverse $\Delta^{-1}\Omega(x)$, nous aurons immédiatement, en vertu de (32), cette formule

$$\Delta^{-1}\left(\Omega(x) - \frac{b_0}{x}\right) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,b_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

où la nouvelle série de factorielles est convergente dans tout le champ de convergence de $\Omega(x)$.

Or, l'opération Δ^{-1} effectuée sur une somme *finie* étant *distributive*, nous aurons

$$\Delta^{-1}\left(\Omega(x)-\frac{b_0}{x}\right)=\Delta^{-1}\Omega(x)-b_0\Delta\frac{1}{x},$$

où la dernière intégration finie nous conduira à la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, savoir la fonction

$$\Psi(x)=D_x\log\Gamma(x)=-C+\sum_{s=0}^{s=\infty}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{x+s}\right), \tag{33}$$

où C désigne la constante d' Euler.

Cela posé, nous avons démontré cet autre théorème général:

Pour l'intégrale finie de $\Omega(x)$, nous obtenons cette expression

$$\Delta^{-1}\Omega(x)=b_0\Psi(x)+\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{s!\,b_{s+1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}+J(x), \tag{34}$$

où la nouvelle série de factorielles a le même champ de convergence que $\Omega(x)$, tandis que $J(x)$ désigne une fonction arbitraire de x assujettie seulement à satisfaire à cette condition de périodicité $J(x+1)=J(x)$.

Quant à la représentation intégrale de $\Delta^{-1}\Omega(x)$, nous aurons tout d'abord

$$\Omega(x)-\frac{\varphi(1)}{x}=\int_0^1(\varphi(t)-\varphi(1))t^{x-1}dt,$$

ce qui donnera, en vertu de (32bis) et (34),

$$\Delta^{-1}\Omega(x)=\varphi(1)\Psi(x)+\int_0^1\frac{\varphi(1)-\varphi(t)}{1-t}t^{x-1}dt+J(x);$$

de plus, nous aurons évidement

$$\Psi(x)+C=\int_0^1\frac{1-t^{x-1}}{1-t}dt,$$

d'où finalement

$$\Delta^{-1}\Omega(x)=\int_0^1\frac{\varphi(1)-\varphi(t)t^{x-1}}{1-t}dt+J_1(x), \tag{34bis}$$

où $J_1(x)$ désigne une nouvelle fonction arbitraire périodique de x.

On voit que l'analogie entre les formules (32) et (34) et les résultats analogues obtenus en différentiant ou en intégrant une série de puissances négatives entières est perfaite. Dans ces circonstances il est digne d'être remarqué que j'ai démontré récemment*) qu'une série de factorielles

*) Annales de l'École Normal (3), t. 21, p. 453; 1904.

peut être transformée à une série de puissances négatives entières, série qui est ou convergente ou asymptotique d'après la définition de M. Poincaré*) dans tous les points très éloignés du demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

§ 6.

Sur les équations linéaires aux différences finies.

Comme application de nos formules générales nous avons à considérer cette équation linéaire aux différences finies:

$$\sum_{s=0}^{s=n} a_s(x) f(x+n-s) = g(x), \tag{35}$$

où la fonction $g(x)$ au second membre et les coefficients $a_s(x)$ désignent des fonctions données développables en séries de factorielles; nous cherchons une intégrale particulière de (35) développable en série de factorielles aussi.

A cet égard mettons

$$\begin{cases} g(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \dfrac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)} \\ a_s(x) = \int_0^1 \psi_s(t)\, t^{x-1} dt, \quad s = 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \end{cases} \tag{36}$$

nous avons à chercher la fonction génératrice inconnue $\Phi(t)$, telle que

$$f(x) = \int_0^1 \Phi(t)\, t^{x-1} dt \tag{36bis}$$

est intégrale particulière de (35).

Cela posé, nous aurons, en vertu des formules générales (14),

$$a_s(x) f(x+n-s) = \int_0^1 X_s(t)\, t^{x-1} dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$X_s(t) = \int_t^1 \psi_s\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Phi(\alpha)\, \alpha^{n-s-1} d\alpha,$$

*) Acta mathematica, t. 8, p. 297; 1886.

ce qui montrera, en vertu de (35), qu'il s'agit de déterminer $\Phi(t)$ à l'aide de cette identité intégrale:

$$(37) \qquad \int_i^1 \Psi(t,\alpha)\Phi(\alpha)\,d\alpha = \varphi(t),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(37^{bis}) \qquad \Psi(t,\alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} \psi_s\left(\frac{t}{\alpha}\right)\alpha^{n-s-1}.$$

On voit que la détermination générale de $\Phi(t)$ est en tous cas très difficile; certainement une telle détermination n'est pas toujours possible. De plus, supposons déterminée la fonction $\Phi(t)$, il faut qu'elle satisfasse encore aux conditions énumérées dans le commencement du § 1. C'est-à-dire que les séries de factorielles sont de ce point de vue beaucoup plus compliquées que les séries convergentes de puissances négatives entières.

Considérons particulièrement le cas plus simple, où les coefficients de notre équation linéaire sont des constantes, savoir l'équation

$$(38) \qquad \sum_{s=0}^{s=n} a_s \cdot f(x+n-s) = g(x),$$

où $g(x)$ est une fonction donnée définie à l'aide des expressions (36), nous aurons ici pour la fonction génératrice $\Phi(t)$ cette expression

$$(39) \qquad \Phi(t) = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(39^{bis}) \quad F(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_p t^{n-p} + \cdots + a_{n-1} t + a_n.$$

Cela posé, il est évident que la fonction $\Phi(t)$ figurant au premier membre de (39) peut être transformée à une somme de termes de cette forme

$$(40) \qquad \xi(t) = \frac{k\varphi(t)}{(t-\alpha)^r},$$

où k désigne une constante finie, tandis que r est un positif entier égal à n au plus, ce qui donnera immédiatement

$$(40^{bis}) \qquad (-1)^p \xi^{(p)}(1) = \frac{p!}{(1-\alpha)^r} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \binom{r+s-1}{s} \cdot \frac{b_{p-s}}{(1-\alpha)^s}.$$

Supposons maintenant $|1-\alpha| \geqq 1$, nous verrons que la fonction $\xi(1-t)$, déduite de (40), est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t| = 1$; c'est-à-dire que nous avons demontré ce théorème nouveau, je le crois:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (38) *a une intégrale particulière développable en série de factorielles est que l'équation algébrique* (39^{bis}) *n'a aucune de ses racines situées à l'intérieur du cercle* $x^2 + y^2 = 2x$.

De plus, la formule (40^{bis}) donnera immédiatement:

Si toutes les racines de (39^{bis}) *sont situées hors du cercle susdit, la série de factorielles obtenues pour* $f(x)$ *a le même champ de convergence que* $g(x)$, *sinon, il faut admettre encore* $\Re(x) > r - 1$, *où* r *désigne le plus grand ordre de multiplicité des racines de* (39^{bis}).

Les coefficients, très compliqués du reste, de la série de factorielles obtenue pour $f(x)$ se déterminent à l'aide de (40^{bis}) et des formules analogues. De plus, nous savons à intégrer, à l'aide des fonctions exponentielles, l'équation homogène obtenue de (38) en y mettant $g(x) = 0$; c'est-à-dire que nous connaissons, sous les conditions susdites, l'intégrale complète de notre équation non homogène.

Supposons généralement que $F(t)$ n'ait aucune racine située entre 0 et 1 outre les zéros de $\varphi(t)$, il est évident qu'une intégrale particulière de (38) se présente sous cette forme

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{F(t)} \cdot t^{x-1} dt;$$

il est digne d'être remarqué aussi que les intégrales particulières de l'équation homogène qui correspond à (38) ne sont jamais développables en séries de factorielles.

Considérons par exemple cette équation du premier ordre

$$f(x+1) = g(x) + \frac{1}{\omega} f(x), \tag{41}$$

où ω est une constante par rapport à x, nous aurons

$$\Phi(t) = \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t),$$

ce qui exige pour ω cette condition

$$\left| \frac{\omega}{\omega - 1} \right| \leqq 1, \quad \Re(\omega) \leqq \frac{1}{2}; \tag{41^{bis}}$$

cette condition remplie, nous trouvons cette série de factorielles

$$f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \left(\frac{\omega}{\omega - 1} b_n + \left(\frac{\omega}{\omega - 1} \right)^2 b_{n-1} + \cdots + \left(\frac{\omega}{\omega - 1} \right)^{n+1} b_0 \right) \tag{42}$$

et cette représentation intégrale

$$(42^{bis}) \qquad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t) \cdot t^{x-1} dt,$$

intégrale qui satisfait toujours à (41), pourvu qu'elle ait un sens.

Dans le cas beaucoup plus particulier encore, où $g(x) = \frac{1}{x}$, nous aurons pour l'équation correspondante

$$(43) \qquad f(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot f(x)$$

une intégrale particulière de cette forme

$$(43^{bis}) \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\cdots(x+s)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{s+1}.$$

Supposons particulièrement $\omega = -1$, $\omega = \frac{1}{2}$, nous retrouvons les séries de factorielles développées dans le § 2, formules (10^{bis}) et (11^{bis}), pour les fonctions $\beta(x)$ et $\beta_1(x)$.

Enfin, remarquons en passant que le résultat (42) peut être obtenu directement de (41) sans introduire des intégrales définies, mais en appliquant simplement la formule générale (24) pour le développement de $f(x)$ et $g(x)$ en séries de factorielles de l'argument $x + 1$.

§ 7.

Recherches nouvelles sur les fonctions $\frac{1}{x} \cdot \Omega(x)$, $\Omega^{(1)}(x)$ et $\int \Omega(x)\, dx$.

Pour simplifier la formule (31) concernant l'intégration indéfinie d'une série de factorielles nous avons à étudier d'un autre point de vue la fonction

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\, t^{x-1} dt - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\, b_s}{x(x+1)\cdots(x+s)},$$

ce qui nous conduira à des résultats nouveaux très singulières.

A cet égard mettons dans l'intégrale susdite $t = e^{-s}$, nous aurons

$$(44) \qquad \Omega(x) = \int_0^\infty f(s)\, e^{-sx} ds, \quad f(s) = \varphi(e^{-s}),$$

ou, ce qui revient au même:

$$(44^{bis}) \qquad \varphi(t) = f(-\log t),$$

d'où, en vertu d'une formule bien connue*),

$$(\alpha) \qquad (-1)^n \varphi^{(n)}(1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot (f^{(n-s}(t))_{t=0},$$

où les coefficients C_n^s désignent les nombres de Stirling définis à l'aide de l'identité (30).

On voit que $f(z)$ doit être holomorphe aux environs du point $z=0$, posons

$$(\beta) \qquad f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{s!} \cdot z^s,$$

nous aurons $b_0 = a_0$ et généralement, en vertu de (α),

$$(45) \qquad n!\, b_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot a_{n-s},$$

ce qui donnera pour la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$ cette nouvelle expression

$$(45^{bis}) \qquad \Omega(x) = \frac{a_0}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s C_s^0 + a_{s-1} C_s^1 + \cdots + a_1 C_s^{s-1}}{x(x+1)\cdots(x+s)}.$$

Substituons maintenant dans l'intégrale définie figurant au second membre de (44) la série de puissances (β), puis, supposons convergente la série ainsi obtenue en intégrant terme à terme, nous aurons pour $\Omega(x)$ ce développement en série de puissances négatives entières

$$(46) \qquad \Omega(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \cdots.$$

Si, au contraire, la série figurant au second membre de (46) est divergente, nous aurons cette série asymptotique

$$(46^{bis}) \qquad \Omega(x) \sim \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^n},$$

valable, comme je l'ai fait voir récemment**) dans tous les points très éloignés du demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires; la signe $\sim$ désigne une égalité asymptotique d'après la définition de M. Poincaré***).

Revenons maintenant à la formule élémentaire (13), différentions

---

*) Voir par exemple Schlömilch: Compendium, t. II, p. 12; 1879.

**) Annales de l'École Normale (3), t. 21, p. 453; 1904.

***) Acta Mathematica, t. 8, p. 297; 1886.

$n+1$ fois par rapport à α, puis mettons $\alpha = 0$, nous aurons ce développement en série de factorielles:

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-n}}{x(x+1)\cdots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0. \tag{47}$$

Cela posé, supposons *convergente* la série de puissances négatives entières (46), pourvu que $|x| > \Lambda$, puis développons, à l'aide de (47), tous les termes de cette série, nous aurons une série à double entrée, dont toutes les séries horizontales et verticales sont absolument convergentes, pourvu que $\Re(x) > \Lambda$, ce qui donnera, en vertu de (45bis), précisément la série de factorielles données pour $\Omega(x)$. De plus, supposons *divergente* la série asymptotique (46bis), puis appliquons sur les termes de cette série *formellement* la même méthode, nous retrouvons encore la série de factorielles connue pour $\Omega(x)$; c'est-à-dire que nous avons démontré la légitimité de cette opération avec une série *divergente:*

Supposons développable en série de factorielles la fonction $\Omega(x)$ *et formons la série de puissances négatives* (46), *puis appliquons à tous les termes de cette série l'opération* (47), *nous obtenons la série de factorielles de* $\Omega(x)$, *soit que la série* (46) *est convergente, soit qu'elle est divergente.*

Appliquons maintenant cette méthode aux trois fonctions

$$\frac{1}{x} \cdot \Omega(x), \quad \Omega^{(1)}(x), \quad \int \Omega(x)\, dx,$$

pour lesquelles nous avons démontré l'existence de la série de factorielles susdite dont nous avons déterminé le champ de convergence aussi.

En premier lieu mettons dans (47) $n+1$ au lieu de n, puis multiplions par x la formule nouvelle, nous aurons

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-n-1}}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0,$$

puis appliquons cette formule de la même manière que (46), nous aurons cette autre forme de la série (24)

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s C_{s+1}^0 + a_{s-1} C_{s+1}^1 + \cdots + a_0 C_{s+1}^s}{(x+1)(x+2)\cdots(x+s+1)}, \tag{48}$$

formule qui est très remarquable en comparaison avec (45bis).

Dans son grand Mémoire sur les intégrales *eulériennes* Binet*) a développé ou indiqué au moins les deux systèmes des séries de factorielles qui correspondent à (45bis) et (48) pour ces deux fonctions

*) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, pp. 231, 234, 258, 339; 1839.

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x),$$
$$\omega(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \log x + x - \log \sqrt{2\pi},$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de Gauss définie par la formule (33). Dans son excellent Mémoire sur la fonction gamma M. Jensen*) a développé les quatre séries susdites en appliquant la méthode que nous venons d'indiquer, tandis que j'ai déduit récemment**) les mêmes formules à l'aide de la série élémentaire (13) de Stirling, méthode qui détermine complètement les champs de convergence des séries susdites, ce qui est impossible par la méthode précédente.

Quant à la dérivée $\Omega^{(1)}(x)$, nous aurons la série de factorielles correspondante en mettant simplement dans (45^{bis}) $-na_{n-1}$ au lieu de a_n, ce qui donnera généralement

$$(49) \qquad \Omega^{(1)}(x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s a_{s-1} C_s^0 + (s-1) a_{s-2} C_s^1 + \cdots + 1 \cdot a_0 C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}.$$

De la même manière nous obtenous la série de factorielles de $\int \Omega(x)\,dx - a_0 \log x$ en mettant dans (45^{bis}) $-\frac{a_{n+1}}{n+1}$ au lieu de a_n, ce qui donnera

$$(50) \quad a_0 \log x - \int \Omega(x)\,dx = \frac{a_1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{a_{s+1}}{s+1} \cdot C_s^0 + \frac{a_s}{s} \cdot C_s^1 + \cdots + \frac{a_2}{2} \cdot C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+s)}.$$

L'analogie entre les quatre formules (45^{bis}), (48), (49) et (50) est frappante; mais il doit être remarqué expressément que la méthode nouvelle que nous venons d'appliquer est *impossible* comme méthode *indépendante*, car:

1° La méthode n'est appliquable qu'aux fonctions développables en série de puissances négatives de la forme (46), propriété qui n'est point de tout *nécessaire*; par exemple la fonction $\beta(x)$ figurant dans la formule (10^{bis}) est développable en série de factorielles convergente dans toute l'étendue du plan des x; mais cette fonction n'est pas développable en série convergente de la forme (46).

2° Dans le cas particulier, où $\Omega(x)$ est développable en série de puissances de la forme (46), la méthode susdite ne détermine pas généralement le champ complet de convergence de la série de factorielles ainsi obtenue.

Copenhague, le 27 janvier 1904.

---

*) Nyt Tidsskrift for Mathematik, t. II B; 1891.

**) Archiv der Math. u. Ph. (3) t. 6, p. 223—231; Annali di Mathematica (3) t. 9, p. 237—245; 1903.

Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen.

Von

C. Carathéodory in Göttingen.

§ 1.

Dualistische Betrachtungen, wie sie in der Geometrie üblich sind, führen zu einer sehr elementaren Begründung der Theorie der Charakteristiken für die Differentialgleichung

$$F(x, y, z; p, q) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q. \tag{1}$$

Mit S. Lie kann man diese Gleichung als ein vierdimensionales Gebilde von *Flächenelementen* ansehen, wenn man unter Flächenelement einen Punkt und eine durch ihn gehende Ebene versteht. Die eindimensionalen Elementvereine der Differentialgleichung wollen wir dann in *Elementkegel*, *Elementplankurven* und *Elementstreifen* einteilen, die folgendermaßen definiert sind:

1. Der *Elementkegel* im Punkte $x\,y\,z$ ist der Inbegriff aller Flächenelemente von (1), die durch diesen Punkt gehen.

Die Erzeugenden der Elementkegel genügen bekanntlich den Gleichungen

$$\frac{X-x}{F_p} = \frac{Y-y}{F_q} = \frac{Z-z}{pF_p + qF_q} \tag{2}$$

wo X, Y, Z laufende Koordinaten bedeuten.

2. Die *Elementplankurve* in der Ebene

$$z = px + qy + c$$

ist der Inbegriff sämtlicher Flächenelemente von (1) welche in dieser Ebene liegen; hierbei bedeuten p, q, c konstante Parameter.

Die Projektion dieser Kurve auf die XY Ebene und die ihrer Tangente im Punkte x, y lauten:

$$F(x, y, c+px+qy;\ p, q) = 0,$$

$$(F_x+pF_z)(X-x)+(F_y+qF_z)(Y-y) = 0. \tag{3}$$

3. Als *Elementstreifen* wollen wir alle übrigen eindimensionalen Elementvereine der Differentialgleichung (1) bezeichnen.

Sie bestehen aus einer Kurve c_1

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)$$

und einer abwickelbaren Fläche durch diese Kurve, welche von den Ebenen

$$Z - z(t) = p(t)(X-x(t)) + q(t)(Y-y(t)) \tag{4}$$

umhüllt wird; p und q werden als Funktionen von t durch die Gleichungen

$$F(x, y, z;\ p, q) = 0,$$

$$z'(t) = p\,x'(t) + q\,y'(t) \tag{5}$$

bestimmt.

In jedem Flächenelement des Streifens gibt es vier ausgezeichnete Richtungen, nämlich: die Tangente t_1 der Kurve c_1 des Streifens und die Erzeugende e_1 seiner abwickelbaren Fläche; die Tangente t_2 der Elementplankurve c_2, und die Erzeugende e_2 des Elementkegels k im betrachteten Flächenelemente (Fig. 1).

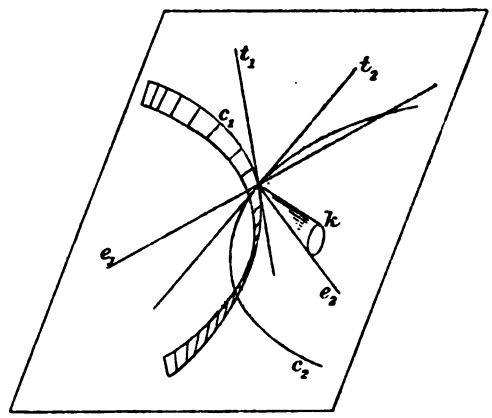


Fig. 1.

Die Projektion dieser Richtungen auf die XY Ebene lauten folgendermaßen:

a) Für t_1

$$\frac{dx_1}{x'(t)} = \frac{dy_1}{y'(t)}. \tag{6}$$

b) Für t_2 wegen (3)

$$(F_x+pF_z)\,dx_2 + (F_y+qF_z)\,dy_2 = 0. \tag{7}$$

c) Für e_1 erhält man durch Differentiation von (4) nach t mit Berücksichtigung von (5)

$$p'(t)\,dx_3 + q'(t)\,dy_3 = 0. \tag{8}$$

d) Für e_2 wegen (2)

$$\frac{dx_4}{F_p} = \frac{dy_4}{F_q}. \tag{9}$$

Außerdem haben wir, weil die Gleichung (1) längs des ganzen Streifens gilt

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' + F_p p' + F_q q' = 0$$

oder nach (5)

$$(F_x+pF_z)x' + (F_y+qF_z)y' + F_p p' + F_q q' = 0. \tag{10}$$

Wenn nun e_1 und e_2 zusammenfallen, d. h. die Gleichung

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{dy_4}{dx_4}$$

gilt, so muß nach (8), (9)

$$F_p p' + F_q q = 0$$

sein. Dieses in (10) eingesetzt liefert

$$(F_x + p F_z) x' + (F_y + q F_z) y' = 0$$

und diese letzte Gleichung besagt nichts anderes, als daß

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_3}{dx_3},$$

also daß die Richtungen t_1 und t_2 auch zusammenfallen.

Hieraus folgt unmittelbar folgender Satz:

Fällt in einem Flächenelement eines Elementstreifens die Erzeugende e_1 der abwickelbaren Fläche des Streifens zusammen mit der Erzeugenden e_2 des Elementkegels in diesem Flächenelemente, so fallen auch die Tangente t_1 der Kurve des Streifens und die Tangente t_2 der Elementplankurve im betrachteten Flächenelemente zusammen; und umgekehrt.

§ 2.

Mongesche Kurven nennt man bekanntlich solche Kurven, deren Tangenten in jedem Punkte mit einer der Erzeugenden des Elementkegels in diesem Punkte zusammenfallen.

Als *Mongesche abwickelbare Flächen* wollen wir dementsprechend solche abwickelbaren Flächen bezeichnen, deren Erzeugende e in jeder Tangentialebene mit einer der Tangenten t_2 der Elementplankurve c_2 in dieser Ebene zusammenfällt (Fig. 2).

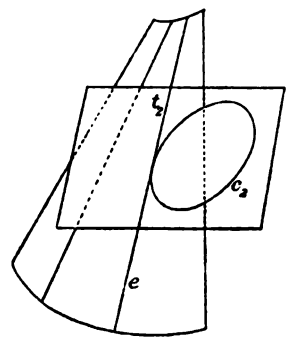


Fig. 2.

Ist eine beliebige Fläche Σ im Raume vorgelegt, so bestimmt in jedem Punkte P von Σ der Schnitt des Elementkegels in diesem Punkte mit der Tangentialebene der Fläche mindestens eine (reelle oder imaginäre) Richtung e_2. Diese sämtlichen Richtungen können in einer einfachen Schar von Mongeschen Kurven γ_1 vereinigt werden, welche auf der Fläche Σ liegen.

Ähnlich kann man durch diesen Punkt mindestens eine Tangente t_2 an die Elementplankurve legen, welche in der Tangentialebene von Σ in P liegt.

Die zu diesen Richtungen t_2 konjugierten Richtungen können abermals

zu einer Schar von Kurven γ_2 vereinigt werden. Ist Σ selbst keine abwickelbare Fläche, so sind die abwickelbaren Flächen, welche die Fläche Σ längs einer Kurve γ_2 umhüllen, Mongesche Flächen.

Es sei jetzt Σ eine Integralfläche der Gleichung (1) und γ_3 eine Kurve, welche der Schar von Mongeschen Kurven auf dieser Fläche konjugiert ist. Dann fallen für den Elementstreifen längs γ_3 die Richtungen e_1 und e_2 zusammen und infolge des oben bewiesenen Satzes berührt γ_3 in jedem ihrer Punkte die Elementplankurve in der Tangentialebene dieses Punktes.

Mit anderen Worten: *Es sind die Richtungen e_2 und t_2 der Erzeugenden des Elementkegels und der Tangente der Elementplankurve in jedem Flächenelemente einer Integralfläche konjugiert, und es fallen die Kurvenscharen γ_1 und γ_2 zusammen.*

Man nennt bekanntlich *charakteristische Streifen* der Differentialgleichung (1) Elementstreifen, welche eine der Mongeschen Kurven einer Integralfläche enthalten.

Wir haben also folgende Eigenschaft der charakteristischen Streifen erkannt:

Die charakteristischen Streifen einer Gleichung $F(x, y, z; p, q) = 0$ sind Elementstreifen, welche die Eigenschaft haben, zu gleicher Zeit aus einer Mongeschen Kurve und einer Mongeschen abwickelbaren Fläche zu bestehen.

Es müssen also für diese Streifen wegen der obigen Definition die Richtungen t_1 mit e_2, t_2 mit e_1 zusammenfallen; und es gelten die Gleichungen

$$(11) \qquad \frac{x'(t)}{F_p} = \frac{y'(t)}{F_q} = \lambda, \quad \frac{p'(t)}{F_x + pF_z} = \frac{q'(t)}{F_y + qF_z} = \mu$$

oder wegen (10)

$$(12) \qquad [(F_x + pF_z)F_p + (F_y + qF_z)F_q](\lambda + \mu) = 0.$$

Verschwindet der erste Faktor dieser Gleichung nicht, so muß $(\lambda + \mu) = 0$ sein, und wir haben, indem wir die Gleichung (5) noch hinzuziehen,

$$(13) \qquad \frac{x'(t)}{F_p} = \frac{y'(t)}{F_q} = \frac{z'(t)}{pF_p + qF_q} = \frac{p'(t)}{-(F_x + pF_z)} = \frac{q'(t)}{-(F_y + qF_z)}.$$

Dieses sind aber die gewöhnlichen Gleichungen der Charakteristiken.

Im allgemeinen Falle, wo

$$(F_x + pF_z)F_p + (F_y + qF_z)F_q + 0,$$

ist also der bewiesene Satz hinreichend, um die Charakteristiken zu definieren.

§ 3.

Im Falle wo dieser Ausdruck identisch verschwindet, gehört die Differentialgleichung (1) einem nichtlinearen Strahlenkomplex an*). Die Elementkegel der Differentialgleichung fallen mit den Elementkegeln des Komplexes zusammen, während die Elementkurven der Differentialgleichung nichts anderes als die ebenen Komplexkurven sind. Für *jeden* Elementstreifen welcher eine Mongesche Kurve enthält, fallen die vier Richtungen t_1, t_2, e_1, e_2 zusammen, und die abwickelbare Fläche eines solchen Streifens, welche hier die Kurve des Streifens als Rückkehrkante besitzt, ist *immer* eine Mongesche abwickelbare Fläche.

Unsere Überlegungen reichen nicht mehr aus, um die Charakteristiken zu definieren, und man müßte die Gleichung $(\lambda+\mu)=0$ durch einen Grenzübergang gewinnen.

§ 4.

Wir haben gesehen, daß für jede Integralfläche der Differentialgleichung (1) die zwei ausgezeichneten Richtungen t_2, e_2 der Tangente der Elementplankurve und der Erzeugenden des Elementkegels in jedem Flächenelemente konjugiert sind. Man kann nach der Gesamtheit der Flächen fragen, die durch diese Eigenschaft definiert sind. Durch leichte Rechnungen findet man dann, daß es Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \tag{14}$$

sein müssen. A, B, C sind Funktionen von x, y, z, p, q.

Die Gleichung (1) ist ein intermediäres Integral der Gleichung (14); und die charakteristischen Streifen von (14) enthalten abermals eine Mongesche Kurve und eine Mongesche abwickelbare Fläche von (1), aber es brauchen keine Elementstreifen von (1) zu sein.

Nimmt man z. B. für (1) die Gleichung

$$1+p^2+q^2=0,$$

so findet man als Integralflächen von (14)

a) entweder solche, für welche die Minimalkurven Asymptotenkurven sind. Die Kugel ist die einzige reelle Fläche dieser Art,

b) oder solche, für welche die Minimalkurven konjugiert sind. Diese Eigenschaft führt aber auf Minimalflächen.

Ebenfalls könnte man nach solchen Flächen fragen, welche durch die Eigenschaft definiert sind, daß die Richtungen t_2, e_2 aufeinander senkrecht

*) Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen p. 640.

stehen, oder zusammenfallen. Dieses führt auf Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Phi(x, y, z; p, q) = 0, \qquad \Psi(x, y, z; p, q) = 0.$$

Die gemeinsamen Integralflächen dieser letzten Gleichungen mit der Gleichung (1), wenn solche existieren, liefern solche Integralflächen von (1), für welche die Charakteristiken Asymptotenkurven oder Krümmungslinien sind, das heißt auf Fragen, die von Lie behandelt worden sind.

Göttingen, Februar 1904.

Nachträgliche Bemerkung des Verfassers:
Statt Elementkurve wird man besser sagen Elementplankurve.

Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili.

Di

T. Levi-Civita a Padova.

[Estratto da una lettera al Sig. Prof. P. Stäckel, a Kiel.]

In questi giorni ho avuto occasione di rivedere le Sue belle ricerche*) sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(p_1, p_2, \cdots, p_n;\ x_1, x_2, \cdots, x_n) = h$$

$\left(p_1 = \frac{dW}{dx}, p_2 = \frac{dW}{dx}, \cdots;\ h \text{ costante arbitraria}\right)$ per separazione di variabili.

Ho notato che si possono facilmente assegnare (sotto forma esplicita di equazioni a derivate parziali rapporto agli argomenti p ed x) le condizioni necessarie e sufficienti, cui deve soddisfare una H affinchè la equazione

$$H - h$$

ammetta un integrale completo della forma

$$\sum_1^n{}_i W_i$$

(W_i funzione della sola x_i).

Da queste condizioni scaturiscono alcune conseguenze di indole generale, che mi sembrano abbastanza interessanti, per quanto il dedurre da esse la completa risoluzione del problema apparisca ancora laborioso, e non vi sia nemmeno — oserei affermare — grande speranza di trovare tipi essenzialmente nuovi, oltre quelli da Lei scoperti.

Conumque penso di non farle cosa sgradita comunicandole quel poco, che io ho fatto in argomento, e come si possa tra altro ricavarne una discussione elegante per il caso di due variabili, già trattato dal

---

*) Habilitationsschrift, Halle 1891; od anche Mathem. Annalen, Bd. XLII, S. 546—549.

Prof. Morera*) e da Lei**) in modo esauriente, ma forse non altrettanto semplice.

Ecco dunque le mie osservazioni.

1. La ipotesi che W sia della forma $\sum_1^n{}_i W_i$ equivale a

$$\frac{dp_i}{dx_j} = 0 \qquad (i \gtrless j).^{***}) \tag{1}$$

D'altra parte, derivando la equazione $H = h$ rispetto ad una generica x_i e notando che H dipende da x_i direttamente, e pel tramite delle p, si ha

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

e, per conseguenza, avuto riguardo alle (1),

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0.$$

Ora, nei casi, che veramente corrispondono ad una equazione di Hamilton-Jacobi, nessuna $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ può essere identicamente nulla, e peciò queste equazioni equivalgono a

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}. \tag{2}$$

Le (1) e (2) definiscono così tutte le derivate delle p. Perchè poi effettivamente esistano delle funzioni p, aventi quelle derivale (e allora, in virtù delle (1), esiste anche la W), dovranno essere soddisfatte le condizioni di integrabilità, le quali, come tosto apparisce, si riducono a

$$\frac{d}{dx_j}\left\{\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{\frac{\partial H}{\partial p_i}}\right\} = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

ossia, sviluppando il simbolo operativo $\frac{d}{dx_j}$ in $\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{dp_j}{dx_j}\frac{\partial}{\partial p_j}$, e tenendo conto delle (2), a

---

*) Atti della R. Accademia di Torino, Vol. XVI, 1881.

**) Mathem. Annalen, Bd. XXXV.

***) Si intende che agli indici i, j, e così a quelli, che compariranno in seguito, si devono attribuire tutti i valori da 1 ad n, compatibili colle eventuali restrizioni, esplicitamente dichiarate.

$$(3)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Essendo definite tutte le derivate delle p, rimangono arbitrari al più i loro valori iniziali. Questi valori iniziali debbono effettivamente restare arbitrari quando si tratti, come noi supponiamo, di un integrale completo W della equazione di Hamilton-Jacobi (in cui — non lo si dimentichi — la costante h del secondo membro è a priori arbitraria e deve intendersi determinata in base ai valori iniziali).

Siccome poi, per la completa arbitrarietà dei valori iniziali delle p, è necessario e basta che le condizioni di integrabilità (3) sieno soddisfatte *identicamente*, rispetto a tutte le $2n$ lettere p ed x, possiamo senz' altro concludere:

La equazione di Hamilton-Jacobi

$$H = h$$

(dove è sottointeso che H contiene esplicitamente *tutte* le p) *è integrabile per separazione di variabili allora, e allora soltanto, che la funzione caratteristica* H *soddisfa alle* $\frac{n(n-1)}{2}$ *equazioni di second' ordine* (3).

2. Supponiamo che H corrisponda ad un problema dinamico a legami indipendenti dal tempo e sia, colle solite notazioni,

$$(4)\qquad T = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs} x_r' x_s'$$

la forza viva del sistema, U il potenziale delle forze attive.

Essendo $a^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca a T, ove si ponga

$$(5)\qquad K = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{rs} a^{(rs)} p_r p_s,$$

avremo

$$(6)\qquad H = K - U;$$

inoltre, come è ben noto,

$$(7)\qquad x_i' = \frac{\partial K}{\partial p_i},$$

$$(8)\qquad \frac{\partial K}{\partial x_i} = -\frac{\partial T}{\partial x_i},$$

nel primo membro delle (8) risguardandosi le x e le p, nel secondo le x e le x' come variabili indipendenti.

Ciò posto, introduciamo per H il suo valore $K-U$ nei primi membri delle (3), e notiamo che essi con ciò comprendono una parte di quarto grado nelle p, una di secondo, e una di grado zero.

Dacchè si tratta di identità, i coefficienti di questi polinomi devono tutti annullarsi. Limitandoci per ora ad esprimere che si annullano separatamente i termini di diverso grado, le (3) si scindono nei tre gruppi:

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j} - \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j} = 0,$$

$$\text{(II)}\quad \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j}\frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_j \partial p_i}\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}\left\{\frac{\partial K}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} + \frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_i}\right\} = 0,$$

$$\text{(III)}\quad \frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = a^{(ij)}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j).$$

Le (I) differiscono dalle (3) soltanto perchè vi compare K invece di H. Di quà la proposizione:

Se un problema dinamico di funzione caratteristica $H = K - U$ è integrabile per separazione di variabili, la stessa proprietà compete alla equazione $K = h$, che ne definisce le geodetiche.

Le (II) e (III) costituiscono condizioni addizionali (involgenti ad un tempo la K e la U), sotto cui la separazione di variabili seguita ad essere possibile anche per forze non nulle. Le (III) in particolare risultano identicamente soddisfatte nei casi da Lei studiati.

3. L'osservazione, testè fatta, mostra che, per classificare i problemi dinamici, che comportano separazione di variabili, conviene:

1° caratterizzare quei sistemi materiali, o, se si vuole, quei $ds^2 = \sum_1^n a_{rs}\,dx_r\,dx_s$, per cui la forma K verifica le (I).

2° esaminare, per ciascuno di questi sistemi, quali forze possono essergli applicate, a norma delle (II), (III). Questa seconda parte riescirebbe certo agevole, quando fosse risoluta la prima, tanto più che si potrebbe usufruire il notevole risultato, concernente la espressione analitica del potenziale U, da Lei stabilito*) senza alcuna ipotesi preventiva sulla natura del sistema.

Limitiamoci dunque, come è naturale, al caso delle geodetiche.

*) Habilitationsschrift, S. 8; Math. Annalen, Bd. XLII, S. 548.

Le condizioni esplicite nei coefficienti $a^{(rs)}$ di K si avrebbero dalle (I), sviluppando materialmente ed eguagliando a zero i singoli coefficienti. Ma si può indicare un criterio atto a semplificare i calcoli.

4. Fissiamo un generico indice i e poniamo

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial x_j} + a^{(ij)}\frac{\partial K}{\partial x_j}.$$

Badando che $\frac{\partial^2 K}{\partial p_i \partial p_j}$ non è che $a^{(ij)}$, si vede che le $n-1$ equazioni (I) relative al fissato indice i (e agli $n-1$ j diversi da i) si possono scrivere

$$\frac{\partial K}{\partial p_i}\left\{\frac{\partial K}{\partial p_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial K}{\partial x_j}\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial p_j}\right\} + \frac{\partial K}{\partial x_i}\sigma_{ij} = 0.$$

Ora $\frac{\partial K}{\partial p_i}$ è una forma omogenea di primo grado nelle p, $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ e σ_{ij} lo sono di secondo. O l'una o l'altra di esse deve essere divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_i}$.

Per esplicitare le condizioni di divisibilità, giova immaginare introdotte, al posto delle p, le x', che, a norma delle (7), sono loro combinazioni lineari. Si ha precisamente $\frac{\partial K}{\partial p_i} = x_i'$, e, per le (8),

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = -\frac{\partial T}{\partial x_i} = -\sum_1^n{}_{rs}\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i}x_r' x_s'.$$

Ne viene che le condizioni di divisibilità di $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ per $\frac{\partial K}{\partial p_i}$ sono

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0 \qquad (r, s \gtrless i). \tag{9}$$

Esprimendo anche le σ_{ij} per le x', si ha

$$\sigma_{ij} = x_j'\sum_1^n a^{(il)}\frac{\partial^2 T}{\partial x_l' \partial x_j} - a^{(ij)}\frac{\partial T}{\partial x_j},$$

donde come condizioni di divisibilità per x_i':

$$\begin{cases} a^{(ij)}\dfrac{\partial a_{rs}}{\partial x_j} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^n{}_l a^{(il)}\frac{\partial a_{rl}}{\partial x_j} - a^{(ij)}\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_j} = 0, \\ \displaystyle\sum_1^n{}_l a^{(il)}\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}a^{(ij)}\frac{\partial a_{jj}}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad (j, r, s \gtrless i;\ r, s \gtrless j). \tag{10}$$

Per ogni valore di i sono soddisfatte le (9), ovvero le (10). Queste ultime danno luogo a lor volta a sottocasi distinti secondo le ipotesi, che si fanno sulle ortogonalità (sull' annullarsi o meno delle varie $a^{(ij)}$).

Tenendo conto delle (9), o rispettivamente delle (10), per tutti i valori di i, i primi membri delle (I) risultano divisibili per $\frac{\partial K}{\partial p_i}\frac{\partial K}{\partial p_j}$ e si riducono così a polinomi di secondo grado nelle p (o, se si vuole, nelle x'). Esprimendo che i singoli coefficienti si annullano, si traggono le ulteriori condizioni, che sono di secondo ordine nelle a.

Malgrado queste relative semplificazioni, se non si trova qualche artificio sintetico, bisognerebbe passare in rassegna tutte le eventualità a priori possibili, supponendo, per un certo numero di valori di i, soddisfatte le (9), e, per i rimanenti valori, le (10), coi sottocasi accennati.

Per $n = 2$ si va in fondo bene, come era facilmente prevedibile, dati i precedenti. Ma già per $n = 3$ bisognerebbe sobbarcarsi ad una discussione minuta, che io non ho cercato di approfondire.

Per n qualunque, *quando si prestabilisca il caso, anzi addirittura il sottocaso* (ne ho provato qualcuno a titolo di esperimento), i calcoli sono semplici; ma debbo pur aggiungere che in questi esperimenti io non ho incontrato alcun tipo veramente interessante.

5. Come esempio prenderò il caso, in cui *tutte* le $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ sono divisibili per le corrispondenti $\frac{\partial K}{\partial p_i}$.

Introducendo le $a_{ij,r}$ (simboli di Christoffel di prima specie) definite da

$$2a_{ij,r} = \frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r}, \tag{11}$$

risulta subito dalle (9)

$$a_{ij,r} = 0 \qquad (i \gtrless j). \tag{9'}$$

Infatti, se nessuno dei due indici i ed j è eguale ad r, si annullano tutti i termini del secondo membro delle (11); se invece è per es. $j = r$, e quindi $i \gtrless r$, allora $\frac{\partial a_{ri}}{\partial x_j}$ si elide con $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r}$ e resta $-\frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i}$, che è zero in virtù delle (9).

Come le (9') sono conseguenza delle (9), così reciprocamente lo sono le (9) delle (9'). Si ha infatti per identità

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = a_{ri,s} + a_{si,r},$$

quindi le (9′) danno $\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_i} = 0$, ogniqualvolta sia i diverso così da r che da s.

Ricordando ancora che i simboli di Christoffel di seconda specie sono definiti da

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix} \right\} = \sum_1^n{}_s a^{(rs)} a_{ij,r},$$

si vede che le (9′) sotto nuova forma equivalente possono essere scritte

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i \gtrless j). \tag{9″}$$

Ciò premesso, osserviamo che i rapporti

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} : \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \text{cioè} \quad -\frac{\partial T}{\partial x_i} : x_i'$$

si riducono, in virtù delle (9), a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} x_i' - \sum_1^n{}_r \frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} x_r'.$$

Siccome, sempre per le (9), è $\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_r} = 0$ per $r \gtrless i$, così queste espressioni si possono anche presentare sotto la forma

$$-\sum_1^n{}_r \left(\frac{\partial a_{ir}}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_r} \right) x_r',$$

ossia, per le (11),

$$-\sum_1^n{}_r a_{ii,r} x_r'.$$

Riponendo per le x' i loro valori (7), e avendo riguardo alle (12), si ha infine

$$-\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}} = \sum_1^n{}_s \left\{ \begin{matrix} i & i \\ s & \end{matrix} \right\} p_s$$

Le (2) sono nel caso presente ($H = K$)

$$\frac{dp_i}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial K}{\partial x_i}}{\frac{\partial K}{\partial p_i}},$$

e così il sistema, che deve essere completo, consta delle

$$\frac{dp_i}{dx_j} = 0 \qquad (i \gtrless j), \tag{1}$$

e delle

$$\frac{dp_i}{dx_i} = \sum_1^n{}_s \left\{ {i \atop s} {i \atop } \right\} p_s. \tag{13}$$

Giunti a questo punto, non è il caso di ricorrere alle formule generali (I). Le condizioni da associare alle (9) sono chiaramente

$$\frac{d}{dx_j} \sum_1^n{}_s \left\{ {i \atop s} {i \atop } \right\} p_s = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

che, sviluppate, a norma delle (1), (13), divengono

$$\sum_1^n{}_s \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ {i \atop s} {i \atop } \right\} + \left\{ {i \atop j} {i \atop } \right\} \left\{ {j \atop s} {j \atop } \right\} \right] p_s = 0 \qquad (i \gtrless j),$$

e, dovendo stare identicamente, porgono

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ {i \atop s} {i \atop } \right\} + \left\{ {i \atop j} {i \atop } \right\} \left\{ {j \atop s} {j \atop } \right\} = 0 \quad . \qquad (i \gtrless j). \tag{14}$$

Si tratta ormai di individuare la K o, ciò che è lo stesso, il corrispondente ds^2, a mezzo delle (9″) e (14).

L'integrazione di queste equazioni si può effettuare senza calcoli in base a noti principi di geometria differenziale.

In primo luogo, per definizione dei simboli di Riemann, si ha

$$a_{rs,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ {r \atop s} {i \atop } \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ {r \atop s} {j \atop } \right\} + \sum_1^n{}_l \left[\left\{ {r \atop l} {i \atop } \right\} \left\{ {l \atop s} {j \atop } \right\} - \left\{ {r \atop l} {j \atop } \right\} \left\{ {l \atop s} {i \atop } \right\} \right].$$

Distinguiamo i quattro casi:

a) $r \gtrless i, \quad r \gtrless j;$

b) $r = i \gtrless j;$

c) $r = j \gtrless i;$

d) $r = i = j.$

Ogni simbolo $a_{rs,ij}$ rientra manifestamente in una delle quattro categorie. Quelli della categoria a) sono nulli, in virtù delle (9″).

Per la b), si ha $\left\{ {r \atop s} {j \atop } \right\} = 0$, $\left\{ {r \atop l} {j \atop } \right\} = 0$, nonchè $\left\{ {l \atop s} {j \atop } \right\} = 0$ $(l \gtrless j)$ dalle (9″) stesse. Rimane quindi

$$a_{is,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ {i \atop s} {i \atop } \right\} + \left\{ {i \atop j} {i \atop } \right\} \left\{ {j \atop s} {j \atop } \right\},$$

che è zero in virtù delle (14).

Nello stesso modo si riconosce l'annullarsi dei simboli della categoria c). Quelli della d) sono poi identicamente nulli.

Si ha dunque

$$a_{rs,ij} = 0, \tag{14'}$$

per tutti i valori dei quattro indici r, s, i, j.

Reciprocamente — importa rilevarlo — dalle (14'), tenendo conto delle (9''), si ripassa alle (14).

In definitiva dunque possiamo risguardare come equazioni di condizione per il nostro ds^2 le

$$a_{rs,ij} = 0 \tag{14'}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix} \right\} = 0 \qquad (i \gtrless j). \tag{9''}$$

Le prime ci dicono che si tratta di una varietà euclidea.

Restano da caratterizzare le superficie coordinate $x_i = \text{cost.}$

Si raggiunge lo scopo nel modo migliore, cercando le espressioni delle coordinate cartesiane y in funzione delle x.

Le coordinate cartesiane debbono in ogni caso (considerate come funzioni di coordinate qualisivogliono x) soddisfare alle equazioni di Ricci*)

$$y_{r\,|\,ij} = 0,$$

ossia, sostituendo alle derivate covarianti $y_{r\,|\,ij}$ le loro espressioni effettive, alle

$$\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_1^n{}_s \left\{ \begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix} \right\} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} = 0. \tag{15}$$

Nel caso presente, valendo le (9''), se ne trae in particolare

$$\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (i \gtrless j), \tag{16}$$

le quali si integrano a vista, porgendo

$$y_r = \sum_1^n{}_i X_i^{(r)}(x_i), \tag{16'}$$

dove le $X_i^{(r)}(x_i)$ sono funzioni arbitrarie dell' indicato argomento, vincolate soltanto dalla restrizione che sia diverso da zero il determinante delle loro derivate prime (restrizione necessaria perchè le (16') definiscano una trasformazione non degenere fra le y e le x).

Questi valori (16') delle y verificano effettivamente tutte le condizioni richieste, perchè, portati nel

$$ds^2 = \sum_1^n{}_r dy_r^2,$$

*) „Lezioni sulla teoria delle superficie", Padova 1898, presso Drucker; Cap. V.

danno luogo ad una espressione del ds^2 stesso in variabili x, soddisfacente alle (14′) e (9″).

Per le (14′) (che caratterizzano la trasformabilità al tipo euclideo $\sum_1^n {}_r\, dy_r^2$), la cosa è evidente. Per le (9″), ciò risulta dal confronto delle (16) colle (15).

Osservando le (16′), siamo adesso in grado di caratterizzare assai semplicemente *le varietà* $x_i = cost$, dicendo che *sono ipersuperficie* (per $n = 2, 3$, curve o rispettivamente superficie) *di traslazione.*

6. *Discussione completa per* $n = 2$. I casi da distinguere sono:

1° I due rapporti

$$\frac{\dfrac{\partial K}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_1}}, \quad \frac{\dfrac{\partial K}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_2}}$$

sono entrambi interi (rispetto alle p, si intende).

2° Uno solo di essi è intero.

3° Nessuno dei due è intero.

1° *caso.* Per quanto s'è visto in generale, questo caso corrisponde a ds^2 piani, riferiti a linee di traslazione. Con opportuna scelta dei parametri delle linee coordinate, si ha subito il Suo terzo tipo*)

$$ds^2 = dx_1^2 + 2\cos(X_1 + X_2)dx_1 dx_2 + dx_2^2,$$

dove X_1 è funzione arbitraria di x_1, X_2 di x_2.

2° *caso.* Sia

$$\tau = \frac{\dfrac{\partial K}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_2}} \tag{17}$$

il rapporto intero, dovendosi qui naturalmente escludere che lo sia anche l'altro $\dfrac{\partial K}{\partial x_1} : \dfrac{\partial K}{\partial p_1}$.

Le (I) constano di una sola equazione, che possiamo scrivere, dividendo per $\left(\dfrac{\partial K}{\partial p_2}\right)^2$,

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial \tau}{\partial x_1} - \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0.$$

Di quà apparisce che il prodotto $\dfrac{\partial K}{\partial x_1}\dfrac{\partial \tau}{\partial p_1}$ è divisibile per $\dfrac{\partial K}{\partial p_1}$. Non lo è il primo fattore, lo sarà dunque $\dfrac{\partial \tau}{\partial p_1}$. Ma, essendo τ funzione lineare

*) Math. Ann., Bd. XXXV, S. 94.

delle p, $\frac{\partial \tau}{\partial p_1}$ dipende dalle sole x e può perciò essere divisibile per la funzione lineare $\frac{\partial K}{\partial p_1}$ solo a patto di annullarsi identicamente. Così la precedente equazione si scinde nelle due

$$\frac{\partial \tau}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = 0,$$

e la τ si riduce quindi al prodotto di p_2 per una funzione della sola x_2. Designandola, come è sempre permesso, con $\frac{d \log X_2}{d x_2}$, e ponendo

$$f = X_2 p_2, \tag{18}$$

si può evidentemente attribuire a τ la espressione

$$\tau = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial p_2}},$$

con che la (17) assume la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0. \tag{17'}$$

Siccome f è, al pari di τ, indipendente da x_1 e da p_1, il primo membro della (17') si può considerare come la parentesi di Poisson (K, f). L'annullarsi di tale parentesi esprime, come Ella mi insegna, che le geodetiche di K ammettono l'integrale

$$f = \text{cost.}$$

L'esistenza di un integrale lineare, anzi della forma $X_2 p_2 = \text{cost}$, per le linee geodetiche permette di asserire che *la varietà corrispondente è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, di cui le linee coordinate* $x_1 = cost$ *rappresentano i paralleli.*

È il Suo tipo (II'').

3° *caso.* Valgono le (10) del No. 4 per $i = 1, 2$. Non essendovi più di due indici distinti, mancano i due primi gruppi, e il terzo, in cui si ponga successivamente $i = 1, j = 2$; $i = 2, j = 1$, dà

$$\begin{cases} a^{(11)}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{2}a^{(12)}\frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{1}{2}a^{(12)}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + a^{(22)}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Se le coordinate sono ortogonali, a_{12}, e quindi $a^{(12)}$, si annullano, e le (19) rimangono identicamente soddisfatte.

Si ha allora, scrivendo e^α per $a^{(11)}$, e^β per $a^{(22)}$,

$$K = \frac{1}{2}(e^\alpha p_1^2 + e^\beta p_2^2),$$

ossia che

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial p_2} = 0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial p_2 \partial x_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_2}} = \frac{\partial z}{\partial x_2} p_2,$$

$$\frac{\dfrac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2}}{\dfrac{\partial K}{\partial p_2}} = \frac{\partial z}{\partial x_1} p_2.$$

ed esplicitando in conformità la (1),

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} - \dfrac{\partial \beta}{\partial x_1} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_2} = 0. \end{cases}$$

Dalle (20) segue in particolare

$$\frac{\partial^2 \alpha - \beta}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

che, integrata, porge

$$\alpha - \beta = X_1 - X_2.$$

designandosi al solito con X_1, X_2 funzioni arbitrarie degli argomenti x_1, x_2 rispettivamente.

Posto

$$-\log \lambda = \alpha - X_1 = \beta - X_2.$$

le (20) si riducono a

$$(20') \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

e si ha per K la espressione

$$\frac{1}{2} \frac{X_1 p_1^2 + X_2 p_2^2}{U - V},$$

ovviamente riducibile a

$$\frac{1}{2} \frac{p_1^2 + p_2^2}{U - V},$$

dove U è funzione soltanto di x_1, V di x_2.

Il ds^2 corrispondente ha la forma di Liouville

$$(U - V)(dx_1^2 + dx_2^2).$$

Si noti che, dati i criteri seguiti nella nostra classificazione, U e V debbono ritenersi effettive funzioni di x_1, x_2. Qualora infatti l' una o l' altra di esse si riducesse ad una costante, $\dfrac{\partial K}{\partial x_1}$ o $\dfrac{\partial K}{\partial x_2}$ risulterebbero divisibili per $\dfrac{\partial K}{\partial p_1}$ o $\dfrac{\partial K}{\partial p_2}$ rispettivamente e si ricadrebbe in uno dei due casi precedenti. Anche in questi del resto, come già fu osservato dal Prof. Morera e da

Lei, il ds^2 è riducibile alla forma di Liouville: solo che una delle due funzioni U, V (2° caso), o tutte e due (1° caso) risultano costanti.

Con ciò sono esauriti i tipi da Lei enumerati, ed effettivamente non ne esiste alcun altro. Resta però da completare la discussione, perchè non è priori evidente che le linee coordinate debbano essere ortogonali.

Proviamoci dunque a supporre $a_{12} \gtrless 0$ e mostriamo che non è allora possibile ottemperare a tutte le volute condizioni.

In primo luogo le (19), sostituendovi gli elementi reciproci $a^{(11)}$, $a^{(12)}$, $a^{(22)}$ coi loro valori $\frac{a_{22}}{a}$, $-\frac{a_{12}}{a}$, $\frac{a_{11}}{a}$ $(a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$, e tenendo presente che a_{12} non si annulla, possonò essere scritte

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{a_{22}}{a_{12}^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{a_{11}}{a_{12}^2} = 0,$$

donde col solito significato di X_1, X_2,

$$a_{22} = a_{12}^2 X_1, \quad a_{11} = a_{12}^2 X_2.$$

Si avrebbe dunque un ds^2 della forma

$$a_{12}^2 X_1 X_2 \left\{ \frac{dx_1^2}{X_1} + \frac{2}{a_{12}\sqrt{X_1 X_2}} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} + \frac{dx_2^2}{X_2} \right\},$$

o, più semplicemente, scambiando x_1, x_2 in $\int \sqrt{X_1}\, dx_1$, $\int \sqrt{X_2}\, dx_2$ (nel campo reale, X_1, X_2 non possono annullarsi e quindi la trasformazione è certamente lecita) e scrivendo $\frac{1}{\lambda}$ per $a_{12}\sqrt{X_1 X_2}$,

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda^2}\{dx_1^2 + 2\lambda dx_1 dx_2 + dx_2^2\}.$$

Ne viene

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda^2} - 1\right)\{p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2\},$$

con che K dipende dalle variabili x_1, x_2 solo pel tramite dell' argomento λ e per conseguenza

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial K}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Le derivate prime di λ non possono annullarsi identicamente, poichè in tal caso risulterebbero nulle $\left(\text{e quindi divisibili per le corrispondenti } \frac{\partial K}{\partial p}\right)$ $\frac{\partial K}{\partial x_1}$ o $\frac{\partial K}{\partial x_2}$.

Ciò posto, immaginiamo di sostituire, nella equazione fondamentale

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial p_2} - \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial x_1}\frac{\partial K}{\partial x_2}\frac{\partial^2 K}{\partial p_1 \partial p_2} = 0,$$

i valori testè scritti di $\frac{\partial K}{\partial x_1}$, $\frac{\partial K}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 K}{\partial x_1 \partial x_2}$, isolando nel primo membro il termine

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Tutti gli altri termini contengono il fattore $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$, che si può raccogliere, attribuendo così alla precedente equazione la quale deve sussistere identicamente rispetto alle p e alle x, la forma

$$\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\Omega,$$

con Ω espressione quadratica nelle p.

Una tale identità implica in particolare che il secondo membro sia divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}$. Nessuno di questi due fattori divide $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ (poichè dovrebbe allora dividere anche $\frac{\partial K}{\partial x_1}$, $\frac{\partial K}{\partial x_2}$). Sarà dunque Ω divisibile per $\frac{\partial K}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_2}$ e si potrà ricavarne:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial \lambda}\cdot \text{funzione delle sole } x. \tag{21}$$

Ora

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}\{p_1^2 - 2\lambda p_1 p_2 + p_2^2\} - \left(\frac{1}{1-\lambda^2} - 1\right)p_1 p_2.$$

ossia, posto

$$A = \frac{\lambda}{(1-\lambda^2)^2}, \qquad B = \frac{\lambda^2(\lambda^2-3)}{1-\lambda^2},$$

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = A(p_1^2 + p_2^2) + Bp_1 p_2,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} = \frac{dA}{d\lambda}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{dB}{d\lambda}p_1 p_2,$$

e il determinante

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix}$$

non è identicamente zero, perchè in questa ipotesi il rapporto $\frac{B}{A} = \lambda(\lambda^2-3)$ dovrebbe risultare indipendente da λ, ciò, che non è.

$\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ e $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}$ sono pertanto due forme lineari indipendenti negli argomenti $p_1^2 + p_2^2$, $p_1 p_2$.

Supponiamo fissati dei valori di x_1, x_2 e quindi di λ coll' unica restrizione che

$$\begin{vmatrix} A & B \\ \frac{dA}{d\lambda} & \frac{dB}{d\lambda} \end{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \gtrless 0,$$

e rimanga regolare la funzione delle x, che compare nel secondo membro della (21).

Si può allora, e in infiniti modi, attribuire agli argomenti $p_1^2 + p_2^2, p_1 p_2$, cioè in definitiva alle p, valori per cui $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$, e con essa il secondo membro della (21), si annullano, mentre non si annulla $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2}$, e nemmeno quindi il prodotto $\frac{\partial^2 K}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}$, che costituisce il primo membro della (21) stessa. Ma questa equazione dovrebbe essere soddisfatta per qualunque scelta dei valori iniziali.

La ipotesi $a_{12} \gtrless 0$ è dunque da escludere, come dovevasi dimostrare.

Padova, 3 Febbraio 1904.

Über die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojektivitäten erzeugen.

Von

Eugen Meyer in Charlottenburg.

Die Kollineationen, die im folgenden untersucht werden, sind solche, die vier getrennte, nicht in einer Ebene liegende Punkte des Raumes ungeändert lassen. Ausgeschlossen werden also Kollineationen, für die zwei oder mehr von diesen Eckpunkten des Haupttetraeders zusammenfallen. Im übrigen kann das eine oder können beide Paare konjugiert-imaginär sein, da auch dann mindestens zwei reelle Verbindungsgraden der Punkte — wir nennen sie g und $\mathfrak{g}$ —, die durch die Kollineation ungeändert gelassen werden, vorhanden sind.

§ 1 handelt von der Darstellung derartiger Kollineationen als Folge („Produkt") von zwei solchen, die je eine von den Geraden g und $\mathfrak{g}$ Punkt für Punkt in sich überführen, und von besonderen Fällen dieser letztgenannten Kollineationen (perspektiven Kollineationen und „projektiven Drehungen"). Daran schließt sich in § 2 die Darstellung der Kollineationen als Folge zweier Korrelationen, insbesondere solcher, die involutorisch sind, und die Erörterung der Frage, wann Nullkorrelationen unter diesen vorkommen können. In Zusammenhang hiermit steht die Aufgabe, ein Polar- oder Nullsystem durch kollineare Umformungen in ein beliebiges andere überzuführen, die in § 3 ihre Erledigung findet. In § 4 schließlich wird die Beziehung dieser Kollineationen zum tetraedralen Komplex erörtert, insbesondere untersucht, durch wieviele der in der Überschrift genannten Kollineationen ein solcher Komplex, der die Geraden zu Gegenkanten seines Tetraeders hat, erzeugt werden kann.

Die Hinweise auf andere Arbeiten, die zu dem Gegenstand in Beziehung stehen, finden sich an den betr. Stellen; ich hoffe, daß mir dabei nichts Wesentliches entgangen ist.

§ 1.

Es gibt ∞^1 Kollineationen, die dieselben Geraden g und $\mathfrak{g}$ in sich transformieren und auf g und $\mathfrak{g}$ dieselben Projektivitäten erzeugen. Bezeichnet man nämlich mit AA_1, BB_1 und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ je zwei Paare zugeordneter Punkte auf g bez. $\mathfrak{g}$, nimmt irgend einen Punkt P beliebig, jedoch so, daß er nicht auf einer der Seitenflächen des Tetraeders $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ liegt, legt durch ihn die Gerade, die g und $\mathfrak{g}$ in C bezw. $\mathfrak{C}$ schneidet, wählt P_1 auf der Verbindungslinie $C_1\mathfrak{C}_1$ der C bezw. $\mathfrak{C}$ zugeordneten Punkte beliebig, so ist die Kollineation eindeutig und in der geforderten Weise dadurch bestimmt, daß man den Punkten $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}P$ bezw. $A_1B_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1P_1$ als entsprechende zuordnet. Denn, da hierdurch auch den Punkten C und $\mathfrak{C}$ bezw. C_1 und $\mathfrak{C}_1$ zugeordnet werden, so transformiert die Kollineation die Punktreihen g und $\mathfrak{g}$ in die zu ihnen projektiven. Und da man P_1 einfach unendlich viele Lagen zuweisen kann, so gibt es in der Tat eine einfache Mannigfaltigkeit derartiger Kollineationen.

Jede solche Kollineation läßt sich nun zerlegen in eine solche K_1, die die Punktreihe g Punkt für Punkt in sich und die Punktreihe $\mathfrak{g}$ in die vorgeschriebene projektive Reihe überführt, und in eine zweite K_2, die $\mathfrak{g}$ Punkt für Punkt in sich und g in die auf ihr liegende projektive Reihe verwandelt, und zwar ist diese Zerlegung auf einfach unendlich mannigfache Weise möglich. Die soeben behandelte Kollineation z. B. läßt sich in eine Kollineation K_1 zerlegen, die P auf $C\mathfrak{C}$ in irgend einen Punkt Q auf $C\mathfrak{C}_1$ überführt, und in eine solche K_2, die Q in P_1 auf $C_1\mathfrak{C}_1$ transformiert. Jeder der einfach unendlich vielen Kollineationen K_1 wird dadurch eine einzige Kollineation K_2 zugeordnet. — Da diese besonderen Fälle aus dem allgemeinen sich ergeben, wenn man als die vorgeschriebene Projektivität auf g bezw. $\mathfrak{g}$ die identische annimmt, so gibt es auch von jeder dieser Arten eine einfach unendlich große Mannigfaltigkeit.

Betrachten wir *besondere Fälle dieser Kollineationen K_1, die die eine Gerade g Punkt für Punkt in sich überführen.*

a) *Hat die auf $\mathfrak{g}$ bestehende Projektivität reelle Doppelpunkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$, so gibt es unter den ∞^1 Kollineationen allemal zwei und nur zwei, die perspektiv sind.* Man erhält sie, wenn man P_1 so wählt, daß PP_1 durch einen Doppelpunkt, etwa $\mathfrak{D}$, geht. Dann ist nämlich PP_1 sich selbst zugeordnet, und die in der durch $\mathfrak{D}'$ und g gelegten Ebene zusammenfallenden kollinearen Felder haben alle Elemente entsprechend gemein, da sie zwei beliebige Punkte auf g, $\mathfrak{D}'$ und den Schnittpunkt mit PP_1 gemeinsam haben. Die Ebene $(\mathfrak{D}'g)$ ist also die Ebene der Perspektivität (Homologie) und $\mathfrak{D}$ ihr Zentrum, da in dem Bündel $\mathfrak{D}$ die vier

Strahlen, die nach jenen vier Punkten gehen, — und damit alle Elemente — sich selbst entsprechen.

Mehr als diese zwei perspektiven Kollineationen gibt es aber in der einfachen Mannigfaltigkeit nicht, da, wenn eine solche vorliegt, die Gerade PP_1 sich selbst entsprechen muß, was aber eben nur möglich ist, wenn PP_1 durch $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{D}'$ geht.

b) *Hat die Projektivität imaginäre Doppelelemente, so gibt es unter den* ∞^1 *Kollineationen immer zwei und nur zwei ausgezeichnete von der Art, die man als „projektive Drehungen" bezeichnet hat.**) Man erhält sie, wenn man als P_1 auf $C\mathfrak{C}_1$ einen der beiden Punkte wählt, in denen $C\mathfrak{C}_1$ denjenigen eindeutig bestimmten Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ schneidet, der durch P geht und die von C nach den Doppelpunkten von $\mathfrak{g}$ gezogenen Geraden in diesen Doppelpunkten berührt. $C\mathfrak{C}_1$ schneidet in diesem Falle $\mathfrak{K}^2$ stets in reellen Punkten, weil C zu denjenigen Punkten gehört, von denen aus reelle Tangenten an $\mathfrak{K}^2$ nicht gezogen werden können. Unsere Kollineation führt dann $\mathfrak{K}^2$ in sich über.

Dieselbe Kollineation K führt aber auch jeden andern Kegelschnitt, der einen Punkt von g und die Gerade $\mathfrak{g}$ als Pol und Polare hat und durch die Doppelpunkte von $\mathfrak{g}$ geht, in sich über. Denn es liege dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1^2$, wie wir zunächst annehmen wollen, in derselben Ebene wie $\mathfrak{K}^2$, es sei also auch für ihn C der Pol von $\mathfrak{g}$. Ist dann P' ein Punkt von $\mathfrak{K}_1^2$ und sind die Schnittpunkte von $P'C$ mit $\mathfrak{K}^2$ Q und R, denen durch die Kollineation die Punkte Q_1 und R_1 zugeordnet seien, so muß für P_1' als den dem P' in der Kollineation zugeordneten Punkt die Beziehung $P'QCR \barwedge P_1'Q_1CR_1$ gelten. Daraus folgt aber,**) daß P_1' mit P' auf einem $\mathfrak{K}^2$ in den Schnittpunkten mit $\mathfrak{g}$ doppelt berührenden Kegelschnitt, d. h. auf $\mathfrak{K}_1^2$ liegen muß.***) Liegt aber, wie wir weiter annehmen, P' nicht in der Ebene von $\mathfrak{K}^2$, sondern etwa in der Ebene $(C_1\mathfrak{g})$, wo C_1 ein von C verschiedener Punkt von g sei, so projizieren wir das ebene Feld $(C\mathfrak{g})$ von einem dritten Punkt von g, C_2, als Zentrum auf die Ebene $(C_1\mathfrak{g})$. Da nun sowohl C_2 wie die Ebene $(C_1\mathfrak{g})$ in der Kollineation sich selbst entspricht, so geht jeder Punkt des Feldes $(C\mathfrak{g})$ und der ihm in der Kollineation K entsprechende — durch jene Projektion von C_2 aus — in dem Felde $(C_1\mathfrak{g})$ wieder in einen Punkt und seinen entsprechenden über, C wird in C_1 und jeder Punkt von $\mathfrak{g}$ in sich projiziert. Und da das Büschel der sich in den Doppelpunkten der projektiven

*) Im Falle reeller Doppelelemente gibt es diese Drehungen nur, wenn das konstante Doppelverhältnis, das zwei entsprechende Punkte mit den Doppelpunkten bilden, positiv ist.

**) Steiner-Schröter-Sturm, Vorles. über synthet. Geom. II. Teil, 3. Aufl. S. 335f.

***) Vgl. Klein, ds. Ztschr. Bd. IV, S. 602.

Punktreihen von $\mathfrak{g}$ doppelt berührenden Kegelschnitte in der Ebene $(C\mathfrak{g})$ in ein ebensolches Büschel nach $(C_1\mathfrak{g})$ projiziert wird, mit dem Unterschiede, daß für jeden Kegelschnitt des neuen Büschels C_1 der Pol von $\mathfrak{g}$ ist, so wird auch ein jeder Kegelschnitt dieses Büschels in der Ebene $(C_1\mathfrak{g})$ durch die Kollineation in sich übergeführt.

Nimmt man $\mathfrak{g}$ unendlich fern an und als Doppelpunkte ihrer Projektivität die auf ihr liegenden konjugiert-imaginären Kreispunkte, so geht die Kollineation über in eine gewöhnliche Links- oder Rechtsdrehung um g als Achse.

c) *Ist die Projektivität auf* $\mathfrak{g}$ *involutorisch mit reellen Doppelpunkten* $\mathfrak{D}$ *und* $\mathfrak{D}'$, *so werden aus den unter* a) *erwähnten perspektiven Kollineationen zentrische Involutionen mit* $\mathfrak{D}$ *bew.* $\mathfrak{D}'$ *als Zentrum und* $\mathfrak{D}'\mathfrak{g}$ *bezw.* $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ *als Ebene der Involution.* Denn das konstante Doppelverhältnis, nach welchem die Verbindungsstrecke zweier entsprechender Punkte durch das Zentrum und die Ebene der Perspektivität geteilt wird, hat hier den Wert -1, wie man an den Punkten von $\mathfrak{g}$ erkennt.

d) *Ist die Projektivität von* $\mathfrak{g}$ *involutorisch mit imaginären Doppelpunkten, so werden die unter* b) *erwähnten zwei projektiven Drehungen planar-quaternär-zyklische Kollineationen.**) Wir erhalten sie, wenn wir P_1 so wählen, daß PP_1 die Gerade $\mathfrak{g}$ in einem der Punkte desjenigen einzigen Paares $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ trifft, das zu $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ harmonisch liegt. Die Kollineation führt nämlich dann P_1 nach P_2, den Schnittpunkt von $C\mathfrak{C}$ und $P_1\mathfrak{B}_1$, P_2 nach P_3, den Schnittpunkt von $C\mathfrak{C}_1$ und $P_2\mathfrak{B}_1$ über. P_3 wird dann aber wieder in P transformiert, weil der Schnittpunkt X von PP_3 und P_1P_2 $\mathfrak{B}_1$ sein muß. Denn wegen der harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks mit den Ecken $XP_3\mathfrak{B}P_1$ müßte $C(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1X\mathfrak{B})$ ein harmonisches Büschel sein. Da aber $C(\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{B})$ gleichfalls ein solches ist, muß CX und $C\mathfrak{B}_1$, also auch X und $\mathfrak{B}_1$ zusammenfallen.

Mehr als diese zwei planar-quaternär-zyklischen kann es aber unter unsern Kollineationen wieder nicht geben. Denn ist $PP_1P_2P_3$ ein zyklisches Punktquadrupel, so müssen P_3P und P_2P_1 sich in demselben Punkte $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{g}$ treffen und wegen der Eigenschaften des vollständigen Vierecks $PP_1P_2P_3$ sind $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ harmonisch.

Daß aber diese beiden Kollineationen zu jenen projektiven Drehungen gehören,**) läßt sich leicht folgendermaßen zeigen. Jeder dem Viereck $PP_1P_2P_3$ umbeschriebene Kegelschnitt hat das Dreieck $C\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}$ zum Polardreieck. Nimmt man nun aus dem Büschel dieser Kegelschnitte

*) Vgl. Pampuch, Über doppelinvolutorische Systeme im Raume. Diss. Straßburg 1886, S. 11. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., II, S. 100. R. Krause, Über cyklische Kollineationen, Progr. Stadtgymn. Stettin 1897, S. 9.

**) Pampuch a. a. O. S. 6.

denjenigen, für den $\mathfrak{C}P_1$ Tangente in P_1 ist, so ist, da der Pol von CP_1 auf $\mathfrak{g}$ liegen muß, $\mathfrak{C}$ dieser Pol, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ ein Paar der durch den Kegelschnitt auf $\mathfrak{g}$ bestimmten Involution konjugierter Punkte, und da diese Involution mit der ursprünglich auf $\mathfrak{g}$ gegebenen zwei Punktepaare gemeinsam hat, so ist sie mit ihr identisch. Unser Kegelschnitt ist also einer von jenen, die sich in den Doppelpunkten von $\mathfrak{g}$ doppelt berühren, und wird durch die Kollineation in sich übergeführt.

e) *Ist schließlich die Projektivität auf* $\mathfrak{g}$ *die identische, so erhält man eine sogenannte windschiefe Perspektive.* Die Verbindungslinie irgend eines Paares entsprechender Punkte schneidet g und $\mathfrak{g}$, und ein solches Paar bildet mit dem Paar der Schnittpunkte ein konstantes Doppelverhältnis. Denn nimmt man von den g und $\mathfrak{g}$ schneidenden Geraden drei zueinander windschiefe als Leitlinien, so bestimmen sie eine Regelschar, durch deren Geraden die Schar der Leitlinien in projektiven Punktreihen geschnitten wird. Da die Linien der Regelschar zu je zweien durch die Kollineation einander zugeordnet sind, so folgt daraus, daß das Doppelverhältnis, das irgend zwei in der Kollineation entsprechende Punkte eines dieser Leitstrahlen und seine Schnittpunkte mit g und $\mathfrak{g}$ bilden, für alle Leitstrahlen und — wie man durch Veränderung von einem oder zwei der drei gewählten g und $\mathfrak{g}$ schneidenden Geraden sieht — für sämtliche in der Kollineation sich selbst entsprechenden Geraden konstant ist.

Ist dies Doppelverhältnis gleich -1, so ist die Kollineation die geschart-involutorische mit g und $\mathfrak{g}$ als Involutionsachsen.

§ 2.

Jede Kollineation kann im allgemeinen auf ∞^{15} fache Weise als Produkt zweier Korrelationen dargestellt werden. Die eine von ihnen ist beliebig, die andere ist durch sie bestimmt. Da es ∞^9 polare und ∞^5 Nullkorrelationen gibt, so kann jede Kollineation im allgemeinen auf ∞^9- bezw. ∞^5 fache Art als Ergebnis einer polaren bezw. Nullkorrelation und einer nichtinvolutorischen Korrelation dargestellt werden. Von der letzteren sagt man dann, sie sei zu der Kollineation harmonisch.*)

Soll eine Kollineation K, die nur zwei windschiefe Gerade in sich, aber keine von beiden Punkt für Punkt in sich transformiert, durch das Aufeinanderfolgen *zweier polaren Korrelationen,* die nicht Nullkorrelationen

*) Vgl. Segre, Journal f. Mathem. Bd. 100, S. 318. Reye, diese Ztschr. Bd. 43, S. 154. In § 7 des letzteren Aufsatzes wird die Frage nach der besonderen Art der Resultierenden zweier involutorischer Verwandtschaften beantwortet. Wir fragen umgekehrt nach der Möglichkeit der Zerlegung einer vorgelegten Kollineation in involutorische Korrelationen.

sind, entstehen, so ist dies nur möglich, wenn die beiden letzteren das Haupttetraeder der ersteren zum Poltetraeder haben; denn die Eckpunkte dieses Tetraeders und nur diese sollen in sich übergeführt werden. Aus der Gruppe von ∞^3 polaren Korrelationen, die das betr. Tetraeder als Poltetraeder besitzen, kann man die eine, K_1, willkürlich wählen, die andere, $K_1 \mathsf{K} = K_2$ ist durch sie bestimmt und gehört dann offenbar gleichfalls der Gruppe an.*)

Da durch Aufeinanderfolgen *einer polaren* und *einer Nullkorrelation* eine besondere Kollineation, nämlich eine „halbgescharte" entsteht, die zwei windschiefe Geraden in sich überführt und auf jeder von ihnen eine Punktinvolution erzeugt,**) so ist es im allgemeinen nicht möglich, eine Kollineation durch eine Folge zweier solcher Korrelationen darzustellen. Jede halbgescharte Kollineation aber läßt auf ∞^1fache Weise eine solche Zerlegung zu, da man als polare Korrelation eine beliebige derjenigen wählen kann, deren Kernflächen sich in dem Vierseit durchschneiden, das die Doppelpunkte jener Involutionen zu Ecken und ihre Träger zu Diagonalen hat. Also:

Jede Kollineation K, *die zwei windschiefe Geraden in sich, aber keine von beiden Punkt für Punkt in sich transformiert, läßt sich auf* ∞^3*fache Weise als Ergebnis zweier polaren Korrelationen darstellen. Die letzteren gehören sämtlich zu der Gruppe derjenigen, die das Haupttetraeder von* K *zum gemeinsamen Poltetraeder haben. Eine Darstellung als Folge einer polaren und einer Nullkorrelation ist nur für die halbgescharten Kollineationen, für jede von diesen aber auf* ∞^1*fache Art möglich. Die Ordnungsflächen dieser polaren Korrelationen haben einen gemeinsamen Vierseitsdurchschnitt, dessen Ecken mit denjenigen des Haupttetraeders von* K *übereinstimmen.*

Soll eine Kollineation K_1, die die Punktreihe g Punkt für Punkt in sich überführt, als Folge zweier polaren Korrelationen dargestellt werden, so ist dies nur möglich, wenn die Schnittpunkte ihrer Ordnungsflächen und der Geraden g in zwei beliebigen Punkten von g zusammenfallen und die Doppelpunkte der von K_1 auf $\mathfrak{g}$ erzeugten Projektivität in beiden Polarsystemen konjugierte Punkte sind, also zu den Schnittpunkten der Ordnungsffächen mit $\mathfrak{g}$ harmonisch liegen. Nimmt man eine dieser Korrelationen beliebig an, so muß die andere polar sein. Denn wenn K_1 das Resultat dieser beiden sein soll, so muß diese zweite jede der Geraden g und $\mathfrak{g}$ in die andere überführen und die Punktreihe einer jeden von diesen Geraden zu dem Ebenenbüschel der andern involutorisch liegen. Dann

*) Vgl. Reye a. a. O. S. 153/54, G. d. Lage 3. A. III, S. 219.

**) Reye, diese Ztschr. 43, S. 164, Nr. 38.

aber ist diese Korrelation polar, weil sie in jedem Tetraeder, dessen Ecken zwei Paare konjugierter Punkte der auf jeder der Geraden g und $\mathfrak{g}$ durch das Ebenenbüschel der andern erzeugten Involutionen sind, die Ecken in die gegenüberliegenden Flächen transformiert. Die erstgenannte Korrelation kann man auf ∞^4 fache Art wählen, weil ihre Schnittpunkte auf g sich auf ∞^3 fache Art, diejenigen auf $\mathfrak{g}$ in ∞^1 facher Art bestimmen lassen und weil es ∞^1 Polarsysteme mit gleichem Vierseitsdurchschnitt der Kernflächen gibt. Also:

Jede Kollineation K_1, *die zwei windschiefe Geraden* $\mathfrak{g}$ *und* g *in sich, aber nur die eine von beiden,* g, *Punkt für Punkt in sich überführt, läßt sich auf* ∞^4 *fache Weise als Ergebnis je zweier polaren Korrelationen darstellen. Für letztere sind* g *und* $\mathfrak{g}$ *reziproke Polaren, ihre Ordnungsflächen schneiden* g *in zwei gemeinsamen Punkten und ihre Schnittpunkte auf* $\mathfrak{g}$ *werden durch die Doppelpunkte der von* K_1 *auf* $\mathfrak{g}$ *erzeugten Projektivität harmonisch getrennt.*

Jede gescharte Kollineation (windschiefe Perspektive) läßt sich auf ∞^5 *fache Weise als Folge zweier polaren Korrelationen darstellen, deren Ordnungsflächen sich in demselben Vierseit durchschneiden, das die Achsen der Kollineation zu Diagonalen hat.*

Jede gescharte Kollineation läßt sich auch als Folge zweier Nullkorrelationen darstellen, sodaß die Achsen der Kollineation mit den Achsen der Strahlenkongruenz zusammenfallen, die den beiden durch die Nullsysteme bestimmten linearen Komplexen gemeinsam ist. Eine solche Darstellung ist auf ∞^4 *fache Art möglich.*

Das Letzte folgt daraus, daß man die erste der beiden Nullkorrelationen so bestimmen muß, daß die Achsen g und $\mathfrak{g}$ der Kollineation für sie reziproke Polaren sind; aber dies ist auf ∞^4 fache Weise möglich, da ein linearer Komplex durch zwei reziproke Polaren und einen Leitstrahl vollkommen bestimmt ist. Die andere der beiden Korrelationen muß dann gleichfalls eine Nullkorrelation sein, weil sie alle Strahlen der linearen Kongruenz mit g und $\mathfrak{g}$ als Achsen als Doppelstrahlen enthält.

§ 3.

Sind K_1 und K_2 zwei beliebige gegebene Polar- oder Nullkorrelationen und bezeichnet man die Kollineation $K_1 K_2$ mit K, so ist

$$\mathsf{K} K_2 = K_1, \quad \text{mithin} \quad \mathsf{K}^{-1} K_1 = K_2;$$

das heißt aber:

Für zwei beliebige gegebene involutorische Korrelationen K_1 *und* K_2 *gibt es im allgemeinen eine einzige Kollineation* K, *die das eine der beiden durch* K_2 *verbundenen räumlichen Systeme so transformiert, daß es mit dem andern*

ein Paar der durch K_1 verbundenen Systeme bildet. Die inverse zu dieser Kollineation K *führt in derselben Weise K_1 in K_2 über.*

Nun haben im allgemeinen zwei involutorische Raumsysteme, seien sie nun beide Polar- oder beide Nullsysteme oder je eins ein Polar- und Nullsystem, ein gemeinsames Paar reziproker Polaren g und $\mathfrak{g}$; nämlich im ersten Falle ein Paar Gegenkanten des gemeinsamen Poltetraeders, im zweiten die Achsen der linearen Strahlenkongruenz, die den beiden durch die Nullsysteme bestimmten linearen Komplexen gemeinsam ist, im dritten die Achsen der Strahlenkongruenz, die gemeinsam ist dem durch die Nullkorrelation bestimmten linearen Komplex und demjenigen, in den dieser durch die polare Korrelation übergeführt wird.*)

Ist K_1 eine bestimmte polare, K_2 eine bestimmte Nullkorrelation, so ist $K_1 K_2$ eine halbgescharte Kollineation (S. 403), die sich auf ∞^1fache Weise als Folge zweier besonderen Kollineationen $\mathsf{K}_1\mathsf{K}_2$ darstellen läßt (S. 399), sodaß also $K_1 K_2 = \mathsf{K}_1\mathsf{K}_2$ ist.

Kommt es nur darauf an, ein vorgelegtes Polarsystem K_1 in ein beliebiges Nullsystem K_2 umzuformen, gleichgültig in welches, so hat man zur Bestimmung von K_1 und K_2 für g und $\mathfrak{g}$ zwei beliebige reziproke Polaren des Polarsystems, als die auf g und $\mathfrak{g}$ vorgeschriebenen Projektivitäten die durch K_1 auf ihnen erzeugten Involutionen konjugierter Punkte zu wählen und kann im übrigen z. B. die besonderen in § 1 c) und d) näher beschriebenen Kollineationen nehmen. Wir betrachten ein paar besondere Fälle.

Ist das durch K_1 bestimmte Polarsystem rotatorisch**) und nimmt man für g die Rotationsachse, so ist $\mathfrak{g}$ die zu g normale Gerade im Unendlichen, und die Involution auf ihr hat zwei imaginäre Kreispunkte zu Doppelpunkten. Die beiden besonderen quaternär-zyklischen Kollineationen, die unter den Kollineationen K_1 auftreten, sind dann Drehungen um 90^0 um g als Achse in dem einen oder andern Drehungssinne. Weil nämlich dann (mit Benutzung der früheren Bezeichnung in § 1 d) die Strahlen $C\mathfrak{B}$ und $C\mathfrak{B}_1$ sowie $C\mathfrak{C}$ und $C\mathfrak{C}_1$ des harmonischen Büschels aufeinander senkrecht stehen, muß das eine Paar die von dem andern gebildeten Winkel halbieren, und weil ferner $PP_1 \parallel C\mathfrak{B}$ wird, $CP = CP_1$ sein. Diese beiden Kollineationen bezeichnen wir mit Δ_1 und Δ_2.

Ist zweitens die Ordnungsfläche des Polarsystems ein reelles elliptisches Paraboloid, g seine Achse, so liegt $\mathfrak{g}$ gleichfalls im Unendlichen, und die beiden zentrisch-involutorischen Kollineationen, die unter den K_1 vorkommen, sind dann die zentrisch-symmetrische Σ_c in bezug auf den

*) Reye, diese Ztschr. Bd. 43, Nr. 38.

**) Reye, G. d. L. II, S. 133.

Scheitel des Paraboloids als Zentrum der Symmetrie und die planarsymmetrische Σ_p in bezug auf die Tangentialebene im Scheitelpunkt als Ebene der Symmetrie.

Ist endlich die Ordnungsfläche ein reelles Rotationsparaboloid, so kommen sowohl jene beiden Drehungen als auch diese beiden Symmetrieen vor, und man erhält dann die einfachsten Kollineationen, die die Überführung des Polarsystems in ein Nullsystem vermitteln, wenn man eine der Drehungen Δ_1 und Δ_2 mit einer der symmetrischen Kollineationen Σ_c und Σ_p zusammensetzt. Die Anschauung lehrt, daß in diesem Falle die Kollineationen vertauschbar sind, und ferner, daß $\Sigma_c\Delta_1$ und $\Sigma_p\Delta_2$ einerseits und $\Sigma_p\Delta_1$ und $\Sigma_c\Delta_2$ anderseits identisch sind. Also:

Unterwirft man das eine der beiden in einem rotatorischen Polarsystem enthaltenen Raumsysteme einer Drehung um 90° um die Achse des Polarsystems und alsdann einer zentrisch-involutorischen Kollineation, die den einen Schnittpunkt der Achse mit der Ordnungsfläche des Polarsystems zum Zentrum und die Tangentialebene im andern Schnittpunkt zur Ebene der Involution hat, so bildet es nunmehr mit dem andern System ein Nullsystem.

Dieses besondere Ergebnis ist nicht neu. Es wurde zuerst für das Polarsystem eines Rotationsparaboloids von H. G. Hauck*), bald darauf für dasselbe unabhängig von ihm auch von H. Segre**) und später, wie ich erst, nachdem diese Arbeit im wesentlichen fertig war, bemerkte, von H. Theodor Schmid***) für das Rotationsellipsoid bewiesen. Herr Schmid beweist in dieser Arbeit vorher einen Satz, der sich in unserer Bezeichnung wie folgt aussprechen läßt:

Es seien K eine beliebige polare Korrelation, K_1 eine der in b) bezeichneten projektiven Drehungen um die beliebige Gerade g als Achse, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ die Schnittpunkte von g mit der Kernfläche von K. Führt dann die Korrelation $K\mathsf{K}$ die beliebige Ebene π in P über und schneidet $\mathfrak{E}P$ (oder $\mathfrak{E}'P$) π in M, so sind π und M in einem Nullsystem 2. Grades einander zugeordnet. Es wird vom 1. Grade, wenn für K_1 eine der in § 1 d) behandelten Kollineationen genommen wird.

Wir kehren zu unserer Untersuchung zurück. Welche Linie bei einer bestimmten Wahl von g und $\mathfrak{g}$ und Benutzung einer nicht speziellen halbgescharten Kollineation K Achse des Nullsystems wird, läßt sich folgendermaßen ermitteln. Man nehme zur Individualisierung von K als Punkt P (S. 399) den Mittelpunkt des Polarsystems, dann werden C und $\mathfrak{C}$ die Zentra der Involutionen auf g bezw. $\mathfrak{g}$ und P_1 in dem Nullsystem der Pol der unendlich fernen Ebene. Durch ihn geht die Achse des Null-

*) Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. Bd. 31, S. 362.

**) Battaglini Giornale XXV, S. 20.

***) Monatshefte f. Mathem. u. Physik VIII, S. 267.

systems. Da nun g und $\mathfrak{g}$ auch reziproke Polaren des Nullsystems sind, so sind sie Leitstrahlen eines hyperbolischen Paraboloids, dessen Regelschar zu der Richtung von P_1 normal ist.*) Der Leitstrahl dieses Paraboloids, der durch P_1 geht, ist die Achse des Nullsystems.

§ 4.

Die ∞^3 Kollineationen mit gemeinsamem Haupttetraeder führen alle tetraedralen Komplexe, die dieses Tetraeder gleichfalls zum Haupttetraeder haben, in sich über.**) Da es ferner ∞^1 tetraedrale Komplexe mit diesem bestimmten Haupttetraeder gibt, etwa individualisiert durch die Werte des konstanten Doppelverhältnisses, in welchem jeder Komplexstrahl von den Flächen des Tetraeders geschnitten wird, so gehören zu jedem dieser Komplexe ∞^2 Kollineationen, die ihn in der bekannten Reyeschen Art erzeugen. Auf jeder von zwei Gegenkanten g und $\mathfrak{g}$ des Haupttetraeders gibt es ∞^1 verschiedene Punktprojektivitäten mit den betr. Tetraederecken als Doppelpunkten, und es fragt sich, wieviele von den genannten ∞^2 Kollineationen dieselben vorgeschriebenen Projektivitäten auf g und $\mathfrak{g}$ erzeugen. Wir beweisen:

Jeder tetraedrale Komplex wird i. a. durch zwei Kollineationen erzeugt, die auf zwei Gegenkanten seines Haupttetraeders vorgeschriebenen Punktprojektivitäten bestimmen. Insbesondere kann er durch dreimal je zwei halbgescharte Kollineationen erzeugt werden, deren Achsen ein paar Gegenkanten seines Haupttetraeders sind.

Fassen wir nämlich einen nicht auf einer Tetraederfläche liegenden beliebigen Punkt P des Raumes ins Auge, legen durch ihn die Gerade a, die g und $\mathfrak{g}$ in C bezw. $\mathfrak{C}$ schneidet, und trifft die Verbindungslinie der den Punkten C und $\mathfrak{C}$ in den Projektivitäten zugeordneten Punkte C_1 bezw. $\mathfrak{C}_1$ den Komplexkegel mit der Spitze P in den beiden Punkten P_1 und P_1', so sind die Kollineationen, für die PP_1 und PP_1' Paare entsprechender Punkte sind, die im Satz bezeichneten. Daß sie den Komplex erzeugen, folgt daraus, daß PP_1 und PP_1' Komplexstrahlen sind, und ein tetraedraler Komplex durch das Hauttetraeder und einen Strahl, der keine Tetraederkante schneidet, bestimmt ist.***)

Die ∞^2 Kollineationen, die einen bestimmten tetraedralen Komplex erzeugen, lassen sich in ∞^1 Mannigfaltigkeiten (nicht Gruppen) $M(K)$ von je ∞^1 Kollineationen zusammenfassen, so daß die Kollineationen, die zu derselben Mannigfaltigkeit gehören, den Raum in ∞^1 zu demselben

*) Reye, G. d. L. II, S. 171.
**) Sturm, Liniengeometrie I, S. 378.
***) Reye, G. d. L. III, S. 6.

Büschel von Raumsystemen gehörige Räume überführen.*) Von diesen ∞^1 Kollineationen und den Projektivitäten, die durch sie auf g und $\mathfrak{g}$ erzeugt werden, erhält man auf folgende Art eine deutliche Anschauung.

Eine beliebige durch P gehende kubische Ordnungskurve $\mathfrak{k}^3$ des Komplexes hat wie alle andern g und $\mathfrak{g}$ zu Sehnen. Eine an $\mathfrak{k}^3$ hingleitende Gerade, die dabei die Sehnen g und $\mathfrak{g}$ beständig schneidet, beschreibt eine Regelschar, zu deren Leitlinien g und $\mathfrak{g}$ gehören.**) Der Komplexkegel mit der Spitze P schneidet die so erzeugte gradlinige Fläche 2. O. außer in $\mathfrak{k}^3$ noch in einem Komplexstrahl, der gleichzeitig eine Leitlinie der Regelfläche ist. Auf diese Weise wird jeder durch P gehenden Ordnungskurve ein durch P gehender Komplexstrahl zugeordnet und umgekehrt. Daraus aber folgt:

*Durch jeden nicht auf einer Fläche des Haupttetraeders liegenden Punkt gehen ∞^1 kubische Ordnungskurven des tetraedralen Komplexes.****)

Die ∞^1 Kollineationen einer Mannigfaltigkeit $M(\mathsf{K})$ erhält man nun, wenn man dem Punkte P nacheinander die andern Punkte irgend einer bestimmten durch P gehenden Ordnungskurve zuweist.†) Der durch P gehenden g und $\mathfrak{g}$ schneidenden Geraden a werden dadurch die Geraden der genannten Regelschar zugewiesen, und jede von diesen und die Gerade a bestimmen nacheinander durch das Paar ihrer Schnittpunkte mit g bezw. $\mathfrak{g}$ die auf den letzteren durch die Kollineationen bestimmten Projektivitäten.

Charlottenburg, Januar 1904.

---

*) Reye, G. d. L. III, S. 11 f. Sturm a. a. O. I, S. 347 f.

**) Reye, G. d. L. II, S. 193.

***) Vgl. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896, S. 345.

†) Reye, G. d. L. III, S. 11, 125.

Über einen Satz der Analysis Situs.

Von

Friedrich Riesz in Györ (Ungarn).

Die Schoenfliessche Umkehrung*) des Jordanschen Satzes über geschlossene Kurven ohne Doppelpunkte läßt sich einfach beweisen, wenn man dem Beweise ein Verfahren an die Spitze stellt, nach welchem die Punkte der Kurve zyklisch angeordnet werden. Es ist dasselbe Verfahren, mittels dessen Herr Hilbert in seiner Arbeit „Über die Grundlagen der Geometrie**)" dasselbe Ziel für den wahren Kreis erreicht. Wird nämlich der Beweis des Satzes in § 6 bei Herrn Hilbert derart modifiziert, daß, anstatt die zugrunde liegenden Axiome von neuem heranzuziehen, nur die schon früher auf Grund derselben bewiesenen Eigenschaften des konstruierten Gebildes benützt werden, so läßt sich das ganze Verfahren samt dem Beweise auf das allgemeinere Problem übertragen. Demgemäß soll im folgenden der betreffende Punkt eingehender behandelt, das Verfahren aber nur skizziert werden; bezüglich des Beweises wird immer auf den betreffenden Punkt der Hilbertschen Arbeit verwiesen.

Auf diese Weise wird die Möglichkeit einer eindeutig umkehrbaren, stetigen Abbildung der zu betrachtenden Punktmenge auf die Kreisperipherie nachgewiesen. An Hand des Verfahrens wollen wir nun auch versuchen, einen Vorgang für diese Abbildung anzugeben. Es soll dabei der Schoenfliessche Satz in etwas allgemeinerer Fassung gegeben werden, indem wir die Streckenzüge durch beliebige Jordansche Kurven ersetzen. Natürlich könnte der Beweis bei Beibehaltung der Schönfliesschen Fassung auf dieselbe Weise geführt werden.

Der Satz lautet in unserer Fassung folgendermaßen:

Eine im Endlichen gelegene, ebene perfekte Menge $\mathfrak{P}$ *teile die in ihr nicht enthaltenen Punkte der Ebene in eine innere Menge* $\mathfrak{I}$ *und eine äußere Menge* $\mathfrak{A}$ *von der Beschaffenheit, daß*

*) Göttinger Nachrichten, 1902, S. 185. — Math. Annalen, Bd. 58, S. 195.

**) Math. Annalen, Bd. 56, S. 381. (Die Arbeit ist auch abgedruckt in Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. Ausg., S. 121.)

1) *je zwei beliebige Punkte aus* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ *durch eine Jordansche Kurve verbunden werden können, welche nur Punkte aus* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ *enthält;*

2)*) *jeder Punkt P aus* $\mathfrak{P}$ *mit jedem Punkte aus* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ *durch eine Jordansche Kurve verbunden werden kann, die mit Ausnahme von P nur Punkte aus* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{A}}$ *enthält;*

3) *jede Jordansche Kurve, die einen Punkt aus* $\mathfrak{J}$ *mit einem Punkte aus* $\mathfrak{A}$ *verbindet, wenigstens einen Punkt aus* $\mathfrak{P}$ *enthält:*

dann läßt sich die Menge $\mathfrak{P}$ *eindeutig umkehrbar und stetig auf die Kreisperipherie abbilden.*

I. Die zyklische Anordnung der Menge $\mathfrak{P}$.

Auf analoge Weise, wie dies in § 4 der Hilbertschen Arbeit für den wahren Kreis geschieht, läßt es sich beweisen, daß irgend zwei Punkte P_1, P_2 aus $\mathfrak{P}$ sich sowohl durch eine Jordansche Kurve $\underline{P_1 P_2}$ verbinden lassen, die mit Ausnahme der Endpunkte nur Punkte aus $\mathfrak{J}$ enthält, wie auch durch eine Jordansche Kurve $\overline{P_1 P_2}$, die mit Ausnahme der Endpunkte nur Punkte aus $\mathfrak{A}$ enthält. Aus zwei solchen Kurven läßt sich nun eine geschlossene Jordansche Kurve $\underline{P_1}\,\overline{P_2}$ zusammensetzen. Irgend ein Paar von Punkten P_3, P_4 aus $\mathfrak{P}$ kann nun in bezug auf die Kurve auf zwei Arten liegen: entweder es liegt der eine Punkt innerhalb, der andere außerhalb der Kurve, dann sagen wir, das Punktepaar wird durch die Kurve getrennt, oder es liegen beide Punkte innerhalb, resp. beide außerhalb der Kurve; wir sagen: das Punktepaar wird durch die Kurve nicht getrennt.

Analog den Ausführungen des § 5 der Hilbertschen Arbeit kann es nun gezeigt werden, daß ein Punktepaar in bezug auf alle Kurven, die aus einer beliebigen in $\mathfrak{J}$ verlaufenden Jordanschen Kurve $\underline{P_1 P_2}$ und aus einer beliebigen in $\mathfrak{A}$ verlaufenden Jordanschen Kurve $\overline{P_1 P_2}$ zusammengesetzt werden, dieselbe Lage hat. Wir dürfen daher sagen, ein Punktepaar P_3, P_4 werde durch das Punktepaar P_1, P_2 getrennt, bezw. nicht getrennt, je nachdem es durch die Kurven $\underline{P_1}\,\overline{P_2}$ getrennt oder nicht getrennt wird.

Es folgen auch leicht die übrigen Sätze, die den Sätzen l. c. entsprechen, nämlich:

*) Die Forderung 2) läßt sich auch durch die Forderung ersetzen, daß in jeder beliebigen Umgebung eines jeden Punktes aus $\mathfrak{P}$ es sowohl Punkte aus $\mathfrak{J}$, wie auch Punkte aus $\mathfrak{A}$ gebe. Mit der Perfektheit verknüpft, enthält diese Forderung die Kurvenartigkeit der ebenen Menge $\mathfrak{P}$.

Wenn P_3, P_4 durch P_1, P_2 getrennt weerden, so werden auch P_1, P_2 durch P_3, P_4 getrennt.

Wenn P_1, P_4 durch P_2, P_5 und P_3, P_4 durch P_3, P_5 getrennt werden, so werden P_1, P_4 durch P_3, P_5 getrennt.

Hieraus erkennen wir, daß *die Punkte der Menge $\mathfrak{P}$ zyklisch, d. h. mit Rücksicht auf die gegenseitige Trennung von Punktepaaren derart angeordnet sind, wie irgend eine auf der Kreisperipherie gelegene Punktmenge.*

II. Die zyklische Anordnung ist lückenlos.

Augenscheinlich wäre es nicht ausgeschlossen, daß die Menge $\mathfrak{P}$ eindeutig umkehrbar und stetig mit Erhaltung der Anordnung in eine perfekte Punktmenge auf der Kreisperipherie abgebildet werden kann, welche aus mehreren perfekten Mengen besteht und somit nicht zusammenhängend ist. Die Unmöglichkeit einer derartigen Abbildung und damit der Zusammenhang der Menge $\mathfrak{P}$ beruht nun auf folgendem Satze:

Zu jedem Punktepaare P_1, P_2 aus $\mathfrak{P}$ gibt es ein Punktepaar, also auch beliebig viele Punktepaare, welche es trennen.

Unser Satz entspricht dem Satze in § 6 der Hilbertschen Arbeit, doch bedürfen wir eines andern Beweises.

Wir ziehen wieder die schon betrachtete geschlossene Jordansche Kurve $\overline{P_1 P_2}$ heran und nehmen an, der Satz wäre nicht richtig und es gäbe kein Punktepaar, welches durch $P_1 P_2$ getrennt wird. Dann müßten alle Punkte von $\mathfrak{P}$ entweder alle innerhalb oder alle außerhalb der Kurve $\overline{P_1 P_2}$ liegen. Nehmen wir beispielsweise den ersten Fall an. Für einen beliebigen Punkt der Kurve $\overline{P_1 P_2}$, wenn er nur kein Endpunkt ist, gibt es jedenfalls eine Umgebung, welche nur Punkte aus $\mathfrak{I}$ enthält. In jener Umgebung gibt es gewiß einen Punkt, der außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt. Es gibt somit jedenfalls einen Punkt aus $\mathfrak{I}$, der zugleich außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt. Durch ähnliche Schlußweise für die Umgebung eines Punktes auf der Kurve $\overline{P_1 P_2}$ folgt, daß es gewiß einen Punkt aus $\mathfrak{A}$ gibt, der zugleich außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt. Verbinden wir die beiden Punkte durch eine Jordansche Kurve, die außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ verläuft, so enthält diese sicher keinen Punkt aus $\mathfrak{P}$. Dies widerspricht jedoch der Bedingung 3). Analog würde auch die Annahme, $\mathfrak{P}$ sei außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ gelegen, zu Widerspruch führen. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

III. Die eindeutig umkehrbare Abbildung der Menge $\mathfrak{P}$ auf die Kreisperipherie.

Auf dieselbe Art, wie es in § 7 und 8 der Hilbertschen Arbeit für den wahren Kreis geschieht, könnte nun der Beweis der Existenz einer eindeutig umkehrbaren stetigen Abbildung der Menge $\mathfrak{P}$ auf die Kreis-

peripherie erbracht werden. Der Beweis stützt sich lediglich darauf, daß aus der Menge $\mathfrak{P}$ eine abzählbare Teilmenge ausgeschieden werden kann, die in unserer Anordnung den Ordnungstypus der Menge der rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Anordnung besitzt und deren Häufungspunkte die Menge $\mathfrak{P}$ ausmachen. Wollen wir nun die Abbildung wirklich angeben, so muß diese abzählbare Punktmenge bestimmt werden.

Um diesen Zweck zu erreichen, legen wir in unserer Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem fest und denken uns das kleinste Rechteck bestimmt, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen und außerhalb dessen kein Punkt $\mathfrak{P}$ liegt. Durch equidistante, zu den beiden Seitenrichtungen parallele Linien werde dieses Rechteck in n^2 kongruente Teilrechtecke zerlegt. Wir wollen von einem Punkte sagen, er sei in einem Rechtecke enthalten, wenn er entweder im Inneren oder auf der Peripherie des Rechteckes liegt. Aus der Perfektheit der Menge $\mathfrak{P}$ folgt nun, daß jedes Teilrechteck, welches überhaupt einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ enthält, auch einen solchen Punkt enthält, der unter allen im Rechtecke enthaltenen Punkten aus $\mathfrak{P}$ kleinster Ordinate die kleinste Abszisse besitzt. Die Anzahl aller dieser Punkte sei n_1. Dieselben teilen die zyklisch angeordnete Menge $\mathfrak{P}$ in n_1 Intervalle ein. Wir teilen die Kreisperipherie in n_1 gleiche Intervalle und ordnen diese Intervalle den Intervallen in $\mathfrak{P}$ derart zu, daß benachbarten Intervallen aus $\mathfrak{P}$ benachbarte Intervalle auf dem Kreise entsprechen. Wir ordnen nun die entsprechenden Teilpunkte ebenfalls einander zu.

Wir teilen nun auf dieselbe Weise jedes Teilrechteck in weitere n^2 Rechtecke und denken uns in jedem derselben, das überhaupt einen Punkt aus $\mathfrak{P}$ enthält, wiederum jenen Punkt bestimmt, der unter allen im Rechtecke enthaltenen Punkten aus $\mathfrak{P}$ kleinster Ordinate die kleinste Abszisse besitzt. Die Anzahl dieser Punkte sei n_2. Sie teilen die Menge $\mathfrak{P}$ in n_2 Intervalle, welche Teilintervalle der ersten n_1 Intervalle sind. Wird nun dadurch ein erstes Intervall in eine gewisse Anzahl von Intervallen geteilt, so teilen wir das entsprechende Intervall der Kreisperipherie in dieselbe Anzahl gleiche Teile und ordnen diese in derselben Ordnung den Teilintervallen des entsprechenden Intervalls auf $\mathfrak{P}$ zu. Die entsprechenden Teilpunkte ordnen wir wieder ebenfalls einander zu.

Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir eine unbegrenzte Anzahl von Punkten aus $\mathfrak{P}$. Denn auf jeder Seite irgend einer Geraden, welche parallel der x-Achse zwichen den beiden Seiten des Rechteckes läuft, befinden sich Punkte aus $\mathfrak{P}$ und somit auch Punkte aus $\mathfrak{Z}$; aus der Bedingung 1) folgt daher, daß auch auf der Geraden Punkte aus $\mathfrak{Z}$ wie aus $\mathfrak{A}$ und daher nach Bedingung 3) wenigstens ein Punkt aus $\mathfrak{P}$ liegen müssen Es kann daher n_1 nicht kleiner als n, n_2 nicht kleiner als n^2,

die Anzahl der nach der k^{ten} Teilung vorhandenen Punkte nicht kleiner als n^k sein. Durch genügende Anzahl von Schnitten kann somit jede beliebige Anzahl von Punkten bestimmt werden.

Die auf diese Weise festgelegte abzählbare Menge $\mathfrak{P}^*$ von Punkten aus $\mathfrak{P}$ und die ihr auf der Kreisperipherie entsprechende Punktmenge $\mathfrak{K}^*$ haben nun folgende Eigenschaften:

a) *In jeder beliebigen Umgebung eines jeden Punktes aus* $\mathfrak{P}$ *gibt es einen Punkt aus* $\mathfrak{P}^*$.

Denn ist δ der Abstand des Punktes von der Begrenzung der Umgebung, so kann ein Schritt der Konstruktion angegeben werden, für welchen die Summe der Quadrate zweier benachbarten Seiten der Teilrechtecke kleiner als δ^2 ist. Der Punkt ist somit in einem Teilrechtecke enthalten, welches innerhalb der Umgebung liegt; dasselbe Teilrechteck enthält auch einen Punkt aus $\mathfrak{P}^*$. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

b) *Für zwei beliebige Punkte aus* $\mathfrak{P}$ *und jeden beliebigen Punkt aus* $\mathfrak{P}^*$ *gibt es einen zweiten Punkt aus* $\mathfrak{P}^*$, *so daß die beiden ersten Punkte durch die beiden letzteren getrennt werden.*

Es seien nämlich P_1, P_2 die beiden ersten Punkte; wir denken uns für sie eine Kurve $\overline{P_1 P_2}$ bestimmt. Es sei nun P_3 ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{P}^*$. P_3 liege beispielsweise innerhalb $\overline{P_1 P_2}$; es muß sodann nachgewiesen werden, daß es auch außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ einen Punkt aus $\mathfrak{P}^*$ gibt. Außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt nach II. sicher ein Punkt aus $\mathfrak{P}$; es kann eine Umgebung dieses Punktes bestimmt werden, die außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt. In dieser Umgebung liegt aber nach a) sicher ein Punkt aus $\mathfrak{P}^*$.

Analoge Überlegung gilt für den zweiten Fall, daß nämlich P_3 außerhalb $\overline{P_1 P_2}$ liegt.

c) *Die Häufungspunkte der Menge* $\mathfrak{P}^*$ *machen die Menge* $\mathfrak{P}$, *jene der Menge* $\mathfrak{K}^*$ *die Kreisperipherie aus.*

Die erste Behauptung folgt aus a) und aus der Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{P}$. Die zweite Behauptung folgt daraus, daß infolge b) in jedem Teilintervalle auf $\mathfrak{P}$ weitere Teilungspunkte liegen, was dann nun auch für den Kreis gilt; da nun bei letzterem die Interpolation neuer Teilpunkte durch Teilung der Intervalle in gleiche Teile bewirkt wird, so konvergiert die Länge der Teilintervalle gegen Null; die Teilpunkte liegen somit auf der Kreisperipherie überall dicht.

d) *Der zyklischen Anordnung in* $\mathfrak{P}^*$ *entspricht die zyklische Anordnung in* $\mathfrak{K}^*$.

Um nun aus der Abbildung der Menge $\mathfrak{P}^*$ auf die Menge $\mathfrak{K}^*$ eine Abbildung der Menge $\mathfrak{P}$ auf die Kreisperipherie herzuleiten, fixieren wir

erstens einen Punkt P_x aus $\mathfrak{P}^*$ und den entsprechenden Punkt K_x aus $\mathfrak{K}^*$. Ist nun P ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{P}$, der jedoch $\mathfrak{P}^*$ nicht angehört, so wird durch ihn eine Teilung aller Punkte von $\mathfrak{P}^*$ mit Ausnahme von P_∞ in zwei Klassen bestimmt, derart, daß je zwei Punkte derselben Klasse durch die beiden Punkte P_∞ und P nicht getrennt, je zwei Punkte aus verschiedenen Klassen durch P_x und P getrennt werden. Dann werden aber auch P_∞ und ein beliebiger Punkt der einen Klasse durch zwei beliebige Punkte der andern Klasse nicht getrennt. Unserer Teilung entspricht nun in der Abbildung eine Teilung aller Punkte von $\mathfrak{K}^*$ mit Ausnahme von K_∞ in zwei Klassen derart, daß K_∞ und ein beliebiger Punkt der einen Klasse durch zwei beliebige Punkte der andern Klasse nicht getrennt werden. Eine derartige Teilung der auf der Kreisperipherie überall dichten Punktmenge definiert nun einen und nur einen der Menge $\mathfrak{K}^*$ nicht angehörenden Punkt K von der Eigenschaft, daß je zwei Punkte verschiedener Klassen durch K_∞ und K getrennt werden. Diesen Punkt K ordnen wir dem Punkte P zu.

Auf diese Weise wird jedem Punkte aus $\mathfrak{P}$ ein Punkt der Kreisperipherie zugeordnet derart, daß der zyklischen Anordnung der Menge $\mathfrak{P}$ die zyklische Anordnung der Bildmenge entspricht. Es muß nur noch bewiesen werden, daß jeder beliebige Punkt K der Kreisperipherie Bildpunkt eines und nur eines Punktes P aus $\mathfrak{P}$ ist. Durch einen beliebigen Punkt K wird nun eine Teilung der Menge $\mathfrak{K}^*$, mit Ausnahme von K_∞, definiert, welche die schon bezeichnete Eigenschaft besitzt; dieser Teilung entspricht eine Teilung der Menge $\mathfrak{P}^*$ von ähnlicher Eigenschaft. Wählen wir nun eine unendliche Reihe zyklischer Anordnung von Punkten der einen Klasse von $\mathfrak{K}^*$ aus, welche gegen den Punkt K konvergiert, so entspricht derselben eine unendliche zyklisch geordnete Reihe $P_1, P_2 \cdots P_i \cdots$ aus Punkten der einen Klasse von $\mathfrak{P}^*$. Einer unendlichen Reihe von derselben Eigenschaft aus der zweiten Klasse von $\mathfrak{K}^*$ entspricht eine unendliche Reihe $P_1', P_2' \cdots P_i' \cdots$ aus der zweiten Klasse von $\mathfrak{P}^*$. Die Punkte $P_1, P_2 \cdots P_i \cdots, P_1', P_2' \cdots P_i' \cdots$ besitzen jedenfalls einen Häufungspunkt P. Konstruieren wir nun die Kurve $\overline{P_i P_j'}$, so werden die Punkte $P_{i+1}, P_{i+2} \cdots, P_{j+1}', P_{j+2}' \cdots$ und folglich auch ihr Häufungspunkt P durch die Kurve $\overline{P_i P_j'}$ von P_∞ getrennt. Somit trennen P und P_∞ nach I. je zwei beliebige Punkte verschiedener Klassen. Dem Punkte P entspricht daher der Punkt K. Würde es einen zweiten Punkt (P) geben, dem ebenfalls der Punkt K entspräche, so müßte derselbe in der Menge $\mathfrak{P}^*$ dieselbe Teilung wie der Punkt P definieren: dann gäbe es aber keinen Punkt in $\mathfrak{P}^*$, der durch die beiden Punkte P und (P) von P_∞ getrennt wird, was doch dem Satze b) widerspricht.

Damit ist gezeigt, daß unsere Abbildung die Menge $\mathfrak{P}$ eindeutig umkehrbar auf die Gesamtheit der Punkte der Kreisperipherie bezieht. Die Abbildung erhält die zyklische Anordnung.

IV. Die Stetigkeit der Abbildung.

Wir haben nur noch nachzuweisen, daß unsere Abbildung stetig ist. Es sei $K_1, K_2 \cdots$ eine zyklisch geordnete unendliche Reihe beliebiger Punkte der Kreisperipherie, welche nicht um den ganzen Kreis herumgreift. Die Reihe konvergiere gegen den Punkt K. Es muß dann gezeigt werden, daß die entsprechende Reihe $P_1, P_2 \cdots$ gegen einen Punkt P konvergiert, der den Punkt K zum Bildpunkte hat. Daß die Reihe $P_1, P_2 \cdots$ überhaupt gegen einen Punkt P konvergiert, ist klar, da doch ihr Häufungspunkt infolge der zyklischen Anordnung Konvergenzpunkt sein muß. Wäre nun der Bildpunkt des Punktes P ein von K verschiedener Punkt (K), der daher kein Konvergenzpunkt der Reihe $K_1, K_2 \cdots$ ist, so gäbe es sicher zwei Punkte $(K)_-$ und $(K)_+$ der Kreisperipherie, welche den Punkt (K) von allen Punkten der Reihe $K_1, K_2 \cdots$ trennten. Die entsprechenden Punkte $(P)_-$ und $(P)_+$ und also auch die Jordansche Kurve $\overline{(P)_-(P)_+}$ würden dann den Punkt P von den Punkten der Reihe $P_1, P_2 \cdots$ trennen, was jedoch, da P Konvergenzpunkt der Reihe ist, zu Widerspruch führt.

Herr Schoenflies beweist den Satz durch ein Verfahren, welches die Menge $\mathfrak{J}$ durch eine abzählbare Menge von Rechtecksflächen ausfüllt. Die Menge $\mathfrak{P}$ ergibt sich dann als Kontur dieser Rechtecke. Während nun durch Ersetzung der Rechtecke durch rechtwinklige Parallelepipeda ein analoges Verfahren sich für die Teilung des Punktraumes ergibt, läßt sich unser Verfahren für eine analoge Teilung des Strahlenraumes durch eine Punktmenge verallgemeinern. Der erste Fall führt wohl zu geschlossenen Flächen, die sich nicht durchsetzen, der zweite zu geschlossenen Raumkurven ohne Doppelpunkt. Ich behalte mir vor, hierauf zurückzukommen.

Göttingen, im Februar 1904.

Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik.

Von

GEORG HAMEL in Karlsruhe.

Einleitung.

Als Lagrange das schon von Johann Bernouilli in gewisser Allgemeinheit ausgesprochene Prinzip der virtuellen Arbeiten zum fundamentalen Werkzeug der ganzen Mechanik erhob, lebte er so tief in isoperimetrischen Betrachtungen, daß er die virtuellen Verschiebungen — jedenfalls in seinen analytischen Ausführungen — mit den Variationen isoperimetrischer Probleme identifizierte und demnach für jede Koordinate q die in der Variationsrechnung richtige und notwendige Relation

$$d\delta q - \delta dq = 0$$

auch in der Mechanik stillschweigend benutzte.

Seitdem hat es wie ein Dogma gegolten, daß $d\delta q - \delta dq = 0$ das Merkmal für eine wirkliche (holonome) Koordinate sei, während

$$d\delta\vartheta - \delta d\vartheta \neq 0$$

die nicht-holonome (generalisierte) Koordinate ϑ anzeige.

So fruchtbringend nun auch die Verknüpfung der Mechanik mit der Variationsrechnung gewesen ist (Lagrange, Hamilton, Jacobi), so läßt sich doch nicht leugnen, daß die obige Auffassungsweise der virtuellen Verschiebungen einseitig ist und ihrer mechanischen Bedeutung nicht voll entspricht; daß sie namentlich der Anknüpfung weiterer, außerhalb des Gesichtskreises der Variationsrechnung liegender Beziehungen im Wege steht. Auch die merkwürdige, in der Literatur weitverbreitete Meinung, als ob das Wesen der allgemeinen Lagrangeschen Mechanik in den sogenannten Variationsprinzipien stecke, scheint mir in jenem Dogma ihre Wurzeln zu haben.

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß irgend eine Annahme über $d\delta q - \delta dq$ für die Mechanik ganz unnötig ist und daß das Kennzeichen für nicht-holonome Koordinaten ϑ nur in

der Form der Beziehung liegt, in der die $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$ zu den $d\delta q - \delta dq$ stehen, falls die q wirkliche (holonome) Koordinaten sind.

Dieser Satz ist an sich selbstverständlich, da das Prinzip der virtuellen Arbeiten die δdq gar nicht enthält. Faßt man aber die Bewegungsgleichungen der Mechanik nicht nur als das Resultat einer mehr oder minder willkürlichen und zufälligen Umformung des d'Alembertschen Prinzipes auf, sondern legt den Nachdruck auf die Bedeutung, welche dabei den Begriffen der Energie und des Impulses zukommt, so bedarf der ausgesprochene Satz doch noch einer Entwicklung, d. h. eines expliziten Nachweises auf einem der Wege, auf denen man sonst den soeben genannten Begriffen sowie dem Ausdruck $d\delta q - \delta dq$ zu begegnen pflegt. Es gibt nun eine Gleichung, welche mir das wesentliche fast aller dieser Wege zu vereinen scheint, und das ist die allgemeine Zentralgleichung. Deshalb wollen wir im folgenden nach den nötigen Auseinandersetzungen über die virtuellen Verrückungen selbst diese fundamentale Gleichung der Mechanik aufstellen, um dann aus ihr zunächst die allgemeinen Bewegungsgleichungen zu gewinnen, unabhängig von jeder Annahme über $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$.

Dann aber werfen wir von dem gewonnenen Standpunkte aus einen Blick auf die Beziehungen der Mechanik zur Variationsrechnung, wobei wir insbesondere sehen werden, wie die erst in letzter Zeit gewonnene Klarheit über das sogenannte Hamiltonsche Prinzip bei nicht-holonomen Bedingungsgleichungen ganz von selbst da ist, wenn man von der Zentralgleichung aus herantritt.

Endlich betrachten wir noch die Beziehungen der Mechanik zur Lieschen Gruppentheorie. Ich habe die Verwandtschaft dieser beiden Gebiete zwar schon in meiner Habilitationsschrift: „Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik“*) dargestellt und werde auch an einzelnen Ergebnissen hier nichts neues bringen, doch gelingt von unserer allgemeineren Auffassung der virtuellen Verschiebungen aus eine zum Teil neue und, wie ich auch glaube, klarere Darstellung des Sachverhaltes. Insbesondere ist es mir jetzt auch möglich geworden, den Beweis für den Satz über die gleichzeitige Existenz von Eulerschen Gleichungen und Impulsgleichungen rein begrifflich zu führen. Ein rein gruppentheoretischer Satz, den ich in meiner Habilitationsschrift nur kurz angeführt habe, dient mir dabei jetzt als willkommene Brücke.

*) Auch in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Heft 1, 1904. Im folgenden stets mit „L. E. Gl.“ bezeichnet.

§ 1.

Definition der virtuellen Verschiebungen bei holonomen und bei nicht-holonomen Koordinaten.

Wir betrachten zunächst einen freien Punkt bei einer bestimmten Bewegung im Raume, also daß sein Positionsvektor

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(t)$$

für alle Werte der Zeit t eines gewissen Intervalles als bekannt gelten kann und damit auch seine Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \dot{\bar{\varphi}}(t)$$

an jeder Stelle seiner Bahn.

Wir ordnen nun dem Punkte in jedem Augenblicke eine virtuelle Verschiebung $\delta\bar{x}$ zu, indem wir setzen

$$\delta\bar{x} = \bar{w}(t),$$

wo $\bar{w}$ eine stetige und stetig differentiierbare, sonst aber willkürliche Funktion der Zeit sei. Indem wir dann schreiben:

$$\bar{x}' = \bar{x} + \delta\bar{x} = \bar{\varphi}(t) + \bar{w}(t),$$

wird jedem Punkte der Bahn ein Nachbarpunkt zugeteilt.

Es ist nun für die Betrachtungen der Variationsrechnung wesentlich und notwendig, die Gesamtheit dieser Nachbarpunkte als neue, variierte Bahn aufzufassen, für die dann auch $\frac{d\bar{x}}{dt}$ definiert ist, natürlich als

$$\frac{d\bar{x}'}{dt} = \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{w}},$$

so daß die Variation $\delta d\bar{x} = d\bar{x}' - d\bar{x}$ durch

$$\delta d\bar{x} = \dot{\bar{w}}(t)dt = d\delta\bar{x}$$

gegeben ist. Es besteht also bei dieser Auffassungsweise zwischen den Verschiebungen $\delta\bar{x}$ und $d\bar{x}$ die Beziehung

$$\delta dx - d\delta\bar{x} = 0.$$

Diese Auffassung ist aber an sich keineswegs notwendig; sehen wir $d\bar{x}$ und δx als zwei unabhängige Verschiebungen an, so ist zwar $d\delta\bar{x}$ mit δx bekannt, nicht aber $\delta d\bar{x}$, da ja $d\bar{x}$ zunächst nur für die Bahn selbst definiert ist.

Wir machen also auch hinfort noch keinerlei Annahmen über

$$d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$$

d. h. wir lassen uns die Definition von $d\bar{x}$ außerhalb der einen ins Auge gefaßten Bahn noch vollkommen frei.

Die gleichen Betrachtungen können wir offenbar für irgend eine Variabele q anstellen, die wir als Funktion der Zeit t verfolgen.

Nunmehr fassen wir ein mechanisches System von n Graden der Freiheit ins Auge, also daß für jeden seiner Punkte und für alle Zeiten

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(a, b, c; q_1, \cdots, q_n)$$

gesetzt werden kann, wo a, b, c drei von der Zeit unabhängige Parameter bedeuten, welche gestatten, den einzelnen Punkt des Systems zu charakterisieren; $q_1, \cdots, q_n$ seien die mit der Zeit veränderlichen Lagrangeschen Koordinaten. Die Zeit t selbst komme in $\bar{\varphi}$ explizit nicht vor, das System sei also nach einer Ausdrucksweise Boltzmanns skleronom. Diese Annahme dient einstweilen zur Vereinfachung. (Über den nicht-skleronomen Fall siehe den Schluß von § 3.)

Von etwaigen nicht-holonomen Bedingungsgleichungen sehen wir einstweilen ab; in § 3 wird noch kurz die Rede davon sein.

Die n Parameter oder Koordinaten q seien übrigens wesentlich, es bestehe also keine in den a, b, c identische Relation der Form

$$\sum \bar{l}_\lambda \psi_\lambda = 0,$$

wo

$$\bar{l}_\lambda = \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda}$$

gesetzt ist, und wo die ψ_λ von den a, b, c unabhängig sind.

Unter diesen Voraussetzungen definieren wir virtuelle Verschiebungen $\delta\bar{x}$ durch

$$\delta\bar{x} = \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{l}_\lambda \delta q_\lambda$$

und in ähnlicher Weise virtuelle Änderungen für jede Funktion χ der q durch

$$\delta\chi = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \chi}{\partial q_\lambda} \delta q_\lambda,$$

wobei für die δq das zu anfang dieses Paragraphen Gesagte gelten möge. Insbesondere folge auch, entsprechend dem Charakter der δ-Operation als einer Differentiation, aus

$$d\bar{x} = \sum_i \bar{l}_i dq_i,$$

$$\delta d\bar{x} = \sum_{i,\varrho} \frac{\partial \bar{l}_i}{\partial q_\varrho} dq_i \delta q_\varrho + \sum_i \bar{l}_i \delta dq_i^{*}), \tag{1}$$

wobei wir aber die Definition von δdq_i noch ganz in der Hand behalten wollen.

Bei dieser Willkür ist es aber wichtig, folgenden Satz zu beweisen:

Jede Festsetzung über die $d\delta q - \delta dq$ bei irgend einem unabhängigen Parametersystem der q bedingt eine Entscheidung für den entsprechenden Ausdruck bei jedem anderen unabhängigen Parametersystem.

Es genügt offenbar, die gegenseitige Abhängigkeit zwischen den $d\delta q - \delta dq$ und $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ zu zeigen:

Neben der Gleichung (1) besteht noch die folgende:

$$d\delta\bar{x} = \sum_{i,\varrho} \frac{\partial \bar{l}_\varrho}{\partial q_i} dq_i \delta q_\varrho + \sum_i \bar{l}_i d\delta q_i, \tag{2}$$

und weil hier

$$\frac{\partial \bar{l}_\varrho}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{l}_i}{\partial q_\varrho} = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial q_\varrho \partial q_i}$$

ist, so ergibt sich durch Subtraktion von (1) und (2):

$$d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = \sum_i \bar{l}_i (d\delta q_i - \delta dq_i). \tag{3}$$

Die Abhängigkeit der $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ von den $d\delta q_i - \delta dq_i$ leuchtet ein; aber auch das Umgekehrte trifft zu. Denn denkt man sich die Gleichung (3) für alle a, b, c aufgestellt und beachtet, daß die $d\delta q - \delta dq$ von den a, b, c unabhängig sind, so müssen sich alle $d\delta q - \delta dq$ durch Komponenten geeignet gewählter $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ ausdrücken lassen; denn eine der zur Bestimmung der n Größen $d\delta q - \delta dq$ in Betracht kommenden Determinanten n^{ten} Grades muß von Null verschieden sein, weil keine Relation der Form

$$\sum \bar{l}_i \psi_i = 0$$

für alle a, b, c bestehen sollte. Und damit ist unsere Behauptung bewiesen. *Insbesondere müssen also alle $d\delta q - \delta dq$ verschwinden, wenn $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ stets Null ist.* Sonst kann man natürlich über $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$

*) Daß wir hier an dem differentiellen Charakter der δ-Operation festhalten, daß wir mit anderen Worten auch bei der (unendlich kleinen) Variation von $d\bar{x}$ nicht aus dem Lagrangeschen Bewegungsraume heraustreten, ist schließlich auch noch willkürlich und unnötig. Doch wollen wir diese Annahme hier gelten lassen.

nicht für alle a, b, c willkürlich verfügen, sondern nur über insgesamt n unabhängige Verschiebungen; die andern Komponenten der $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ sind dann so zu wählen, daß die Gleichungen (3) für alle a, b, c möglich bleiben.

* * *

Wir wollen jetzt die Definition der virtuellen Verschiebungen auch auf nicht-holonome Geschwindigkeitsparameter ausdehnen.

Wir denken uns zur Schilderung des Geschwindigkeitszustandes des Systems an Stelle der n Größen $\frac{dq_\lambda}{dt}$ neue Geschwindigkeitsparameter ω durch die linearen Gleichungen

$$\dot{q}_\lambda = \sum_{\varrho=1}^{n} \xi_{\varrho,\lambda}\, \omega_\varrho \cdots \tag{4}$$

eingeführt.

In dem für die Bewegung in Betracht kommenden Bereiche sei die Determinante $|\xi_{\varrho,\lambda}|$ nicht Null, so daß wir die Gleichungen (4) auch nach den ω auflösen können:

$$\omega_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi_{\varrho,\lambda}\, \dot{q}_\lambda. \tag{4'}$$

Obwohl nun die ω_ϱ im allgemeinen keine totalen Ableitungen nach der Zeit sind, wollen wir doch symbolisch schreiben

$$\omega_\varrho = \frac{d\vartheta_\varrho}{dt}$$

und ϑ_ϱ als eine nicht-holonome (generalisierte) Koordinate bezeichnen.

Auch definieren wir den Gleichungen (4') entsprechend n virtuelle Verschiebungen durch

$$\delta\vartheta_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi_{\varrho,\lambda}\, \delta q_\lambda. \tag{4''}$$

Durch die $d\vartheta$ resp. $\delta\vartheta$ ausgedrückt, sei jetzt

$$d\bar{x} = \sum_\lambda \bar{l}_\lambda\, d\vartheta_\lambda,$$

$$\delta\bar{x} = \sum_\lambda \bar{l}_\lambda\, \delta\vartheta_\lambda,$$

wo aber nunmehr

$$\bar{l}_\lambda = \sum \frac{\partial\bar{x}}{\partial q_\varrho}\, \xi_{\lambda,\varrho} \tag{5}$$

gesetzt ist, oder nach Analogie eines wirklichen Differentialquotienten symbolisch geschrieben:

$$\bar{l}_\lambda = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \vartheta_\lambda}\right).$$

Die Ausdrücke $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$ stehen nun zu den $d\delta q - \delta dq$ wieder im Verhältnis einer vollständigen Abhängigkeit. Es ist nämlich nach den Gleichungen (4″) und (4′)

$$d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi_{\varrho,\lambda}(d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda) + \sum_{\sigma,\lambda}\left(\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda}\right)\delta q_\lambda dq_\sigma$$

oder

$$\text{(I)} \qquad d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho = \sum_{\lambda} \pi_{\varrho,\lambda}(d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda) + \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\,\delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu,$$

wobei zur Abkürzung

$$\beta_{\mu,\nu,\varrho} = \sum_{\sigma,\lambda}\left(\frac{\partial \pi_{\varrho,\lambda}}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \pi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\lambda}\right)\xi_{\mu,\lambda}\,\xi_{\nu,\sigma}$$

gesetzt ist.

Man erkennt leicht, daß die $\beta_{\mu,\nu,\varrho}$ dann und nur dann verschwinden, wenn die ϑ wirkliche (holonome) Koordinaten sind.

Wir wollen die Gleichungen (I) die „Transitivitäts- oder Übergangsgleichungen“ der ersten Form nennen. Wir erhalten die zweite Form, wenn wir (I) nach $d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda$ auflösen:

$$d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda = \sum_{\varrho} \xi_{\varrho,\lambda}(d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho) - \sum_{\varrho} \xi_{\varrho,\lambda} \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\,\delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu$$

und dies in die Gleichung

$$d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \bar{x}}{\partial q_\lambda}(d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda)$$

einsetzen, wobei wir die Gleichungen (5) beachten. So bekommen wir

$$\text{(I′)} \qquad d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = \sum_{\varrho} \bar{l}_\varrho(d\delta\vartheta_\varrho - \delta d\vartheta_\varrho) - \sum_{\varrho} \bar{l}_\varrho \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\,\delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu,$$

die Übergangsgleichungen der zweiten Form.

Nicht-holonome Koordinaten ϑ sind also bei unserer allgemeineren Auffassung der virtuellen Verschiebungen nicht dadurch gekennzeichnet, daß $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$ von Null verschieden ist, sondern vielmehr durch die Form der Beziehung (I′) *resp.* (I), *in der $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$ zu $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ resp. zu $d\delta q - \delta dq$ steht, wenn die q wirkliche Koordinaten sind.*

§ 2.

Die allgemeine Zentralgleichung und die Lagrange-Eulerschen Gleichungen.

Um nun zu zeigen, daß die Mechanik von jeder Annahme über $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ unabhängig ist, die über das vorher Gesagte hinausgeht, leiten wir zunächst die allgemeine Zentralgleichung ab, welche den Kern der ganzen Kinetik bildet.

Wir gehen von der Identität aus:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x}) \equiv \ddot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x} + \delta\left(\frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2\right) + \dot{\bar{x}}\left(\frac{d}{dt}\delta\bar{x} - \delta\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^*),$$

wobei ein übergesetzter Punkt nach Newton die Ableitung nach der Zeit, $\dot{\bar{x}} \cdot d\bar{x}$ das innere oder Arbeitsprodukt der Vektoren $\dot{\bar{x}}$ und $d\bar{x}$ bezeichne usw. Diese Gleichung stellt sofort die fundamentalen Begriffe: virtuelle Arbeit der Geschwindigkeit, virtuelle Arbeit der Beschleunigung, kinetische Energie in den Vordergrund.

Sei nun $m\,(a, b, c)$ die Masse eines Systempunktes, und verstehen wir unter der Operation S die Summation, eventuell Integration über alle a, b, c, so folgt aus der obigen Identität, wenn wir noch die kinetische Energie des Systems:

$$T = \frac{1}{2} S m \dot{\bar{x}}^2$$

einführen, die folgende:

$$\frac{d}{dt}\{Sm\dot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x}\} = Sm\ddot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x} + \delta T + Sm\dot{\bar{x}} \cdot \left(\frac{d\delta\bar{x}}{dt} - \delta\frac{d\bar{x}}{dt}\right).$$

Da nun nach dem d'Alembertschen Prinzip für alle δq_λ und also auch für alle $\delta\vartheta_\lambda$

$$Sm\ddot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x} = S\bar{K} \cdot \delta\bar{x}$$

ist, wo $\bar{K}$ die dem Systempunkte eingeprägte Kraft bedeutet, so geht, wenn wir n Systemkräfte Q_λ durch die für alle $\delta\vartheta_\lambda$ bestehende Gleichung:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda = S\bar{K} \cdot \delta\bar{x}$$

und n Impulskomponenten J_λ durch die analoge Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{n} J_\lambda \delta\vartheta_\lambda = Sm\dot{\bar{x}} \cdot \delta\bar{x}$$

definieren, obige Identität in die für alle $\delta\vartheta_\lambda$ gültige Gleichung über:

---

*) Unter der Annahme $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = 0$ bei Lagrange t. I. Sec. Part Sect. IV, Nr. 8.

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_\lambda J_\lambda \delta\vartheta_\lambda\Big) = \sum_\lambda Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda + \delta T + Sm\bar{\dot{x}}\cdot\Big(\frac{d\delta\bar{x}}{dt} - \delta\frac{d\bar{x}}{dt}\Big).$$

Zur Umformung des letzten Gliedes ziehen wir nun die Übergangsgleichungen der zweiten Form (I′) hinzu und erhalten, weil man leicht findet, daß

$$J_\lambda = Sm\bar{\dot{x}}\cdot\bar{l}_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}$$

ist,

$$\text{(II)}\qquad \frac{d}{dt}\Big(\sum_\lambda J_\lambda\delta\vartheta_\lambda\Big) = \sum_\lambda Q_\lambda\delta\vartheta_\lambda + \delta T + \sum_\lambda J_\lambda\Big(\frac{d\delta\vartheta_\lambda}{dt} - \delta\frac{d\vartheta_\lambda}{dt}\Big) - \sum_\lambda J_\lambda \sum_{\mu,\nu}\beta_{\mu,\nu,\lambda}\delta\vartheta_\mu\frac{d\vartheta_\nu}{dt}.$$

Dies ist die allgemeine Zentralgleichung; sie unterscheidet sich von der Lagrange'schen Zentralgleichung*) durch das Hinzutreten der beiden letzten Summen, welche zusammengenommen verschwinden, wenn wir die Annahme $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = 0$ machen.

* * *

Wir leiten jetzt aus der Zentralgleichung die allgemeinen Bewegungsgleichungen ab. Führt man in (II) die Differentiation nach der Zeit aus und bedenkt, daß

$$\delta T = \sum_\lambda J_\lambda\frac{\delta d\vartheta_\lambda}{dt} + \sum_\lambda\Big(\frac{\partial T}{\partial\vartheta_\lambda}\Big)\delta\vartheta_\lambda$$

ist, wo wieder

$$\Big(\frac{\partial T}{\partial\vartheta_\lambda}\Big) = \sum_\varrho\frac{\partial T}{\partial q_\varrho}\xi_{\lambda,\varrho}$$

nach Analogie eines wirklichen Differentialquotienten gesetzt ist, so fallen alle Glieder mit $d\delta\vartheta$ und $\delta d\vartheta$ heraus und es ergeben sich, da die Zentralgleichung identisch in allen $\delta\vartheta$ galt, die Gleichungen:

$$\text{(IIIa)}\qquad \frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\mu,\nu}\beta_{\lambda,\mu,\nu}\omega_\mu J_\nu - \Big(\frac{\partial T}{\partial\vartheta_\lambda}\Big) = Q_\lambda,$$

die zusammen mit

$$\text{(IIIb)}\qquad J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial\omega_\lambda}$$

die „Lagrange-Eulerschen", d. h. die allgemeinen kinetischen Gleichungen der Mechanik bilden.**)

*) Der Sache nach bei Lagrange, t. I. Sec. Part. Sect. IV, Nr. 7.

**) „L. E. Gl." § 5, (IV). Übrigens haben diese Gleichungen bereits V. Volterra („Sopra una classe di equazioni dinamiche", Atti di Torino XXXIII, 1898) und P. Woronetz („Über die Bewegungsgleichungen für nichtholonome Systeme." [Russisch] Math. Sbornik, Moskau, t. XXII, 1901) abgeleitet.

Sie sind ohne jede Annahme über $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$ abgeleitet worden, und damit ist die Behauptung erwiesen, daß jede Annahme über $d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x}$, welche über die allgemeine differentielle Natur der δ-Operation hinausgeht, für die Mechanik an sich überflüssig ist.

Sind die ϑ wirkliche Koordinaten, so verschwinden die β, wir haben in (III) die gewöhnlichen Lagrangeschen Gleichungen.

§ 3.

Virtuelle Verschiebungen und Variationen.

(Das Hamiltonsche Prinzip und das Prinzip der variierenden Wirkung.)

Die vollkommene Freiheit, über $d\delta\vartheta - \delta d\vartheta$ bei irgend einem holonomen oder nicht-holonomen Koordinatensystem noch völlig verfügen zu können, wird man natürlich benutzen, um z. B. in einzelnen Fällen Vereinfachungen in der Ableitung der kinetischen Gleichungen zu erzielen; auch dann, wenn man vom d'Alembertschen Prinzip auf einem anderen Wege zum Ziele schreitet, ohne die Zentralgleichung zu passieren.

Auf diese methodischen Vorteile unserer allgemeinen Auffassung will ich hier nicht eingehen, da dieser Gesichtspunkt in dem bald erscheinenden Lehrbuche der Kinematik von K. Heun in konkreten Fällen durchgeführt wird. Dagegen sei es mir gestattet, darauf hinzuweisen, einen wieviel freieren Standpunkt man jetzt hat, um von der Mechanik Beziehungen zu anderen Gebieten der Mathematik anzuknüpfen, z. B. zur Variationsrechnung und zur Lieschen Gruppentheorie.

Um an Bekanntes anzuknüpfen, will ich zuerst die Beziehungen zur Variationsrechnung kurz skizzieren. Dazu ist es am Platze, die Annahme

$$d\delta\bar{x} - \delta d\bar{x} = 0$$

zu machen, da diese Gleichung, wie schon bemerkt, für die Variationsrechnung charakteristisch ist.

Dann lautet die Zentralgleichung

$$\frac{d}{dt}\sum_{\lambda} J_\lambda \delta\vartheta_\lambda = \sum_{\lambda} Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda + \delta T,$$

die wir von der allgemeinen als die Lagrangesche unterscheiden wollten.

Setzen wir darin die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte

$$\sum_{\lambda} Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda = \delta A,$$

so folgt durch Integration zwischen den Grenzlagen 0 und 1:

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\lambda} J_\lambda \delta \vartheta_\lambda \Big|_0^1 = \int_0^1 (\delta A + \delta T)\, dt.$$

Nehmen wir an den Grenzen die $\delta\vartheta = 0$, so folgt das sogenannte Hamiltonsche Prinzip, das für den Fall, daß eine Kräftefunktion V existiert, die Form annimmt:

$$\delta \int (V + T)\, dt = 0.$$

Denken wir uns aber $\int_0^1 (V + T)\, dt$, unter Benutzung der Bewegungsgleichungen in der Integralform, als Funktion der Grenzkoordinaten $q^{(0)}$ und $q^{(1)}$ ausgerechnet und gleich

$$S(q_1^{(0)} \cdots q_n^{(0)};\ q_1^{(1)} \cdots q_n^{(1)})$$

gesetzt, so ergibt sich aus Gleichung (IV) das Prinzip der variierenden Wirkung Hamiltons in der für nichtholonome Koordinaten übertragenen Form:

$$J_\lambda^{(1)} = \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta_\lambda^{(1)}}\right); \quad J_\lambda^{(0)} = -\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta_\lambda^{(0)}}\right).$$

* * *

Ist nun unser System von n Freiheitsgraden noch $\nu < n$ im allgemeinen nicht-holonomen Bedingungsgleichungen unterworfen, in denen die Zeit explicit nicht vorkomme, so kann man diese Bedingungsgleichungen auf die Form

$$\omega_{n-\nu+1} = 0 \cdots \omega_n = 0$$

bringen, indem man die ω geeignet wählt.

Die Variationen sind also jetzt durch die Gleichungen

$$\delta\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots \delta\vartheta_n = 0$$

beschränkt, denn die virtuellen Verschiebungen müssen nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten den Bedingungsgleichungen genügen; im übrigen ändert sich an den früheren Betrachtungen nichts, als daß von den n Lagrange-Eulerschen Gleichungen jetzt nur die $n - \nu$ ersten stehen bleiben, wozu noch die ν Gleichungen

$$\omega_{n-\nu+1} = 0 \cdots \omega_n = 0$$

hinzutreten.*)

Es ist nun bei dieser Darstellung gleich von vornherein klar, wie das Hamiltonsche Prinzip bei nicht-holonomen Bedingungsgleichungen zu verstehen ist. Es muß wie vorhin

$$\delta \int (V + T)\, dt = 0$$

*) „L. E. Gl." § 7.

sein, wobei aber die Variationen, dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen gemäß, durch die Bedingungen

$$\delta\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots \delta\vartheta_n = 0$$

eingeschränkt sind, aus denen die Gleichungen

$$d\delta\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots d\delta\vartheta_n = 0$$

folgen.

Das Hamiltonsche Prinzip hat also bei nicht-holonomen Bedingungsgleichungen ganz und gar nichts mehr mit der Aufgabe der Variationsrechnung zu tun:

$$\int (T + V)\, dt$$

unter den Bedingungen

$$\omega_{n-\nu+1} = 0 \cdots \omega_n = 0$$

zu einem Minimum zu machen; denn bei diesem Probleme sind die Variationen allein den Einschränkungen

$$\delta d\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots \delta d\vartheta_n = 0$$

unterworfen, Gleichungen, welche von

$$d\delta\vartheta_{n-\nu+1} = 0 \cdots d\delta\vartheta_n = 0$$

im allgemeinen vollständig verschieden sind.

Ich darf vielleicht hervorheben, daß man die Möglichkeit, die vorstehenden Tatsachen so schnell und klar zu gewinnen, in erster Linie Lagrange selbst verdankt, da er uns die Zentralgleichung wenigstens in ihrem Kerne schenkte. (l. c.)

Noch eine Bemerkung: Ist das System nicht-skleronom, kommt also die Zeit explicit in $\bar{x}$ und in den $\xi_{\varrho,\lambda}$ vor, und sind ferner die Gleichungen, welche die ϑ und die q verknüpfen, nicht homogen, so führe man statt t eine $n+1^{\text{ste}}$ Koordinate

$$q_{n+1} = \vartheta_{n+1} = t$$

ein, mache damit auch die Gleichungen zwischen den q und ϑ homogen und arbeite nun mit den $n+1$ Koordinaten genau so, wie bis jetzt mit den n Koordinaten. Zu eventuell vorhandenen Bedingungsgleichungen nehme man noch

$$\delta\vartheta_{n+1} = 0$$

hinzu. In die übrigbleibenden (n, resp. $n-\nu$) Lagrange-Eulerschen Gleichungen setze man dann wieder überall $q_{n+1} = t$.

Die Richtigkeit dieser Bemerkung folgt daraus, daß im Prinzip der virtuellen Arbeiten die Zeit nicht zu variieren ist.

§ 4.

Virtuelle Verschiebungen und infinitesimale Transformationen.

(Eulersche Gleichungen und Impulsgleichungen.)

Um Beziehungen zur Lieschen Gruppentheorie herzustellen, empfiehlt sich eine mannigfache Auffassungsweise der $\delta\vartheta$ und $\delta d\vartheta$.

Stets wollen wir jetzt die $\delta\vartheta$ als konstant ansehen, (nur nicht in der zuletzt angestellten Untersuchung.)

Dann liegt es nahe, die Gleichungen

$$\delta q_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\delta\vartheta_\varrho$$

als infinitesimale Transformationen aufzufassen. Die $\delta\vartheta_\varrho$ sind infinitesimale Konstante, die $\xi_{\varrho,\lambda}$ die Größen, die Lie ebenso bezeichnet.

Dieser Auffassung entspricht als Symbol der ϱ^{ten} infinitesimalen Transformation

$$X_\varrho f = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}.$$

Welche Rolle nun die β der Übergangsgleichungen bei dieser Auffassung spielen, erkennen wir am besten, wenn wir auch noch

$$\delta d\vartheta = 0$$

annehmen, also die ω ungeändert lassen.

Dann lauten nämlich die Übergangsgleichungen der ersten Form

$$d\delta q_\lambda - \delta dq_\lambda = -\sum_{\mu,\nu,\varrho}\xi_{\varrho,\lambda}\beta_{\mu,\nu,\varrho}\delta\vartheta_\mu d\vartheta_\nu;$$

oder, wenn wir einmal alle $\delta\vartheta$ und alle $d\vartheta$ gleich Null setzen bis auf $\delta\vartheta_\mu = 1$ und $d\vartheta_\nu = 1$, in leichtverständlicher Schreibweise

$$d_\nu\delta_\mu q_\lambda - \delta_\mu d_\nu q_\lambda = -\sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\beta_{\mu,\nu,\varrho} = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\beta_{\nu,\mu,\varrho},$$

— denn es ist $\beta_{\mu,\nu,\varrho} = -\beta_{\nu,\mu,\varrho}$ — d. h. wenn wir noch nach Jacobi

$$X_\nu X_\mu - X_\mu X_\nu = (X_\nu, X_\mu)$$

setzen,

$$(X_\nu, X_\mu) = \sum_\varrho \beta_{\nu,\mu,\varrho}X_\varrho.$$

Die $\beta_{\nu,\mu,\varrho}$ sind also gerade die Koeffizienten, mit deren Hilfe sich die Jacobischen Symbole (X_ν, X_μ) linear durch die X_ϱ ausdrücken. Erzeugen

insbesondere die n infinitesimalen Transformationen eine n-gliedrige Gruppe mit den Lieschen Konstanten $c_{\nu,\mu,\varrho}$ der Zusammensetzung, so ist

$$\beta_{\nu,\mu,\varrho} = c_{\nu,\mu,\varrho};$$

*die Koeffizienten in den Übergangsgleichungen sind dann also konstant.**)

Halten wir noch einen Augenblick an der Annahme $\delta d\vartheta = 0$ fest, so ist jetzt δT nichts anderes als die infinitesimale Transformation von T bei konstant gehaltenen ω, oder es ist

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta_\lambda}\right) = X_\lambda T$$

bei konstantem ω.

Wenn daher T alle infinitesimalen Transformationen bei Konstanten ω gestattet, so lauten, wie man aus der allgemeinen Zentralgleichung (II) sofort erkennt, die Bewegungsgleichungen einfach:

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} + \sum_{\nu,\varrho} \beta_{\lambda,\nu,\varrho}\omega_\nu J_\varrho = Q_\varrho,$$

Ich habe diese Gleichungen als Eulersche Gleichungen im weiteren Sinne bezeichnet.**) Die J_λ sind dabei lineare Funktionen der ω_ϱ mit konstanten Koeffizienten, weil T eine ebensolche quadratische Form der ω wird; sind noch die $\beta = c$ konstant, so enthalten die linken (kinematischen) Seiten der Gleichungen an Variabeln nur noch die ω. (Eulersche Gleichungen im engeren Sinne.) Jedes freie System besitzt Eulersche Gleichungen im weiteren Sinne; diese Gleichungen sind also ebenso allgemein wie die Lagrangeschen Gleichungen.

Auch die Annahme

$$d\delta q - \delta dq = 0$$

hat in der Gruppentheorie ihre Bedeutung. Durch sie erhält man nämlich aus

$$\delta q_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\delta\vartheta_\varrho$$

die erweiterte Punkttransformation

$$\delta dq_\lambda = d\delta q_\lambda = \sum_{\varrho,\sigma,\mu} \frac{\partial \xi_{\varrho,\sigma}}{\partial q_\sigma}\, \xi_{\mu,\sigma}\delta\vartheta_\varrho d\vartheta_\mu;$$

---

*) „L. E. Gl." § 3, (II). Der Beweis ist dort auf direktem Wege erbracht; auch liegt der Nachdruck mehr auf der Verwandtschaft der Übergangsgleichungen zu den Gleichungen, welche die infinitesimalen Transformationen der adjungierten Gruppe definieren.

**) „L. E. Gl." § 10, (VII).

und die Übergangsgleichungen der ersten Form ergeben jetzt die infinitesimalen Änderungen der ω, insofern diese durch die Verknüpfung mit den $\frac{dq}{dt}$ und durch deren soeben angeführte, infinitesimale Änderungen bestimmt sind. Es wird aber nach den Gleichungen (I)

$$\delta\omega_\varrho = -\sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\varrho}\omega_\nu \delta\vartheta_\mu \tag{6}$$

die Variation von ω_ϱ bei der erweiterten Punkttransformation.

Aus der Zentralgleichung in der Lagrangeschen Form:

$$\frac{d}{dt}\sum_\lambda J_\lambda \delta\vartheta_\lambda = \sum_\lambda Q_\lambda \delta\vartheta_\lambda + \delta T$$

folgt aber, da die $\delta\vartheta_\lambda$ konstant sind, und da δT jetzt im Sinne der erweiterten Punkttransformation aufzufassen ist, unmittelbar

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} - X_\lambda T = Q_\lambda, \tag{IIIa')*}$$

wo jetzt $X_\lambda T$ die λ^{te} infinitesimale, erweiterte Punkttransformation von T bedeutet.

Natürlich ist diese Gleichung mit der entsprechenden Lagrange-Eulerschen Gleichung vollkommen identisch; wir haben nur eine neue Auffassungsweise für diese gewonnen.

Gestattet insbesondere T die λ^{te} erweiterte Punkttransformation, so daß

$$X_\lambda T = 0$$

ist, wobei jetzt die ω_ϱ den Gleichungen (6) entsprechend zu variieren sind, *so lautet die λ^{te} Bewegungsgleichung einfach:*

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = Q_\lambda.$$

Ich habe diese Gleichungen als Impulsgleichungen bezeichnet.*)

* * *

Um nun ähnlich, wie beim starren Körper, der sich um einen festen Punkt dreht, Impulsgleichungen und Eulersche Gleichungen in Beziehung zueinander zu setzen, fragen wir uns:

Wann kann man die Impulsgleichungen

$$\frac{dJ_\lambda}{dt} = Q_\lambda; \quad J_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda}$$

(vorausgesetzt, daß sie die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen) durch Einführung neuer, unabhängiger ω':

$$\omega'_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n} E_{\varkappa,\lambda}\omega_\lambda \tag{7}$$

*) „L. E. Gl." § 9.

in Eulersche Gleichungen

$$\frac{dJ_\lambda'}{dt} + \sum_{\mu,\nu} \beta'_{\lambda,\mu,\nu}\omega'_\mu J'_\nu = Q'_\lambda,$$

$$J'_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \omega'_\lambda},$$

verwandeln?

(Alles, was sich auf die ω' bezieht, versehen wir hinfort mit Strichen.)

Wenn das möglich sein soll, so muß bei der Substitution (7) $\delta T = 0$, worin nach (6)

$$\delta\omega_\lambda = \sum_{\mu,\nu} \beta_{\mu,\nu,\lambda}\omega_\mu \delta\vartheta_\nu$$

zu setzen ist, in $\delta' T = 0$ übergehen, wo man aber jetzt

$$\delta\omega_\lambda' = 0 \quad \text{d. h.} \quad \delta d\vartheta_\lambda' = 0$$

zu nehmen hat.

Damit wir aber nunmehr allgemein $\delta T = \delta' T$ setzen können, müssen wir die Variationen δ und δ' in gleicher Weise, also etwa beidemale als erweiterte Punkttransformationen auffassen. Entgegengesetzt der früheren Annahme wollen wir also auch jetzt bei Betrachtung der Eulerschen Gleichungen

$$d\delta q - \delta dq = 0$$

voraussetzen, wodurch freilich $d\delta\vartheta_\lambda' = 0$ unmöglich geworden ist. Vielmehr muß man jetzt

$$\frac{d\delta\vartheta_\lambda'}{dt} = -\sum_{\mu,\nu} \beta'_{\mu,\nu,\lambda}\omega'_\mu \delta\vartheta_\nu'$$

annehmen.*) Für die ω dagegen bleibt

$$d\delta\vartheta = 0.$$

Es soll also jetzt einmal $\delta' T = 0$ sein bei konstant gehaltenen ω', wenn also $\delta\omega' = 0$ gesetzt wird; dann aber, da $\delta' T = \delta T = 0$ ist, auch bei derart variierten ω', wie dies der Beziehung

$$\omega_\varkappa' = \sum_\lambda E_{\varkappa\lambda}\omega_\lambda \tag{7}$$

entspricht. Daher muß infolge dieser Beziehung (7)

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_\lambda'} \delta\omega_\lambda' = \sum_{\lambda=1}^{n} J_\lambda' \delta\omega_\lambda' = 0$$

*) Diese Gleichungen sind als Differentialgleichungen für die $\delta\vartheta'$ aufzufassen. An einer Stelle der Bahn kann man die $\delta\vartheta'$ noch willkürlich wählen, dann sind sie aber für die ganze Bahn bestimmt. Daß die $\delta\vartheta'$ hier nicht konstant sind, widerspricht nicht der Auffassung der δ-Operation als einer infinitesimalen Transformation; die $\delta\vartheta'$ konstant zu nehmen, ist nur für manche Zwecke angenehm.

werden, oder da dies natürlich für alle J' gelten soll, so muß auch infolge (7) von selbst

$$\delta\omega' = 0$$

werden.

Mithin haben wir jetzt folgende Frage zu beantworten:

Wann kann man durch eine Substitution

$$\omega'_\varkappa = \sum_\lambda E_{\varkappa,\lambda}\omega_\lambda \tag{7}$$

die Annahme $d\delta\vartheta = 0$ in die Annahme $\delta d\vartheta' = 0$ überführen?

(Dabei soll natürlich die Determinante $|E_{\varkappa,\lambda}|$ von Null verschieden sein.)

Und die Antwort lautet:

Es müssen die infinitesimalen Transformationen

$$X_\varrho f = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}$$

eine n-gliedrige Gruppe erzeugen.

Zum Beweise dieser Behauptung ist es nützlich,

$$\delta q_\lambda = \sum_\varrho \xi_{\varrho,\lambda}\delta\vartheta_\varrho$$

und

$$dq_\lambda = \sum_\varrho \xi'_{\varrho,\lambda}d\vartheta'_\varrho$$

als zwei unabhängige Klassen von je n infinitesimalen Transformationen aufzufassen; die infinitesimalen Parameter $\delta\vartheta$ und $d\vartheta'$ sind nach den Annahmen

$$d\delta\vartheta = 0 \quad \text{und} \quad \delta d\vartheta' = 0$$

voneinander unabhängig.

Die Voraussetzung

$$d\delta q - \delta dq = 0$$

bedeutet dann nichts anderes, als daß diese beiden Klassen von Transformationen miteinander vertauschbar sind, daß also

$$(X_\varrho, X'_\sigma) = 0$$

ist für alle ϱ, σ. Denn ich kann mir ja die Operation d mit Hilfe der $d\vartheta'$, die Operation δ aber mit Hilfe der $\delta\vartheta$ ausgeführt denken.

Haben wir umgekehrt zwei Klassen von infinitesimalen Transformationen, für welche die Determinanten $|\xi_{\varrho,\lambda}|$ und $|\xi'_{\varrho,\lambda}|$ nicht null sind, so lassen sich immer eindeutig Größen $E_{k,\lambda}$ finden, sodaß identisch in allen q_ϱ die Relation (7) besteht. Verschwinden dann alle (X_ϱ, X'_σ) und nehmen wir $d\delta q - \delta dq = 0$ an, so geht bei dieser Substitution (7) $d\delta\vartheta = 0$ in

$\delta d\vartheta' = 0$ über. Der Beweis für diese Umkehrung ist so elementar, daß ich nicht darauf einzugehen brauche.

Wir haben also nur noch folgenden Satz zu beweisen, der einen rein gruppentheoretischen Charakter trägt:

Haben wir zwei Klassen von je n infinitesimalen Transformationen in je n Variabeln:

$$X_\varrho = \sum_\lambda \xi_{\varrho,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \quad \text{und} \quad X'_\sigma = \sum_\lambda \xi'_{\sigma,\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda},$$

und verschwindet keine der Determinanten $|\xi_{\varrho\lambda}|$ *und* $|\xi'_{\varrho\lambda}|$ *identisch, so können die Transformationen der einen Klasse nur dann mit allen Transformationen der andern Klasse vertauschbar sein, wenn die Transformationen jeder Klasse eine n-gliedrige Gruppe erzeugen. Natürlich sind die Gruppen dann einfach transitiv und zueinander reziprok.**)

Beweis: Angenommen, wenigstens eine der beiden Klassen bilde keine Gruppe, es sei also etwa (X_ϱ, X_σ) nicht linear durch die X_λ ausdrückbar mit konstanten Koeffizienten. Dann folgt aus der Jacobischen Relation

$$((X_\varrho X_\sigma) X'_\tau) + ((X_\sigma X'_\tau) X_\varrho) + ((X'_\tau X_\varrho) X_\sigma) = 0,$$

daß auch

$$((X_\varrho X_\sigma) X'_\tau) = 0,$$

d. h. daß die neue infinitesimale Transformation (X_ϱ, X_σ) ebenfalls mit allen X'_τ vertauschbar ist.

Wenn also die X_ϱ keine n-gliedrige Gruppe erzeugten, so gäbe es mehr als n unabhängige mit allen X'_τ vertauschbare Transformationen.

Ich will jetzt zeigen, daß es höchstens n solcher Transformationen geben kann, womit dann der Beweis des Satzes erbracht ist.

Betrachten wir in dem n-dimensionalen Raume der q einen Punkt P_1 innerhalb des Bereiches, in dem die Determinante $|\xi'_{\varkappa,\lambda}|$ nicht null ist, so kann man jedenfalls n Konstante $e'_1 \cdots e'_n$ so bestimmen, daß aus P_1 durch eine Transformation T' der durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dq_\lambda}{dt} = \sum_\varrho \xi'_{\varrho,\lambda} e'_\varrho$$

definierten eingliedrigen Gruppe ein beliebiger Punkt P_2 in hinreichender Nähe von P_1 hervorgeht. Dies ist deshalb möglich, weil die Determinante der $\xi'_{\varrho,\lambda}$ von Null verschieden ist.

Wenn ich nun irgend eine Transformation T nehme, die mit T' vertauschbar ist und durch welche P_1 in Q_1, P_2 in Q_2 übergehe, so heißt $TT' = T'T$ nichts anderes, als daß Q_2 aus Q_1 durch dieselbe Transformation T' hervorgeht, wie P_2 aus P_1.

*) „L. E. Gl." § 11, Schlußsatz.

Betrachten wir also alle T, welche P_1 in Q_1 überführen, so führen diese auch jeden andern Punkt P_2 in einen ganz bestimmten, von der besonderen Wahl der T unabhängigen Punkt Q_2 über, nämlich in dasjenige Q_2, das aus Q_1 durch das eine T' hervorgeht, das P_1 in P_2 verwandelte. Daher sind alle diese Transformationen T identisch, es gibt nur eine einzige Transformation T, die P_1 in Q_1 überführt. Und da Q_1 durch n Koordinaten bestimmt ist, so gibt es auch nur n Transformationen T, welche mit allen n Transformationen T' vertauschbar sind.

Damit ist also erwiesen, daß die X_ϱ eine n-gliedrige Gruppe erzeugen und natürlich auch die X'_τ.

Da nun auch umgekehrt zu jeder Gruppe eine reziproke, mit ihr vertauschbare Gruppe existiert, so haben wir das Theorem bewiesen:

Es können dann und nur dann gleichzeitig Eulersche Gleichungen und Impulsgleichungen bestehen, wenn die Koeffizienten β der Übergangsgleichungen konstant sind, d. h. wenn die den n virtuellen Verschiebungen entsprechenden infinitesimalen Transformationen eine n-gliedrige Gruppe erzeugen.

Ein einfaches Beispiel bietet der starre, um einen festen Punkt drehbare Körper, die in Rede stehende Gruppe ist die dreigliedrige Gruppe der Drehungen.

Ich habe damit die Beziehungen der Mechanik zur Lieschen Gruppentheorie so weit entwickelt, als es mir für die Zwecke der vorliegenden Arbeit notwendig erschien. Wegen der weiteren Ausführungen darf ich vielleicht auf meine Habilitationsschrift verweisen.

Karlsruhe, im Februar 1904.

Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. Br.

(D) $$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

sei eine lineare homogene Differentialgleichung. Von den Koeffizienten $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ setzen wir voraus, sie besitzen in der Ebene einen gemeinsamen Stetigkeitsbereich S, in dem jede dieser Funktionen eindeutig und regulär analytisch ist. Durch die Koeffizienten $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ wird ein gewisser Rationalitätsbereich P_1 bestimmt. *Dieser Rationalitätsbereich* P_1 *soll das kleinste Funktionensystem sein, das durch die Gesamtheit aller reellen und imaginären Konstanten sowie sämtlicher Koeffizienten* $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_m(x)$ *der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung* (D) *entsteht und in sich derartig abgeschlossen ist, daß man je zwei Funktionen des Systemes untereinander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (ausgenommen die Division durch Null) sowie eine jede differentiieren kann, ohne hierdurch das Funktionensystem* P_1 *zu verlassen.*

Wegen der Voraussetzung, daß die Funktionen $p_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, in S regulär sind, folgt, daß P_1 nur Funktionen mit polaren Unstetigkeiten in S enthält; die singulären Punkte der Funktionen von P_1 sind also in S isoliert. $y_1, y_2, \cdots, y_m$ bedeute ein beliebiges, aber bestimmt gewähltes Fundamentalsystem von Integralen von (D), das etwa durch seine Anfangswerte und die seiner Abgeleiteten bis zur $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung für eine Stelle $x = x_0$ im Innern des Bereiches S festgelegt ist. $y_1, y_2, \cdots, y_m$ sind überall in S reguläre analytische, jedoch nicht notwendig eindeutige Funktionen.

Wir beweisen folgenden Fundamentalsatz:

Bilden $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *ein Fundamentalsystem von Integralen von* (D), *so kann man eine überall im Stetigkeitsbereiche S reguläre analytische*

Funktion V von folgender Eigenschaft bestimmen: V ist eine ganze rationale Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ der besonderen Form

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m,$$

so daß $u_1, u_2, \cdots, u_m$ dem oben definierten Rationalitätsbereiche P_1 angehörige, überall in S reguläre Funktionen sind und sich jedes der Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als ganze rationale Funktion von V und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus P_1 ausdrücken läßt.

Dieser Satz, daß die Adjunktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ oder, da P_1 alle Konstanten enthalten soll, die Adjunktion aller Integrale von (D) zu P_1 durch die Adjunktion von V allein ersetzt werden kann, ist das Fundament der Picard-Vessiotschen Theorie. Mit diesem Satze haben sich auch die Herren Beke*) und Picard**) bereits beschäftigt, nur ist bei den genannten Untersuchungen nicht der Rationalitätsbereich P_1, sondern ein anderer, im allgemeinen weiterer Rationalitätsbereich P_1 verwandt worden. Falls der von uns definierte Rationalitätsbereich P_1 die unabhängige Variable x enthält, ist P_1 mit P_1 identisch. Enthält aber P_1 nicht die unabhängige Variable x, so geht $\bar{\mathsf{P}}_1$ aus P_1 durch Adjunktion von x hervor. Beispielsweise besteht für eine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten P_1 nur aus der Gesamtheit aller reellen und imaginären Konstanten, $\bar{\mathsf{P}}_1$ hingegen ist der Bereich aller rationalen Funktionen von x. Besteht P_1 zum Beispiel aus allen rationalen Funktionen von e^x, so enthält P_1, abgesehen von allen Konstanten, keine rationalen Funktionen von x, wohingegen $\bar{\mathsf{P}}_1$ außer allen Funktionen von P_1 noch alle rationalen Funktionen von x umfaßt.

Dem Umstand, daß das oben besprochene Theorem nur für $\bar{\mathsf{P}}_1$ bewiesen ist, ist es wohl allein zuzuschreiben, daß Herr Picard in der fundamentalen Darstellung, die er im dritten Bande seines Traité d'analyse, p. 531 ff. der nach seinem und Herrn Vessiots Namen genannten Theorie gibt, von dem der Untersuchung zugrunde liegenden Rationalitätsbereiche voraussetzt, er soll die unabhängige Variable x, also alle rationalen Funktionen, enthalten. „On considère comme faisant partie du domaine de rationalité, l'ensemble des fonctions rationelles de x, des $a(x)$ et de leurs dérivées" (p. 541). Auch Herr Vessiot hat bei Besprechung der Theorie der von Herrn F. Klein sogenannten Rationalitätsgruppe im zweiten Bande der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften S. 289 (Nr. 37) die Voraussetzung, daß der Rationalitätsbereich die un-

*) E. Beke, Über die allgemeinste Differentialresolvente der homogenen linearen Differentialgleichungen. Math. Annalen, Bd. 46, S. 557 (1895).

**) E. Picard, traité d'analyse, t. 3, p. 531 (Paris 1896).

abhängige Variable x enthält.*) Infolgedessen dürfte ein Eingehen auf den oben mitgeteilten Satz gerechtfertigt sein. Für den Beweis sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob die lineare homogene Differentialgleichung nur konstante Koeffizienten besitzt oder die Koeffizienten nicht ausnahmslos konstant sind. Im § 1 beweisen wir den Satz für lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, im § 2 für solche mit nicht konstanten Koeffizienten. Hierbei sind wir mit freundlicher Genehmigung von Herrn Stickelberger in der angenehmen Lage, für die lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten außer unserem auf Determinantenberechnung beruhenden Beweis einen eleganten und einfachen Beweis, den uns Herr Stickelberger gütigst mitteilte und wofür wir ihm auch hier noch verbindlichst danken, den Fachgenossen vorzulegen. Im § 3 weise ich kurz darauf hin, daß V so gewählt werden kann, daß es einer linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus P_1 genügt. Der bewiesene Satz läßt sich daher auf folgende Weise aussprechen: *Anstatt sämtliche Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung* (D) *dem Rationalitätsbereiche* P_1 *zu adjungieren, genügt die Adjunktion eines einzigen Integrals einer gewissen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* P_1.

§ 1.

Die lineare homogene Differentialgleichung (D) habe konstante Koeffizienten und laute:

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + c_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + c_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + c_m y = 0.$$

Der zu wählende Rationalitätsbereich P_1 ist für den zu betrachtenden Fall der Bereich aller reellen und imaginären Zahlen.

Hat die algebraische Gleichung:

$$\varrho^m + c_1 \varrho^{m-1} + c_2 \varrho^{m-2} + \cdots + c_m = 0$$

die untereinander verschiedenen Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_j$ in den Multiplizitäten $m_1 + 1, m_2 + 1, \cdots, m_j + 1$ $(m_1 + m_2 + \cdots + m_j + j = m)$, so kann man für die lineare homogene Differentialgleichung (D) mit konstanten Koeffizienten ein Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots, y_m$ von Integralen wählen, daß $y_1, y_2, \cdots, y_m$ die Funktionen:

*) Bei dieser Gelegenheit bemerke ich, daß meine Arbeit „Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen" (Math. Ann. Bd. 56) stillschweigend die Annahme enthält, daß *alle* Konstanten dem Rationalitätsbereiche angehören. Ein Teil der Sätze erfordert jedoch nicht, wie ich bei anderer Gelegenheit zeigen werde, die Zugehörigkeit *aller* Konstanten zum Rationalitätsbereiche.

$$e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1},\ e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx},\ e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2},\ \cdots,\ e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^{m_1}x^{m_1}}{dx^{m_1}},$$

$$e^{\varrho_2 x}\cdot x^{m_2},\ e^{\varrho_2 x}\cdot\frac{dx^{m_2}}{dx},\ e^{\varrho_2 x}\cdot\frac{d^2x^{m_2}}{dx^2},\ \cdots,\ e^{\varrho_2 x}\cdot\frac{d^{m_2}x^{m_2}}{dx^{m_2}},$$

$$\vdots$$

$$e^{\varrho_j x}\cdot x^{m_j},\ e^{\varrho_j x}\cdot\frac{dx^{m_j}}{dx},\ e^{\varrho_j x}\cdot\frac{d^2x^{m_j}}{dx^2},\ \cdots,\ e^{\varrho_j x}\cdot\frac{d^{m_j}x^{m_j}}{dx^{m_j}},$$

sind.

Als Funktion $V = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_my_m$ wählen wir:

$$V = e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + e^{\varrho_2 x}\cdot x^{m_2} + e^{\varrho_3 x}\cdot x^{m_3} + \cdots + e^{\varrho_j x}\cdot x^{m_j};$$

dann sind $u_1, u_2, \cdots, u_m$ konstant angenommen und gehören mithin dem Rationalitätsbereiche P_1 an.

Wir bilden:

$$\frac{dV}{dx} = \varrho_1\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \cdots,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \varrho_1^2\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + \varrho_1\cdot\binom{2}{1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \binom{2}{2}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2} + \cdots,$$

$$\frac{d^3V}{dx^3} = \varrho_1^3 e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + \varrho_1^2\cdot\binom{3}{1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \varrho_1\binom{3}{2}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2} + \binom{3}{3}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^3x^{m_1}}{dx^3} + \cdots,$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{m_1}V}{dx^{m_1}} = \varrho_1^{m_1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + \varrho_1^{m_1-1}\binom{m_1}{1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \varrho_1^{m_1-2}\cdot\binom{m_1}{2}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2} + \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad + \binom{m_1}{m_1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^{m_1}x^{m_1}}{dx^{m_1}} + \cdots$$

$$\frac{d^{m_1+1}V}{dx^{m_1+1}} = \varrho_1^{m_1+1}e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + \varrho_1^{m_1}\cdot\binom{m_1+1}{1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \varrho_1^{m_1-1}\cdot\binom{m_1+1}{2}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2} + \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad + \binom{m_1+1}{m_1}\cdot\varrho_1 e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^{m_1}x^{m_1}}{dx^{m_1}} + \cdots$$

$$\frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}} = \varrho_1^{m-1}e^{\varrho_1 x}\cdot x^{m_1} + \varrho_1^{m-2}\cdot\binom{m-1}{1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{dx^{m_1}}{dx} + \varrho_1^{m-3}\cdot\binom{m-1}{2}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^2x^{m_1}}{dx^2} + \cdots$$

$$+ \binom{m-1}{m_1}\cdot\varrho_1^{m-m_1-1}\cdot e^{\varrho_1 x}\cdot\frac{d^{m_1}x^{m_1}}{dx^{m_1}} +$$

Bei $\frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}}$ haben wir nur die sich auf ϱ_1 beziehenden Glieder hingeschrieben.

Wie die voraufgehenden Formeln lehren, drücken sich

$$V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}} \quad \text{durch} \quad y_1, y_2, \cdots, y_m$$

linear und homogen mit konstanten Koeffizienten aus. Wir betrachten die aus den Koeffizienten von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ auf der rechten Seite der obigen linearen Gleichungen gebildete Determinante Δ; von dieser Determinante Δ schreiben wir nur die auf ϱ_1 sich beziehenden Kolonnen hin:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\varrho_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\varrho_1^2 & \varrho_1\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
\varrho_1^3 & \varrho_1^2\binom{3}{1} & \varrho_1\binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\varrho_1^{m_1} & \varrho_1^{m_1-1}\binom{m_1}{1} & \varrho_1^{m_1-2}\binom{m_1}{2} & \varrho_1^{m_1-3}\binom{m_1}{3} & \cdots & \binom{m_1}{m_1} \\
\varrho_1^{m_1+1} & \varrho_1^{m_1}\binom{m_1+1}{1} & \varrho_1^{m_1-1}\binom{m_1+1}{2} & \varrho_1^{m_1-2}\binom{m_1+1}{3} & \cdots & \varrho_1\binom{m_1+1}{m_1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\varrho_1^{m-1} & \varrho_1^{m-2}\binom{m-1}{1} & \varrho_1^{m-3}\binom{m-1}{2} & \varrho_1^{m-4}\binom{m-1}{3} & \cdots & \varrho_1^{m-m_1-1}\binom{m-1}{m_1}.
\end{array}$$

Um das Nichtverschwinden der Determinante Δ nachzuweisen, bedenken wir, daß die Funktionen:

$$\begin{array}{l}
e^{\varrho_1 x}, \frac{x e^{\varrho_1 x}}{1}, \frac{x^2 e^{\varrho_1 x}}{2!}, \frac{x^3 e^{\varrho_1 x}}{3!}, \cdots, \frac{x^{m_1} e^{\varrho_1 x}}{m_1!}, \\
e^{\varrho_2 x}, \frac{x e^{\varrho_2 x}}{1}, \frac{x^2 e^{\varrho_2 x}}{2!}, \frac{x^3 e^{\varrho_2 x}}{3!}, \cdots, \frac{x^{m_2} e^{\varrho_2 x}}{m_2!}, \\
\vdots \\
e^{\varrho_j x}, \frac{x e^{\varrho_j x}}{1}, \frac{x^2 e^{\varrho_j x}}{2!}, \frac{x^3 e^{\varrho_j x}}{3!}, \cdots, \frac{x^{m_j} e^{\varrho_j x}}{m_j!}
\end{array}$$

auch ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (D) sind. Wir bezeichnen die eben angegebenen Funktionen in der hingeschriebenen Reihenfolge mit $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_m$ und bilden die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix}
z_1 & z_2 & \cdots & z_m \\
z_1' & z_2' & \cdots & z_m' \\
z_1'' & z_2'' & \cdots & z_m'' \\
z_1^{(m-1)} & z_2^{(m-1)} & \cdots & z_m^{(m-1)}
\end{vmatrix}$$

für den Wert $x = 0$ der Variablen x. Da $x = 0$ eine reguläre Stelle der Differentialgleichung (D) ist, kann die Wronskische Determinante für $x = 0$ nicht verschwinden. Diese Wronskische Determinante stimmt aber mit Δ völlig überein, denn alle niedrigeren als r^{ten} Abgeleiteten von

$\frac{x^r \cdot e^{\varrho_1 x}}{r!}$ haben für $x=0$ den Wert Null, hingegen ist für $x=0$ die $r+r_1^{\text{te}}$ Abgeleitete von $\frac{x^r e^{\varrho_1 x}}{r!}$ gleich $\varrho_1^{r_1} \cdot \binom{r+r_1}{r}$; hierbei bedeutet r_1 jede der ganzen positiven Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots$.*)

Da die Determinante Δ mithin von Null verschieden ist, lassen sich die obigen linearen Gleichungen nach $y_1, y_2, \cdots, y_m$ auflösen. Man findet:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \alpha_{m-1} \frac{d^{m-1} V}{dx^{m-1}}, \\ y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \beta_{m-1} \frac{d^{m-1} V}{dx^{m-1}}, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \lambda_{m-1} \frac{d^{m-1} V}{dx^{m-1}}. \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ sind hierbei Konstante, gehören also P_1 an.

Da wir die Zugehörigkeit aller Konstanten zu P_1 angenommen haben und sich die Integrale jedes Fundamentalsystemes einer linearen homogenen Differentialgleichung durch diejenigen eines einzigen als lineare homogene Funktionen mit konstanten Koeffizienten ausdrücken lassen, folgt, daß die Integrale jedes Fundamentalsystemes ganze rationale Funktionen von V und dessen Abgeleiteten mit Koeffizienten aus P_1 werden. Hiermit ist unser Satz für die lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten bewiesen.

Ich lasse jetzt den Stickelbergerschen Beweis für den vorstehenden Satz folgen, durch ihn ergibt sich das oben bewiesene Theorem ohne neue Rechnung als Korollar zu den bekanntesten Sätzen über lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Der Stickelbergersche Beweis beruht auf folgendem bekannten Hilfssatze: Sind $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l$ irgend welche reelle oder komplexe Größen, $n_1, n_2, \cdots, n_l$ irgend welche ganze positive Zahlen, so kann eine Gleichung:

$$A_1(x) e^{\sigma_1 x} + A_2(x) e^{\sigma_2 x} \cdots + A_l(x) e^{\sigma_l x} = 0,$$

wobei die $A_i(x)$ Polynome vom Grade $n_i (i = 1, 2, \cdots, l)$ oder von niedrigerem Grade bedeuten, *nur* dann bestehen, wenn alle Polynome $A_i(x)$ einzeln verschwinden.

---

*) Wie mich Herr Beke beim dritten internationalen Mathematiker-Kongresse im Gespräch freundlich aufmerksam machte, beschäftigt er sich mit der Wertbestimmung der Determinante Δ in seiner Arbeit „Über die Fundamentalgleichungen der homogenen linearen Differentialgleichungen" (15. Band der Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. 1898). (Nachschrift vom August 1904.)

Wir bilden für die vorgelegte Differentialgleichung (D) mit konstanten Koeffizienten als Funktion V die Funktion:

$$V = B_1(x)e^{\varrho_1 x} + B_2(x)e^{\varrho_2 x} + \cdots + B_j(x)e^{\varrho_j x};$$

hierbei sind $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_j(x)$ Polynome von x. Sollte auch *nur eines* dieser Polynome B, etwa $B_i(x)$, von niedrigerem Grade als vom m_i^{ten} sein oder, wenn $m_i = 0$ ist, verschwinden, so genügt die Funktion V einer linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit konstanten Koeffizienten als der Differentialgleichung (D) der Ordnung $m = m_1 + m_2 + \cdots m_j + j$. *Zur Bestimmung von V schließen wir bei der Wahl der Polynome $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_j(x)$ alle derartigen Polynome aus, die den Wert Null haben oder nicht wirklich die Grade $m_1, m_2, \cdots, m_j$ erreichen; im übrigen können zur Bildung von V die Polynome $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_j(x)$ willkürlich gewählt werden.*

Wir behaupten:

Sind $B_1(x), B_2(x), \cdots, B_j(x)$ irgend welche beliebig gewählte Polynome von x, von denen jedoch keines verschwindet und jedes wirklich den Grad $m_1, m_2, \cdots, m_j$ erreicht, so wird jede lineare homogene Differentialgleichung $E = 0$ mit konstanten Koeffizienten, welche nur die einzige besondere Funktion

$$V = B_1(x)e^{\varrho_1 x} + B_2(x)e^{\varrho_2 x} + \cdots + B_j(x)e^{\varrho_j x}$$

zum Integral hat, durch alle Integrale der Differentialgleichung (D) befriedigt. Die Differentialgleichung $D = 0$ ist daher unter allen linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten diejenige niedrigster Ordnung, welche — wie auch die Polynome $B_i(x)$ gewählt sind, wenn sie nur der obigen Bedingung über das Nichtverschwinden und die Grade genügen — die durch Angabe der $B_i(x)$ bestimmte Funktion V zum Integral hat.

Die charakteristische Gleichung der linearen homogenen Differentialgleichung $E = 0$ mit konstanten Koeffizienten habe die Wurzeln ϱ_1', $\varrho_2', \cdots, \varrho_k'$ in den Multiplizitäten $m_1' + 1, m_2' + 1, \cdots, m_k' + 1$. Soll V auch $E = 0$ befriedigen, so müssen besondere Polynome $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_k(x)$ der Grade $\leqq m_1'$, bez. $\leqq m_2', \cdots,$ bez. $\leqq m_k'$ existieren, daß sich die Funktion

$$V = B_1(x)e^{\varrho_1 x} + B_2(x)e^{\varrho_2 x} + \cdots + B_j(x)e^{\varrho_j x}$$

auch in der Form:

$$C_1(x)e^{\varrho_1' x} + C_2(x)e^{\varrho_2' x} + \cdots + C_k(x)e^{\varrho_k' x}$$

schreiben läßt. Aus den zwei Darstellungen von V folgt eine Gleichung:

$$B_1(x)e^{\varrho_1 x} + B_2(x)e^{\varrho_2 x} + \cdots + B_j(x)e^{\varrho_j x} -$$
$$- C_1(x)e^{\varrho_1' x} - C_2(x)e^{\varrho_2' x} - \cdots - C_k(x)e^{\varrho_k' x} = 0.$$

Sollte unter den Größen $\varrho_1', \varrho_2', \cdots, \varrho_k'$ eine der Größen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_j$, etwa ϱ_i, nicht auftreten, so müßte nach dem Hilfssatze der Faktor der dieser Größe ϱ_i entsprechenden Exponentialfunktion $e^{\varrho_i x}$, nämlich das Polynom $B_i(x)$, verschwinden; dies aber widerspricht der Voraussetzung, daß $B_i(x)$ genau vom Grade m_i und, wenn $m_i = 0$ ist, eine nicht verschwindende Konstante ist. Hieraus folgt, daß die Größen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_j$ unter den Größen $\varrho_1', \varrho_2', \cdots, \varrho_k'$ enthalten sind. Bezeichnen wir die ersten j der Größen $\varrho_1', \varrho_2', \cdots, \varrho_k'$ mit $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_j$, so ist infolge des Hilfssatzes:

$$B_1(x) = C_1(x),\ B_2(x) = C_2(x),\ \cdots,\ B_j(x) = C_j(x),$$
$$C_{j+1}(x) = 0,\ C_{j+2}(x) = 0,\ \cdots,\ C_k(x) = 0.$$

Die Polynome $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_j(x)$ haben also genau die Grade $m_1, m_2, \cdots, m_j$. Die Grade von $C_1(x), C_2(x), \cdots, C_j(x)$ waren aber

$$\leqq m_1',\ \text{bez.} \leqq m_2',\ \text{bez.} \leqq m_j'.$$

Mithin folgt

$$m_1 \leqq m_1',\ m_2 \leqq m_2',\ \cdots,\ m_j \leqq m_j'.$$

Da $\varrho_1 = \varrho_1', \varrho_2 = \varrho_2', \cdots, \varrho_j = \varrho_j'$, so hat die charakteristische Gleichung von (E) sämtliche Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (D) wenigstens in denselben Multiplizitäten zu Wurzeln, wie sie die charakteristische Gleichung von (D) hat. (E) wird daher durch sämtliche Integrale von (D) befriedigt.

Wählen wir für $B_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, j)$ irgendwie besondere Polynome, die jedoch jedenfalls ungleich Null sind, sowie die Grade m_i $(i = 1, 2, \cdots, j)$ wirklich erreichen, und verstehen wir unter $y_1, y_2, \cdots, y_m$ das oben S. 438 angegebene Fundamentalsystem von Integralen unserer Differentialgleichung (D), so wird V sich auch in der Form:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$$

schreiben lassen, wobei die u_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ besondere Konstante bedeuten, die sich je nach der Festlegung der $B_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, j)$ ergeben.

Aus $V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots u_m y_m$ folgt

$$\frac{dV}{dx} = u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + \cdots + u_{1m} y_m,$$
$$\frac{d^2V}{dx^2} = u_{21} y_1 + u_{22} y_2 + \cdots + u_{2m} y_m,$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}} = u_{m-1,1} y_1 + u_{m-1,2} y_2 + \cdots + u_{m-1,m} y_m.$$

Hierbei ist berücksichtigt, daß sich wegen der besonderen Form der Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ ihre Abgeleiteten als lineare homogene Funktionen von ihnen selbst mit konstanten Koeffizienten darstellen; infolge-

dessen sind die Größen u_{ik} $(i = 1, 2, \cdots, m-1;\ k = 1, 2, \cdots m)$ konstant und gehören also dem Rationalitätsbereiche P_1 an. Die Determinante, die aus den Koeffizienten von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ auf der rechten Seite der obigen Gleichungen für $V, \frac{dV}{dx}, \cdots, \frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}}$ sich bilden läßt, ist, wie wir sofort nachweisen, von Null verschieden; daher lassen sich die obigen Gleichungen nach $y_1, y_2, \cdots, y_m$ auflösen und ergeben für diese Größen Gleichungen von demselben Typus wie auf S. 440. Daß die fragliche Determinante wirklich nicht verschwindet und die Gleichungen daher auflösbar sind, sieht man unmittelbar nach dem zuletzt bewiesenen Satz ein, der aussagt, daß, wenn V so bestimmt wird, wie wir es taten, es keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit konstanten Koeffizienten als (D) genügt. Würde nämlich die fragliche Determinante verschwinden, so wären die rechten Seiten von $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}}$ in linearer Dependenz. In diesem Falle würden Konstante $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}$, die nicht sämtlich Null sind, existieren, daß

$$l_0 V + l_1 \frac{dV}{dx} + l_2 \frac{d^2V}{dx^2} + \cdots + l_{m-1} \frac{d^{m-1}V}{dx^{m-1}} = 0$$

würde. Dies aber widerspricht dem bewiesenen Satz, daß die Funktion V bei unserer für sie getroffenen Wahl keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit konstanten Koeffizienten als der Differentialgleichung (D) von der Ordnung m genügt.

Zum Schlusse dieses Beweises möchte ich nicht hervorzuheben unterlassen, daß, während mein Beweis in bestimmter Weise eine besondere Funktion V festlegte, Herrn Stickelbergers Untersuchungen zeigen, daß jedes Integral von (D), das keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit konstanten Koeffizienten als (D) genügt, als Funktion V brauchbar ist; diese Integrale von (D) sind von der Form:

$$B_1(x)e^{\varrho_1 x} + B_2(x)e^{\varrho_2 x} + \cdots + B_j(x)e^{\varrho_j x},$$

wo jedes $B_i(x)$ für $m_i = 0$ eine von Null verschiedene Konstante, für $m_i > 0$ ein Polynom, das wirklich den Grad m_i hat, bedeutet, sonst sind die $B_i(x)$ willkürlich wählbar.

§ 2.

Wir nehmen jetzt an, die Koeffizienten der linearen homogenen Differentialgleichung (D):

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m(x)y = 0$$

seien nicht mehr ausnahmslos konstant. Die Koeffizienten der Differentialgleichung und der Rationalitätsbereich P_1 seien von der in der Einleitung angegebenen Beschaffenheit. Da (D) keine lineare homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, gibt es unter den Koeffizienten wenigstens einen, der wirklich von x abhängt; er möge $p_i(x)$ lauten. Infolge der über die Koeffizienten von (D) gemachten Voraussetzung existiert ein Stetigkeitsbereich S, in dessen Inneren jeder der Koeffizienten von (D), also auch $p_i(x)$, an jeder Stelle nach ganzen positiven Potenzen entwickelbar ist. a sei eine Stelle des Stetigkeitsbereiches, die Entwicklung für $p_i(x)$ möge an der Stelle $x = a$ lauten:

$$p_i(x) = h_0 + h_1(x-a) + h_2(x-a)^2 + \cdots$$

Sollte $h_1 = 0$ und

$$p_i(x) = h_0 + h_k(x-a)^k + h_{k+1}(x-a)^{k+1} + \cdots, \quad (h_k \neq 0,\ k > 1)$$

sein, so differentiiere man $p_i(x)$ $k-1$ mal. Hierdurch erhält man jedenfalls eine Funktion:

$$F(x) = h_0' + h_1'(x-a) + \cdots,$$

wobei $h_1' \neq 0$ ist. $F(x)$ gehört, da $p_i(x)$ dem Rationalitätsbereiche P_1 angehört, auch P_1 an. Ferner ist $F(x)$, da es entweder mit $p_i(x)$ übereinstimmt oder durch Differentiation aus $p_i(x)$ hervorgeht, eine überall im Stetigkeitsbereiche S reguläre eindeutige analytische Funktion. Man bilde $F_1(x) = \frac{F(x) - h_0'}{h_1'}$. Da sämtliche Konstante P_1 angehören, so gehört auch $F_1(x)$ dem Rationalitätsbereiche P_1 an. An der Stelle $x = a$ erhält man die Entwicklung:

$$F_1(x) = (x-a) + h_1''(x-a)^2 + \cdots.$$

Aus $F_1(x)$ leite man sich die m^{te} Potenz, also F_1^m, ab; die Entwicklung dieser Funktion an der Stelle $x = a$ beginnt mit $(x-a)^m$. Aus der Entwicklung von F_1^m beseitige man die $m+1^{\text{te}}$, $m+2^{\text{te}}$ bis m^2-1^{te} Potenz von $x-a$, indem man die $m+1^{\text{te}}$, $m+2^{\text{te}}$ bis m^2-1^{te} Potenz von $F_1(x)$, mit konstanten Koeffizienten multipliziert, von F_1^m subtrahiert. Da der Rationalitätsbereich P_1 alle Konstanten und infolge der Zugehörigkeit von F_1 zu P_1 auch alle Potenzen von F_1 enthält, so erhält man auf diese Weise eine dem Rationalitätsbereiche P_1 zugehörige Funktion, die ihrer Bildung nach überall in S regulär ist. Diese Funktion sei mit u_2 bezeichnet. Die Entwicklung von u_2 an der Stelle $x = a$ lautet:

$$u_2 = (x-a)^m + s_m^{(2)}(x-a)^{m^2} + \cdots.$$

In analoger Weise kann man aus der $2m^{\text{ten}}$ Potenz von F_1 eine dem Rationalitätsbereiche P_1 zugehörige Funktion:

$$u_3 = (x-a)^{2m} + s_{m^2}^{(3)}(x-a)^{m^2} + \cdots$$

herleiten. Auf diese Weise kann man fortfahren, sich dem Rationalitätsbereiche P_1 angehörige Funktionen $u_4, u_5, \cdots, u_m$ zu bilden, so daß deren bezügliche Entwicklungen an der Stelle $x = a$ lauten:

$$u_i = (x-a)^{(i-1)m} + s_{m^2}^{(i)}(x-a)^{m^2} + \cdots \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Die Größen $s_{m^2}^{(i)}$ bedeuten hierbei Konstante; u_1 kann man gleich 1 wählen; die Zahl 1 gehört ja gewiß P_1 an. $u_1, u_2, \cdots, u_m$ sind überall in S eindeutige, reguläre analytische Funktionen, da sie aus solchen nur durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Differentiation abgeleitet sind.

Mit Hilfe der eben bestimmten Funktionen $u_1, u_2, \cdots, u_m$ bilde man sich die m^2 Funktionen $u_i y_k (i = 1, 2, \cdots, m;\ k = 1, 2, \cdots, m)$; $y_1, y_2, \cdots, y_m$ bedeuten hierbei die Integrale eines Fundamentalsystemes von (D), die durch ihre Anfangswerte und die ihrer Abgeleiteten bis zur Ordnung $m-1$ für eine Stelle $x = x_0$ im Innern von S festgelegt seien. Die m^2 Funktionen $u_i y_k$ sind bei der angegebenen Wahl der u_i linear unabhängig, d. h. für die Umgebung keines Punktes in S kann die Beziehung

$$(C): \qquad \sum_{i,k} c_{ik} u_i y_k = 0$$

bestehen, wobei die c_{ik} m^2 Konstante bedeuten, die nicht sämtlich Null sind. Da in der Gleichung (C) lauter in S reguläre analytische Funktionen auftreten, müßte die Gleichung, wenn sie in der Umgebung eines Punktes von S gilt, auch in der Umgebung jedes Punktes von S gelten. Setzen wir $y_1, y_2, \cdots, y_m$ gleichzeitig von x_0 aus längs irgend eines in S verlaufenden Weges bis $x = a$ fort, so werden wir für $x = a$ Entwicklungen der Form:

$$y_k = r_{k0} + r_{k1}(x-a) + r_{k2}(x-a)^2 + \cdots, \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

erhalten. Angenommen die Gleichung (C) bestehe, so müssen, wenn man in sie für $u_1, u_2, \cdots, u_m$ und $y_1, y_2, \cdots, y_m$ die für die Stelle $x = a$ gefundenen Entwicklungen setzt, die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $x - a$ Null werden. Die 0^{te}, 1^{te} bis $m-1^{\text{te}}$ Potenz von $x - a$ ergibt die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^{k=m} c_{1k} r_{k0} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=m} c_{1k} r_{k1} = 0, \quad \cdots, \quad \sum_{k=1}^{k=m} c_{1k} r_{km-1} = 0.$$

Die Determinante dieses Systemes linearer homogener Gleichungen für die Unbekannten c_{1k} kann nicht verschwinden; denn die Determinante

$|r_{ki}|$ $(k = 1, 2, \cdots, m;\ i = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ unterscheidet sich von dem Werte der Wronskischen Determinante des Fundamentalsystemes $y_1, y_2, \cdots, y_m$ an der regulären Stelle $x = a$ nur um einen konstanten Faktor. Daher muß $c_{11} = c_{12} = \cdots = c_{1m} = 0$ werden. Vermöge der m^{ten}, $m+1^{\text{ten}}$ bis $2m-1^{\text{ten}}$ Potenzen von $x-a$ schließt man genau ebenso, daß $c_{21} = c_{22} = \cdots = c_{2m} = 0$ wird. Auf diese Art ist fortzufahren. Schließlich ergibt die Betrachtung der $m(m-1)^{\text{ten}}$, $m(m-1)+1^{\text{ten}}$ bis m^2-1^{ten} Potenzen von $x-a$, daß $c_{m1} = c_{m2} = \cdots = c_{mm} = 0$ werden muß. Für die angegebenen besonderen Werte der u_i ist daher die Relation (C):

$$\sum_{i,k} c_{ik} u_i y_k = 0$$

nur möglich, wenn alle c_{ik} gleichzeitig verschwinden.

Wir setzen $V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$, wobei die Funktionen u_i und y_i dieselbe Bedeutung wie bisher in diesem Paragraphen haben. Da die u_i und y_i überall in S reguläre analytische Funktionen sind, so trifft dies auch für V zu. Aus V bilden wir uns $\frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}}$. Verwendet man noch die Differentialgleichung (D) zur Beseitigung von m^{ten} und höheren Differentialquotienten der y_i, so stellen sich

$$V, \frac{dV}{dx}, \cdots, \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}}$$

als lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ mit Koeffizienten aus P_1 dar. Könnte man aus diesen m^2 Gleichungen, deren rechte Seiten $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleitete bis zur Ordnung $m-1$ linear und homogen enthalten, diese Größen nicht ausdrücken, so müßte es von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten unabhängige Größen $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_{m^2-1}$ geben, daß:

$$l_0 V + l_1 \frac{dV}{dx} + l_2 \frac{d^2V}{dx^2} + \cdots + l_{m^2-1} \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}} = 0$$

wird. Die Größen $l_0, l_1, l_2, \cdots, l_{m^2-1}$, die übrigens von x abhängen können, sind hierbei nicht sämtlich Null. Die angegebene lineare homogene Differentialgleichung m^2-1^{ter} Ordnung hätte die m^2 Funktionen $u_i y_k$ zu Integralen. Daß die m^2 Funktionen $u_i y_k$ einer linearen homogenen Differentialgleichung m^2-1^{ter} Ordnung genügen, ist infolge ihrer linearen Unabhängigkeit unmöglich. Daher kann man aus den m^2 Relationen für

$$V, \frac{dV}{dx}, \cdots, \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}}$$

sowohl die Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ als auch deren erste, zweite bis $m-1^{te}$ Abgeleitete finden. Man erhält:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},\\
y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \beta_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},\\
&\vdots\\
y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \cdots + \lambda_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}};\\
\frac{d^k y_1}{dx^k} &= \alpha_{1k} V + \alpha_{2k} \frac{dV}{dx} + \cdots + \alpha_{m^2 k} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},\\
\frac{d^k y_2}{dx^k} &= \beta_{1k} V + \beta_{2k} \frac{dV}{dx} + \cdots + \beta_{m^2 k} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}},\\
&\vdots\\
\frac{d^k y_m}{dx^k} &= \lambda_{1k} V + \lambda_{2k} \frac{dV}{dx} + \cdots + \lambda_{m^2 k} \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}}.
\end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, m-1).$$

Hierbei sind $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$ rationale Funktionen von $u_1, u_2, \cdots, u_m$, deren Abgeleiteten, den Koeffizienten der Differentialgleichung (D) und deren Abgeleiteten, gehören also P_1 an. Hierdurch ist unser Theorem völlig bewiesen.

§ 3.

Ist P_1 wie im § 1 der Rationalitätsbereich aller Konstanten, so ist die Funktion $V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$, da die u_i Konstante sind, ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung (D), genügt also sicher einer linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus P_1.

Enthält der Rationalitätsbereich P_1 wie im § 2 auch Funktionen der Variablen x, so bilde man sich aus

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$$

die m^{2te} Abgleitete $\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}}$ und beseitige hierin rechter Hand vermöge der Differentialgleichung (D) die m^{ten} und höheren Abgeleiteten der Funktionen y_i; dann wird $\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}}$ eine lineare homogene Funktion von $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleiteten bis zur Ordnung $m-1$. Ersetzt man hierauf nach dem Schluß des § 2 die Funktionen $y_1, y_2, \cdots, y_m$ und deren Abgeleitete durch V und dessen Abgeleitete, so erhält man für V eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung m^2:

$$\frac{d^{m^2} V}{dx^{m^2}} + \Pi_1(x) \frac{d^{m^2-1} V}{dx^{m^2-1}} + \Pi_2(x) \frac{d^{m^2-2} V}{dx^{m^2-2}} + \cdots + \Pi_{m^2}(x) V = 0.$$

Die Koeffizienten Π gehören P_1 an.

Diese Differentialgleichung der Ordnung m^2 ist nach Herrn Ludwig Schlesinger*) als *Picardsche Resolvente von* (D) zu bezeichnen. Wir haben daher den Satz: *Es ist stets möglich, eine Funktion V von den in der Einleitung geschilderten Eigenschaften zu konstruieren, die einer linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus* P_1 *genügt und an Stelle der m Integrale* $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *in gleichwertiger Weise wie diese zu dem Rationalitätsbereiche* P_1 *adjungiert werden kann.* Hiermit ist der am Schluß der Einleitung besprochene Satz bewiesen.

Freiburg i. Br., Mai 1904.

*) Ludw. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. II_1, S. 60 (Leipzig, 1897.)

Perry, Professor **John**, Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association" in Leeds. Übersetzt von Professor Andreas Walzer in Brünn. Mit 58 Abbildungen im Text und einem Titelbild. [VIII u. 125 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 2.80.

Poincaré, Henri, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 342 S.] 8. 1904. geb. n. ℳ 4.80.

Reichel, Dr. **Otto**, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 50 Figuren im Text. [X u. 111 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 2,40.

Schenk, Dr. Ing. **Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 45 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 1.60.

Schreber, Dr. **K.**, die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebrauchten Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.80.

——— die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?" und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 3.60.

Sellwanoff, Demetrius, Priv. Dozent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 43 in den Text gedr. Fig. [XII u. 766 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 33 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 5.—

Stephan, P., Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 235 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 7.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Weber, H., Professor in Straßburg, und **J. Wellstein**, Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 8.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Wienecke, Ernst, Lehrer in Berlin, der geometrische Vorkursus in schulgemäßer Darstellung. Mit reichem Aufgabenmaterial nebst Resultaten z. Gebr. an allen Lehranst. Mit 69 Fig. i. Text. [IV u. 97 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 2.20.

Wölffing, Dr. **Ernst**, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, Mathematischer Bücherschatz. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: Reine Mathematik. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 15.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 484 S.] gr. 8. 1903. geb. n. ℳ 16.—

INHALT.

Seite

Zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen. Von J. W. Lindeberg in Helsingfors. (Mit 3 Figuren im Text) 351

Zur Theorie des relativen Extremums der einfachen Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen. Von J. W. Lindeberg in Helsingfors 352

A characteristic property of isothermal systems of curves. By Edward Kasner of New York 352

Les séries de factorielles et les opérations fondamentales. Par Niels Nielsen à Copenhague 355

Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen. Von C. Carathéodory in Göttingen. (Mit 2 Figuren im Text) 377

Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili. Di T. Levi-Civita a Padova 393

Über die Kollineationen, die auf zwei windschiefen Geraden vorgeschriebene Punktprojektivitäten erzeugen. Von Eugen Meyer in Charlottenburg . . 406

Über einen Satz der Analysis Situs. Von Friedrich Riesz in Győr (Ungarn) 409

Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. Von Georg Hamel in Karlsruhe 416

Über die Adjunktion von Integralen linearer homogener Differentialgleichungen. Von Alfred Loewy in Freiburg i. Br. 465

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung dem Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Hierzu Beilagen von **Dr. H. Lüneburg's Sort. u. Antiqu.** in **München** und **B. G. Teubner** in **Leipzig,** welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER.

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen

59. Band. 4. Heft.

Mit 53 Figuren im Text.

Ausgegeben am 15. November.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik und Algebra**, red. von Frz. Meyer. Heft: 1. [112 S.] 1898. ℳ 2.40; 2. [121 S.] 1899. ℳ 2.40; 3. [128 S.] 1900. ℳ 2.80; 4. [160 S.] 1901. ℳ 3.60; 5. [210 S.] 1900. ℳ 4.80; 6. [262 S.] 1901. ℳ 5.60; 7. [193 S.] 1902. ℳ 4.80; 8. [CXXXVIII u. 97 S.] 1904. ℳ 3.60.

II. **Analysis**. 2 Teile, red. von H. Burkhardt. I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. ℳ 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. ℳ 7.50; 4. [159 S.] ℳ 4.80; 5. [159 S.] 1904. ℳ 5.—
II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901. ℳ 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. von Frz. Meyer. II. Teil. Heft: 1. [167 S.] 1903. ℳ 4.80. II. Teil. Heft: 2. [96 S.] 1901. ℳ 2.80. III. Teil. Heft: 1. [282 S.] 1902. ℳ 5.40. Heft: 2/3. [526 S.] 1903. ℳ 8.80.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein. I. Teil. Heft: 1. [124 S.] 1901. ℳ 2.40; 2. [158 S.] 1902. ℳ 4.40; 3. [156 S.] 1903. ℳ 4.40. II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1903. ℳ 3.60; 2. [151 S.] 1903. ℳ 3.60.

V. **Physik**, 2 Teile, red. von A. Sommerfeld. I. Teil. Heft: 1. [166 S.] 1903. ℳ 3.80. II. Teil. Heft: 1. [180 S.] 1904. ℳ 4.—

Unter der Presse:

VI. 1: **Geodäsie u. Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. von K. Schwarzschild.

VII. **Historische, philosophische und didaktische Fragen** behandelnd, sowie Generalregister.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Publiée sous les auspices des Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Édition française, rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'université de Nancy. En sept tomes. Tome I: vol. 1, fasc. 1. [160 pag.] 1904. ℳ 4.—

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVIII. Heft. Mit 34 Figuren im Text. [II u. 196 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 6.—

Inhalt: J. L. Heiberg, Mathematisches zu Aristoteles.

Conrad H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert.

Rich. Lindt, Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, seine Beweise und die Unmöglichkeit seiner Umkehrung bei Verwandlung des Begriffes „Gleichgewicht eines Massensystems".

Ahrens, Dr. W., **Scherz und Ernst in der Mathematik.** Gesügelte und ungeflügelte Worte. [X u. 322 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. ℳ 5.—

Alexandroff, Iwan, Professor der Mathematik am Kaiserlich russischen Gymnasium zu Tambow, **Aufgaben aus der niederen Geometrie.** Nach Lösungsmethoden geordnet und zu einem Übungsbuche zusammengestellt. Mit einem Vorwort von Dr. M. Schuyten, Professor an der Oberrealschule zu Oldenburg und 100 Figuren im Text. [VI u. 123 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 2.40.

Bauer, Dr. Gustav, Geheimrat, o. Professor an der Universität München, **Vorlesungen über Algebra.** Im Auftrage des mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, a. o. Professor an der Universität München. Mit dem Porträt Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 378 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungar. Naturwissenschaftl. Gesellschaft. Herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von Josef Klug und Franz Schaffarzik, Mitgliedern der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. XIX. Band. [XIV u. 492 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—

Bolyai de Bolya, Joannes, **Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens**, a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem, adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova illata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt Ludovicus Kürschak, Maximilianus Réthy, Béla Törökfy de Zsigmond, Academiae Scientiarum Hungaricae sodales. 4. [VIII u. 40 S.] 1903. geh. n. ℳ 4.—

Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Der Höhepunkt in der Entwicklung der Theorie der automorphen Funktionen wird durch diejenigen Sätze dargestellt, welche F. Klein als „Fundamentaltheoreme" bezeichnete. Es sind die Existenztheoreme „linear-polymorpher" oder kurz „polymorpher Funktionen" auf beliebig gegebenen Riemannschen Flächen*). Von den verschiedenen Beweisansätzen dieser Theoreme ist der am weitesten reichende der von Klein und Poincaré gleichzeitig konzipierte „Kontinuitätsbeweis" (méthode de continuité). Die Idee dieses Beweises ist, das einzelne Kontinuum gleichgearteter Polygone bezw. Gruppen dem zugeordneten Kontinuum Riemannscher Flächen gegenüberzustellen, um aus denjenigen Eigenschaften, welche man über die Beziehung der beiden Kontinua aufeinander von Hause aus kennt, den Schluß auf die gegenseitige Eindeutigkeit der Beziehung zu tun.

Klein hat in den Mathem. Annalen Bd. 21, pag. 208ff. (datiert 2. Oktober 1882) seine Ideen über den Kontinuitätsbeweis entwickelt. Andrerseits ist Poincaré auf den gleichen Gegenstand in den Acta mathem., Bd. 4, pag. 233ff. (datiert Oktober 1883) eingegangen und hat daselbst in einer für das erste Eindringen bewunderungswerten Art die Tiefen und Schwierigkeiten des Beweises aufgedeckt, sowie Ideen zu ihrer Überwindung angegeben.

Indessen handelt es sich bei diesen Entwicklungen nur erst um erste Entwürfe; und der reifere Aufbau der Theorie der automorphen Funktionen, welcher in dem oben zitierten Werke „A. F." angestrebt wird, hat die

*) Cf. A. F. II, pag. 45. Zitate dieser Gestalt beziehen sich auf die „Vorlesungen über automorphe Funktionen", welche ich in Gemeinschaft mit F. Klein bei B. G. Teubner, Leipzig, herausgebe; Bd. I (1897), Bd. II, Lief. 1 (1901). Diesem Werke schließen sich die folgenden Entwicklungen methodisch und in der Wahl der Bezeichnungen eng an.

Verpflichtung einer sorgfältigeren und einwurfsfreieren Ausbildung jener Kontinuitätsmethoden, eine Aufgabe, deren Lösung nicht geringe Schwierigkeiten in sich birgt. Bei dieser Sachlage habe ich die Fundamentaltheoreme in ihrer Allgemeinheit zunächst als zu schwierig bei Seite gelassen und mich zur Durchführung einiger niederer Spezialfälle gewandt, wo zumal auch die direkte geometrische Anschauung zu einem wesentlichen Hilfsmittel der Untersuchung wird. Die Ergebnisse, zu denen ich in der fraglichen Richtung gekommen bin, sind im folgenden zusammengestellt.

I. Aufstellung zweier grundlegender Theoreme.

In A. F. II, pag. 167ff. ist nach Poincaré bewiesen worden, daß die Moduln der algebraischen Gebilde *stetige* Funktionen von den Moduln oder Invarianten der automorphen Gebilde sind, denen jene algebraischen Gebilde entsprechen. Dieser Satz war eine unmittelbare Folge der gleichmäßigen Konvergenz der Poincaréschen Reihen; und zwar bezieht sich hierbei die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nicht nur auf Abänderung des Argumentes ζ der Poincaréschen Reihe, sondern auch auf Abänderung der Gruppeninvarianten, was eben die gerade genannte Schlußfolgerung zu ziehen gestattet. Nun waren aber a. a. O. beim Beweise der gleichmäßigen Konvergenz die *Grenzfälle* der Polygonkontinua zunächst ausdrücklich ausgeschlossen. Hier wird indessen die Frage, ob die Stetigkeit der algebraischen Moduln bis zu den Grenzfällen inklusive besteht oder nicht, unabweislich.

In dieser Hinsicht erinnere ich zunächst an folgende Verhältnisse. Wir haben erstlich das „Polygonkontinuum", welches zu einer gegebenen Signatur $(p, n; l_1, l_2, \cdots, l_\nu)$ gehört. Dasselbe ist ein *einfach* zusammenhängendes Kontinuum, da es sich, wenn es m-dimensional ist, eindeutig stetig auf die Punkte eines m-dimensionalen regulären Würfels beziehen läßt*). Diesem Kontinuum gehören nun die durch „Transformation" auseinander hervorgehenden Polygone als verschiedene Individuen an (cf. A. F. I, pag. 320 und 389). Aber alle solche ineinander transformierbaren Polygone liefern eine und dieselbe „Gruppe" Γ. Um also das „Gruppenkontinuum" der Signatur $(p, n; l_1, l_2, \cdots, l_\nu)$ zu gewinnen, müssen wir im Polygonkontinuum den DB**) der zugehörigen „automorphen Modulgruppe" abgrenzen, welche nur im Falle $p = 0$, $n = 3$ die Ordnung 1, sonst aber stets die Ordnung ∞ besitzt.

*) Siehe die Notiz „Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygonkontinua", Göttinger Nachrichten 1903, Heft 5.

**) heißt „Diskontinuitätsbereich".

Die Sachlage ist nun die, daß es allerdings aussichtslos ist, die am Rande des „Polygonkontinuums" eintretenden Polygongestalten allgemein überblicken zu wollen. Indessen ist es vollständig ausreichend, sich auf das „Gruppenkontinuum" und also auf den DB der automorphen Modulgruppe zu beschränken. Die Grenzgebilde dieses Kontinuums, d. h. die Randstellen des DB, welche zugleich Randstellen des Polygonkontinuums sind, zu untersuchen, ist aber weit aussichtsreicher. Die nachfolgenden Entwicklungen werden dies dartun.

Um zu einem für die Folge ausreichend allgemeinen Grundsatze zu gelangen, nehmen wir an, daß man von den Polygonen unseres Kontinuums durch irgend einen stetigen Übergang zu einem Grenzgebilde gelangt, welches ein nichtzerfallendes und auch nicht sonstwie ausartendes Polygon von niederem „Charakter" (p, n) darstellt. Als Beispiel wähle man das eindimensionale Kontinuum der Kreisbogenvierecke gegebener Winkel $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}, \frac{\pi}{l_4}$ und nenne die Ecken entsprechend $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$. In Fig. 1 sind die Ecken $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ einander bereits sehr nahe. Lassen wir den Kreis $\varepsilon_2\varepsilon_3$ bis zur Berührung an den Kreis $\varepsilon_4\varepsilon_1$ herankommen, so zieht sich der Kreis $\varepsilon_3\varepsilon_4$ auf einen Punkt zusammen, und die Ecken ε_3 und ε_4 verschmelzen miteinander zu einer parabolischen Spitze. Es entspringt also das nicht ausartende*) Grenzgebilde $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$.

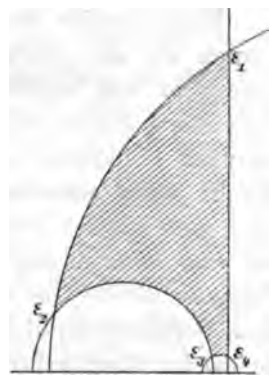


Fig. 1.

Jetzt erinnere man sich, welches der eigentliche Nerv des in A. F. II, pag. 167 entwickelten Poincaréschen Beweises der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen ist. Derselbe beruhte auf der Auswahl eines Bereiches B_0, der auch bei Abänderung der Moduln beständig *innerhalb* des Ausgangspolygons liegt, so daß die mit B_0 äquivalenten Bereiche nie miteinander kollidieren. Dieser Umstand gestattete eine Abschätzung der Reihe:

$$\sum_k \left| \frac{dV_k(\zeta)}{d\zeta} \right|^{\frac{d'}{2}}$$

auf Grund eines a. a. O. pag. 170ff. dargestellten Verfahrens. Man erkennt ohne weiteres, daß für die Auswahl eines solchen Bereiches B_0 ein nicht ausartendes Grenzpolygon oben gedachter Art genau so leicht zugelassen werden kann, wie irgend ein dem Inneren des Kontinuums angehörendes

*) Diese Ausdrucksweise hat hier folgenden Sinn: Von einer Ausartung wird nur gesprochen, wenn im Grenzfalle ein *endlich* ausgedehnter DB nicht mehr vorliegt. Dagegen gilt eine Herabminderung der Signatur *nicht* als Ausartung.

Polygon. Im Grenzfälle werden alsdann gewisse Glieder der eben angeführten Reihe als verschwindend ausfallen, und man gewinnt im *stetigen* Übergange die Reihen des automorphen Gebildes von niederem Charakter bezw. von niederer Signatur.

Die a. a. O. gezogenen Folgerungen betreffs der Stetigkeit der Moduln des algebraischen Gebildes gelten somit bis zum Grenzfall inklusive; d. h. wir haben folgenden

Stetigkeitssatz: *Die Stetigkeit der Moduln des algebraischen Gebildes oder, wie wir kurz sagen wollen, der „algebraischen Moduln" bei stetiger Abänderung der „Gruppenmoduln" trifft nicht nur im „Innern" des Gruppenkontinuums zu, sondern bleibt auch bis zu solchen Grenzfällen „inklusive" bestehen, welche nicht-ausartende automorphe Gebilde darstellen.* —

Einen zweiten für die folgenden Untersuchungen grundlegenden Satz werden wir als „Unitätssatz" zu bezeichnen haben. Derselbe hat von Anfang an eine wichtige Rolle beim Kontinuitätsbeweise gespielt*). Zur Aufstellung dieses Satzes knüpfen wir an das Existenztheorem der automorphen Funktionen (cf. A. F. II, pag. 14). Nach diesem Theorem entspricht jedem automorphen Gebilde eindeutig ein algebraisches Gebilde, oder jedes unserer Polygone gestattet eindeutige und *konforme* Abbildung auf eine Riemannsche Fläche. Wir fragen jetzt, ob zwei verschiedene Polygone hierbei eine und dieselbe Riemannsche Fläche zu liefern imstande sind. Selbstverständlich werden zwei Polygone, die durch Transformation**) ineinander überführbar sind, dieselbe Fläche geben. Wir haben uns also, die Polygone betreffend, auf einen DB der automorphen Modulgruppe zu beschränken. Dies kann in der Weise geschehen, daß wir auf der Fläche ein bestimmtes kanonisches Querschnittsystem vorschreiben und die so zerschnittene Fläche alsdann auf die beiden fraglichen Polygone abgebildet denken. Letztere mögen in zwei getrennten Ebenen, denen der Variabelen ζ und ζ' gelagert sein.

Was die Gestalt der kanonischen Flächenzerschneidung angeht, so ist dieselbe z. B. in A. F. I, pag. 183 dargelegt. Man erinnere sich, daß es sich hier um Flächen handelt, welche mit n Punkten $e_1, e_2, \cdots, e_n$ „signiert" sind. Doch wollen wir die Maßregeln gleich so treffen, daß die Fälle, in denen der Hauptkreis kein Grenzkreis ist, nicht ausgeschlossen sind. Handelt es sich demnach um eine orthosymmetrische Riemannsche Fläche mit $\mu = n - \nu$ Symmetrielinien, so befassen wir uns nur mit der

*) Man vergl. z. B. die Erörterung des gedachten Theorems in der schon zitierten Abhandlung von Klein in den Math. Annalen Bd. 21, pag. 209.

**) Es sind hier nicht nur lineare Transformationen von ζ gemeint, sondern auch die Transformationen im Sinne von A. F. I, pag. 320 ff., welche auf Abänderungen der kanonischen Querschnittsysteme auf den Riemannschen Flächen beruhen.

einen der beiden symmetrischen Flächenhälften, welche dann noch mit ν Punkten $e_1, e_2, \cdots, e_\nu$ signiert ist. Bei Anlage des kanonischen Schnittsystems werden die μ Symmetrielinien den ν Punkten $e_1, \cdots, e_\nu$ gleich behandelt.

Die kanonisch zerschnittene Fläche bezw. Flächenhälfte überträgt sich nun auf zwei den Halbebenen von ζ bezw. ζ' angehörende Polygone P und P', welche, allgemein zu reden, je ν feste Ecken und je $\mu = n - \nu$ Segmente der reellen Achsen längs der Berandungen aufweisen. Durch Vermittlung der Riemannschen Fläche sind diese beiden Polygone P und P' aufeinander eindeutig und *konform* bezogen. Erzeugt man nun von P und P' aus die beiden Polygonnetze N und N', welche die beiden Halbebenen schlicht bedecken, so entspringt eine eindeutige und *konforme* Beziehung beider Halbebenen aufeinander, indem ja die Polygone des einen Netzes eindeutig denen des anderen entsprechen. Man hat nur zu beachten, daß an den elliptischen Ecken zwar die Beziehung des einzelnen Polygons auf die Fläche eine Einbuße der Konformität erfährt, daß aber wegen der an beiden Polygonen P, P' jeweils gleichen Eckenwinkel bei der Beziehung der beiden Halbebenen aufeinander an solchen Stellen die Konformität wieder hergestellt erscheint.

Um Umständlichkeiten zu entgehen, wollen wir über die hier entspringende Beziehung der reellen Achsen aufeinander zunächst keine weiteren Folgerungen ziehen und die konforme Abbildung nur auf die inneren Teile der Halbebenen beziehen. Jedenfalls bleibt beim fortschreitenden Reproduktionsprozeß der Polygone kein endlich weit von der reellen Achse entfernter Punkt der einzelnen Halbebene vom Polygonnetze unbedeckt. Man kann demnach aussagen: Man kommt mit dem Punkte ζ (bezw. ζ') in *jede vorgeschriebene* Nähe der reellen Achse, wenn man mit dem entsprechenden Punkte ζ' (bezw. ζ) *ausreichend nahe* an die Achse herangeht.

Es besteht nun die Tatsache, daß die hier gewonnene Beziehung notwendig durch eine lineare Gleichung:

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

darstellbar sein muß, d. h. daß beide Halbebenen und damit auch beide Vollebenen ζ und ζ' (im Nichtgrenzkreisfalle) kreisverwandt sind. Der Beweis, welchen Klein a. a. O. für diese Tatsache beigebracht hat, ist dadurch erschwert, daß die Beziehung von ζ auf ζ' unter Fortsetzung des soeben befolgten Schlußverfahrens auf die reellen Achsen und dann auf die negativen Halbebenen ausgedehnt wird, wobei also die längs der reellen Achsen angeordneten Grenzpunkte der beiden Polygonnetze zu überschreiten sind. Ein neuerer von W. F. Osgood ausgebildeter Beweis

für das Bestehen der Kreisverwandtschaft ist von dieser Schwierigkeit frei und stützt sich einzig auf die oben allein betreffs der positiven Halbebenen festgestellten Tatsachen*).

Osgood arbeitet zunächst nicht mit den Halbebenen, sondern (was keinen wesentlichen Unterschied ausmacht) mit den Einheitskreisen der ζ- und ζ'-Ebene. Zugleich ordnet er die letzteren so an, daß dem Punkte $\zeta = 0$ der Punkt $\zeta' = 0$ korrespondiert. Die Folge ist, daß der Quotient $\frac{\zeta'}{\zeta}$ im Innern des Einheitskreises der Ebene von $\zeta = \xi + i\eta$ eine überall endliche und nicht verschwindende analytische Funktion ist, welche ebenda keinerlei singuläre Stellen besitzt. Der Logarithmus dieser Funktion werde unter Trennung der reellen und imaginären Bestandteile:

$$\log\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$$

geschrieben. Die reellen Funktionen $u(\xi, \eta)$ und $v(\xi, \eta)$ sind im „Innern" des Einheitskreises überall eindeutig, stetig und harmonisch. Für die erste dieser Funktionen gilt die Darstellung:

$$\log\frac{|\zeta'|}{|\zeta|} = u(\xi, \eta).$$

Nun wurde oben festgestellt, daß, wenn man ζ auf irgend welchen Wegen dem Einheitskreise selbst ohne Ende nahe kommen läßt, hierbei $|\zeta'|$ sich gleichmäßig dem Betrage 1 nähert. Man kann demnach im Innern des Einheitskreises einen demselben ausreichend nahe gelegenen, mit ihm konzentrischen Kreis derart annehmen, daß längs der Peripherie desselben $|\zeta|$ und $|\zeta'|$ „beliebig" wenig von 1 und also $|u(\xi, \eta)|$ „beliebig" wenig von 0 abweicht. Wegen des harmonischen Verhaltens von $u(\xi, \eta)$ geht hieraus hervor, daß $u(\xi, \eta)$ im Innern des Einheitskreises überhaupt keinen von 0 verschiedenen Wert annehmen kann. Ist aber $u(\xi, \eta)$ innerhalb des Einheitskreises überall mit 0 identisch, so hat die konjugierte Funktion $v(\xi, \eta)$ daselbst allenthalben einen konstanten Wert, welcher ϑ genannt werde. Die vorletzte Gleichung liefert nunmehr $\zeta' = e^{i\vartheta} \cdot \zeta$, so daß in der Tat die ζ'-Ebene auf diejenige von ζ kreisverwandt bezogen ist.

Kehren wir nun zu unseren beiden Polygonen P und P' zurück, so sind dieselben als miteinander kreisverwandt für den Standpunkt der Invariantentheorie überhaupt nicht voneinander verschieden. Auf diese Weise gewinnen wir den nachfolgenden

Unitätssatz: *Jeder Stelle des einzelnen Kontinuums automorpher*

*) Dieser Beweis, dessen Kenntnis ich einer brieflichen Mitteilung des Hrn. Osgood verdanke, ist anderweit noch nicht veröffentlicht worden. Das im Texte folgende Referat ist mit gütiger Erlaubnis des Hrn. Osgood hier eingeschoben.

Gebilde, d. i. des Gruppenkontinuums, entspricht „eindeutig" eine Stelle im zugehörigen Kontinuum algebraischer Gebilde (Kontinuum signierter Riemannscher Flächen); jeder Stelle des letzteren Kontinuums entspricht „höchstens" eine Stelle des Gruppenkontinuums.

Der Inhalt des Fundamentaltheorems ist, daß es sich hier um ein umkehrbar eindeutiges Entsprechen handelt. Dies soll nunmehr in einer Reihe spezieller Fälle tatsächlich bewiesen werden. —

II. Die Gebilde des Charakters $p = 0$, $n = 3$.

Die Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, l_2, l_3)$ erledigen sich sofort. Jede mit drei Punkten e_1, e_2, e_3, denen drei ganze Zahlen $l_1, l_2, l_3 \geqq 2$ (den Wert ∞ eingeschlossen) zugeordnet sind, signierte Ebene ist konform abbildbar auf ein Paar symmetrischer Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}$. Das Innere des durch e_1, e_2, e_3 hindurchzulegenden Kreises liefert dabei das eine Dreieck, während das Äußere jenes Kreises dem anderen Dreiecke entspricht. Wir betrachten sogleich die

Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, l_2)$

und denken die l_1, l_2 als ganze Zahlen $\geqq 2$, den Wert ∞ eingeschlossen, irgendwie fixiert. Hier ist das Polygonkontinuum noch mit dem Gruppenkontinuum identisch, d. h. die automorphe Modulgruppe hat die Ordnung 1. Das fragliche Kontinuum ist eindimensional und (cf. A. F. I, pag. 341 ff.) mittelst der Invariante j_3 oder, was zweckmäßiger ist, der Invariante:

$$t = \frac{j_3 - 2}{j_3},$$

deren Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ ist, darstellbar. Die einzelne hierher gehörige Gruppe Γ ist stets durch Spiegelungen erweiterungsfähig; die typische Gestalt der Polygone ist in Fig. 2 gegeben. Man kann hier allemal noch mit elliptischen Substitutionen der Periode 2, welche die Halbebenen permutieren, erweitern. Als DB der erweiterten Gruppe benutzen wir etwa den oberen, stark umrandeten Teil des bisherigen DB (siehe Fig. 2). Die angegebenen Pfeile beziehen sich auf die Erzeugenden dieser erweiterten Gruppe. Von den mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ bezeichneten Eckpunkten des links

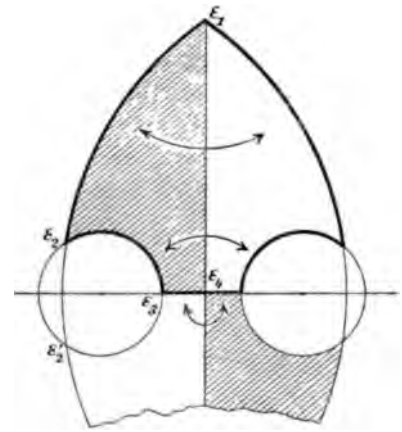


Fig. 2.

liegenden Elementarvierecks gehören die beiden ersten als Fixpunkte den Erzeugenden V_1, V_2 an.

Die beiden Grenzwerte der Invariante t sind $t = 0$ und $t = 1$. Andrerseits erhalten wir offenbar ein am Rande des Kontinuums gelegenes Polygon, falls zwei benachbarte unter den Ecken ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 koinzidieren, oder falls mehrere solche Koinzidenzen gleichzeitig auftreten.

Zunächst ist in Fig. 3 ein Polygon gezeichnet, in welchem ε_3 und ε_4 einander sehr nahe gekommen sind. In Fig. 4 ist die Koinzidenz dieser

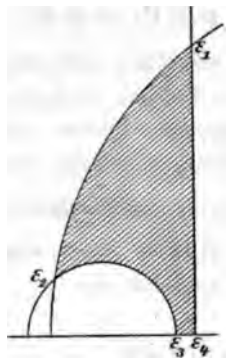


Fig. 3.

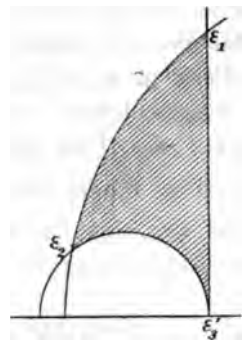


Fig. 4.

Ecken eingetreten, und damit ist V_3 parabolische geworden, so daß wir $j_3 = 2$ und also $t = 0$ erreicht haben. Man beachte, daß wir als nicht-ausartendes Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$ gewinnen. Auf diesen Grenzübergang werden wir hiernach den „Stetigkeitssatz" anwenden dürfen. Den Grenzübergang $\lim. t = 0$ kann man zweitens so ausführen,

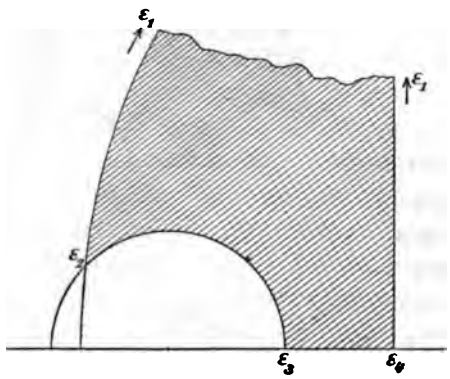


Fig. 5.

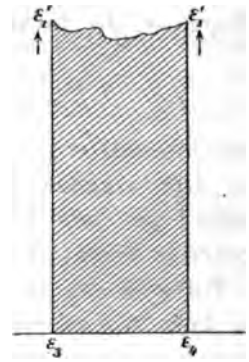


Fig. 6.

wie Fig. 5 anzeigt. Man stelle sich dieselbe als auf der „ζ-Kugel" gelegen vor, wo alsdann die beiden Ecken ε_1 und ε_2 einander sehr nahe gekommen sind. Im Falle der Koinzidenz dieser beiden Ecken entspringt, wie Fig. 6

darlegt, als Grenzgebilde die parabolische Diedergruppe, welcher die Signatur $(0, 3; 2, 2, \infty)$ zukommt. Auch hier ist schließlich V_3 parabolisch geworden, und man hat $\lim. t = 0$.

Im Innern des Intervalles $0 \leqq t \leqq 1$ wird durch einen Wert t ein zugehöriges Gebilde *eindeutig* bestimmt. *Wenn demnach auch in den Figuren* 4 *und* 6 *zwei gänzlich verschiedene nicht-ausartende Grenzgebilde herauskommen, so müssen doch die zum Grenzfall* $(0, 3; l_1, l_2, \infty)$ *stetig hinführenden Gebilde unseres Kontinuums genau dieselben sein (d. i. natürlich bis auf lineare Transformation), wie die zum Grenzfall* $(0, 3; 2, 2, \infty)$ *hinführenden.* In der Tat kann man sofort ein Polygon mit einander nahe gelegenen Ecken ε_3, ε_4 vermöge einer „Ähnlichkeitstransformation" $\zeta' = a\zeta$ mit ausreichend großem a in ein Polygon mit nahe gelegenen Ecken ε_1, ε_2 verwandeln. Man wolle die Anordnung nur so treffen, daß in Fig. 3 der Punkt ε_4 mit $\zeta = 0$ und die Seite $\varepsilon_4\varepsilon_1$ mit der imaginären ζ-Achse zusammenfällt. Nur im Grenzfall $t = 0$ selbst ist diese Überführung nicht mehr statthaft, weil für $\lim. t = 0$ offenbar $\lim. a = \infty$ zutrifft.

Den Grenzübergang zu $t = 0$ kann man auch noch dadurch vollziehen, daß man gleichzeitig ε_1 mit ε_2 und ε_3 mit ε_4 koinzidieren läßt. Dann aber zieht sich das Polygon auf eine Linie zusammen, so daß wir eine Ausartung des Gebildes bekommen, welche die Anwendung des Stetigkeitssatzes verbietet.

Die hier hervorgetretenen Verhältnisse sind nun überhaupt typisch für den Übergang zu Randstellen der Gruppenkontinua. Im „Innern" eines Kontinuums wird durch das einzelne Wertsystem der Moduln *eindeutig* ein zugehöriges Gebilde festgelegt. *Bei einem bestimmten Grenzübergange zu einer Randstelle des Kontinuums kann man verschiedenartige Grenzgebilde niederer Charaktere erhalten, Verhältnisse, die natürlich in ganz entsprechender Art an den algebraischen Gebilden hervortreten müssen.*

Wir werden nun bei dem Unternehmen, das Fundamentaltheorem über Existenz polymorpher Funktionen in einem Einzelfalle $(p, n; l_1, l_2, \cdots, l_\nu)$ zu beweisen, die niederen Fälle bereits als erledigt ansehen. Alsdann brauchen wir bei einem einzelnen Grenzübergange nicht alle möglichen erreichbaren Grenzgebilde in die Diskussion zu ziehen; es wird vielmehr zum Zwecke der Anwendung des Stetigkeitssatzes vollkommen ausreichend sein, wenn wir in jedem Falle *ein einziges nicht-ausartendes Grenzgebilde* erreichen.

Wenden wir diesen Grundsatz auf unser Kontinuum $(0, 3; l_1, l_2)$ an, so können wir den Grenzübergang $\lim t = 1$ durch Koinzidenz der Ecken ε_2 und ε_3 erzielen. Das in Fig. 7 (s. pag. 458) gezeichnete Polygon liegt dieser Grenze bereits sehr nahe. Man erkennt sofort: Der eingeleitete

Grenzübergang liefert als nicht-ausartendes Grenzgebilde die elliptische Diedergruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, l_1)$.

Zur Darstellung des unserem Gruppenkontinuum gegenüberstehenden Kontinuums algebraischer Gebilde führen wir eine Hauptfunktion $s = \varphi(\zeta)$

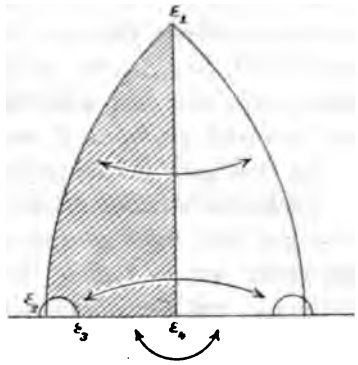


Fig. 7.

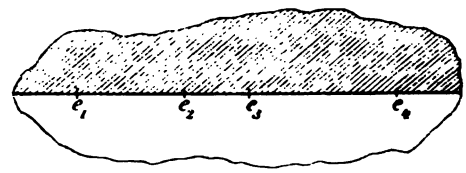


Fig. 8.

des in Fig. 2 stark umrandeten Polygons so ein, daß s längs der Symmetriekreise des Polygonnetzes reell ist, und daß $s = \infty$ in einem Punkte der Seite $\varepsilon_1\varepsilon_4$ zutrifft. Das typische Bild der s-Ebene ist dann durch Fig. 8 dargestellt; und man benutzt, um das Kontinuum derart signierter s-Ebene invariant darzustellen, am einfachsten das Doppelverhältnis:

$$\lambda = -\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_2)}.$$

Offenbar gewinnt man das gesamte „algebraische Kontinuum", indem man λ als reelle Größe das Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ beschreiben läßt.

Den Grenzwert $\lambda = 0$ erreicht man, indem man entweder e_1 und e_2 oder e_3 und e_4 zusammenfallen läßt. Hier treffen wir die oben in anderer Gestalt skizzierten Verhältnisse wieder an. Ist e_2 dem Punkte e_1 bereits sehr nahe gekommen, so können wir durch Ausübung einer Substitution:

$$\frac{s' - e_1}{s' - e_4} = a\,\frac{s - e_1}{s - e_4},$$

welche e_1 und e_4 an Ort und Stelle läßt, den Punkt e_2 noch an jede Stelle des von e_1 und e_4 eingeschlossenen Intervalls bringen. Je weiter wir ihn aber von e_1 entfernen, um so näher wird e_3 an e_4 heranrücken. Nur die beiden Grenzfälle $e_1 = e_2$ einerseits und $e_3 = e_4$ andrerseits selbst sind (wegen $a = \infty$) nicht mehr ineinander überführbar.

Nun ist im Innern des Intervalls $0 \leqq t \leqq 1$ der algebraische Modul λ eine eindeutige stetige Funktion $\lambda(t)$ von t. Der Grenzübergang $\lim t = 0$ liefere den durch Fig. 4 versinnlichten Fall. Ihm entspricht eine mit drei Punkten e_1, e_2, e_3' signierte s-Ebene. Letzterer Punkt ist durch

Koinzidenz von e_3 und e_4 entstanden, so daß $\lambda = 0$ geworden ist. Zufolge des Stetigkeitssatzes erreicht λ hierbei stetig seinen Grenzwert $\lambda = 0$. Ganz entsprechend findet man, daß für $\lim t = 1$ die Funktion $\lambda(t)$ sich stetig der Grenze 1 annähert.

Diese Angaben enthalten nun bereits den Beweis des Fundamentaltheorems im vorliegenden Falle vollständig. Man gehe von irgend einem im „Innern" des Intervalls gelegenen Werte t aus und markiere den zugehörigen Punkt λ. Von diesem Anfangspunkte t aus lasse man den Punkt $t^{(0)}$ stetig bis zum Punkte $t^{(0)} = 0$ wandern. Der korrespondierende Punkt $\lambda^{(0)} = \lambda(t^{(0)})$ wird von der markierten Anfangsstelle λ aus stetig bis $\lambda^{(0)} = 0$ wandern. Man lasse zugleich vom gewählten Anfangspunkte t aus den Punkt $t^{(1)}$ bis 1 stetig wandern. Dabei wird $\lambda^{(1)} = \lambda(t^{(1)})$ von der Anfangsstelle λ aus stetig nach $\lambda^{(1)} = 1$ wandern. Das Abbild der Strecke von $t = 0$ bis $t = 1$ der t-Achse überträgt sich stetig eindeutig auf die Strecke von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ der λ-Achse. Zufolge des Unitätstheorems können hierbei nicht einem und demselben λ zwei verschiedene t entsprechen: also bedeckt das Abbild die genannte Strecke der λ-Achse überall nur einfach. *Es handelt sich demnach hier in der Tat um ein gegenseitig „eindeutiges" Entsprechen.*

Gehen wir auf das in Fig. 2 angedeutete, bezüglich der reellen ζ-Achse sich selbst symmetrische Gesamtpolygon zurück, so können wir das erhaltene Theorem in folgenden Worten aussprechen: *Die z-Ebene sei mit zwei der positiven Halbebene angehörenden Punkten e_1, e_2 signiert, denen zwei ganze Zahlen l_1, $l_2 \geqq 2$, den Wert ∞ eingeschlossen, zugeordnet seien; die zu e_1, e_2 symmetrischen Punkte der negativen z-Halbebene seien e_1', e_2'. Es gibt stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$, welche die z-Ebene auf ein Kreisbogenpolygon vom Typus der Fig. 2 abbildet; die Punkte $e_1, e_2, \cdots$ liefern die Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, an denen sich die vorgeschriebenen Winkel finden, die reelle z-Achse liefert das dem Polygon angehörende Segment der reellen Z-Achse, und der Kreis durch e_1, e_2, e_1', e_2' ergibt die übrigen Symmetriekreise des Polygons bezw. des Polygonnetzes.* —

Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1)$.

Die Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1)$, in welcher l_1 irgend eine ganze Zahl $\geqq 2$, den Wert ∞ eingeschlossen, bedeutet, bilden ein zweidimensionales Kontinuum. Auch hier ist das Polygonkontinuum mit dem Gruppenkontinuum identisch. Zur invarianten Darstellung dienen die Moduln j_2, j_3 oder, was wieder zweckmäßiger ist:

$$t_1 = \frac{j_2 - 2}{j_2}, \quad t_2 = \frac{j_3 - 2}{j_3}.$$

Wir stellen das gesamte Kontinuum gerade vollständig dar, wenn wir mit dem „Punkte“ (t_1, t_2) das hierneben in Fig. 9 gezeichnete Quadrat der t-Ebene beschreiben. Unsere erste Aufgabe wird sein, die hierbei auftretenden Grenzgebilde näher zu untersuchen.

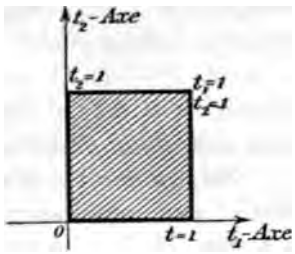


Fig. 9.

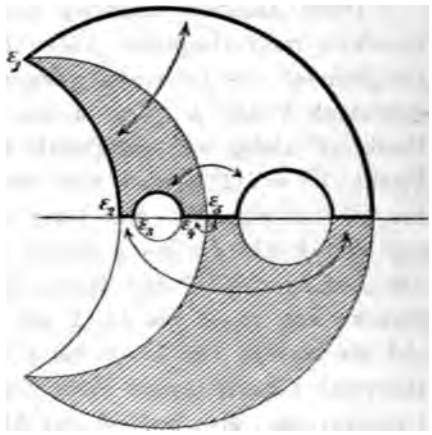


Fig. 10.

Die vorliegenden Gruppen gestatten stets Erweiterung durch Spiegelungen; die Polygone haben die in Fig. 10 dargestellte typische Gestalt. Andererseits ist die einzelne Gruppe der Signatur $(0, 3; l_1)$ stets auch durch elliptische Substitutionen der Periode 2, welche die beiden Halbebenen permutieren, erweiterungsfähig. Als DB der so erweiterten Gruppe können wir den oberen, in Fig. 10 stark umrandeten Teil des bisherigen DB wählen. Die in der Figur angedeutete Zuordnung der Randkurven bezieht sich auf diese erweiterte Gruppe, und an ihr wollen wir die Grenzfälle untersuchen. Die Ecke ε_1 gehört der elliptischen oder parabolischen Erzeugenden V_1 der ursprünglichen Gruppe an, die hyberbolische Erzeugende V_2 entspringt durch Kombination der Spiegelungen an den Symmetriekreisen $\varepsilon_1\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3\varepsilon_4$; endlich entsteht V_3 durch Kombination der Spiegelungen an $\varepsilon_3\varepsilon_4$ und $\varepsilon_5\varepsilon_1$.

Die Seite $t_1 = 0$ unseres t-Quadrates erfordert $j_2 = 2$ und damit eine parabolische Substitution V_2. Wir führen den Grenzübergang zu $t_1 = 0$ am Polygone dadurch aus, daß wir das Segment $\varepsilon_2\varepsilon_3$ der reellen Achse auf einen Punkt zusammenziehen. So gelangen wir zum eindimensionalen Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$, das sich der soeben abgeschlossenen Untersuchung subsumiert. Die Quadratseite $t_2 = 0$ liefert $j_3 = 2$. Wir ziehen hier das Segment $\varepsilon_4\varepsilon_5$ auf einen Punkt zusammen und gelangen aufs neue zu dem eindimensionalen Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$. Im Eckpunkte $t_1 = t_2 = 0$ hängen beide Kontinua zusammen; sie haben hier den gemeinsamen Grenzfall $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$.

Um die Seite $t_1 = 1$ des Quadrats zu erreichen, hat man den Grenzübergang $\lim j_2 = \infty$ zu vollziehen, was in der Art geschehen kann, daß man die Seite $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ des Polygons auf einen Punkt zusammenzieht. Ein dem Grenzfall nahe gelegenes Polygon ist in Fig. 11 dargestellt. Im Grenzfall selbst erhalten wir als nicht-ausartende Gebilde hyperbolische Diedergruppen; dieselben bilden ein eindimensionales Kontinuum, welches man mittels der Invariante t_2 darstellt. In der Ecke $t_2 = 0$, $t_1 = 1$ wird die hyperbolische Diedergruppe zur parabolischen, der die Signatur $(0, 3; 2, 2, \infty)$ zukommt. Zu eben diesem Grenzfalle gelangen wir auch, wenn wir uns der fraglichen Ecke längs der Geraden $t_2 = 0$ mittels der oben ausgewählten Grenzgebilde annähern. Es findet also auch an dieser Ecke ein kontinuierlicher Zusammenschluß der ausgewählten Grenzgebilde statt.

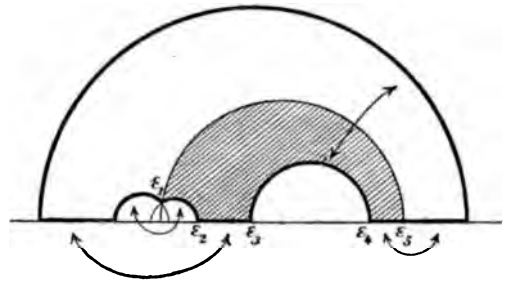


Fig. 11.

Für den Übergang zur Seite $t_2 = 1$ gilt Analoges. Hier wird man die Seite $\varepsilon_1 \varepsilon_5$ des ursprünglichen Polygons unendlich klein werden lassen usw.

Die Ecke $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ des Quadrates erfordert eine besondere Betrachtung. Will man die Richtung vorschreiben, in der man sich diesem Eckpunkte aus dem Innern des Quadrates annähert, so hat man für

$$\lim \frac{j_3}{j_2} = \lim \frac{1 - t_1}{1 - t_2}$$

einen beliebigen, aber bestimmt gewählten positiven Wert anzugeben. Am Polygone kann man diesen Grenzübergang dann in der Weise vornehmen, daß man den Halbkreis $\varepsilon_3 \varepsilon_4$ etwa auf den Mittelpunkt des Segmentes $\varepsilon_2 \varepsilon_5$ der reellen ξ-Achse zusammenzieht. Einem vorgeschriebenen Grenzwerte des Quotienten $\frac{j_3}{j_2}$ entspricht alsdann immer eine ganz bestimmte Endlage der beiden Symmetriekreise $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 \varepsilon_5$. So zeigt Fig. 12 ein der Grenze nahe gelegenes Polygon, für welches $\frac{j_3}{j_2}$ sehr klein ist. So lange der vorgeschriebene Grenzwert dieses Quotienten weder 0 noch ∞ ist, erhalten wir als nicht-ausartendes Grenzgebilde die elliptische Dieder-

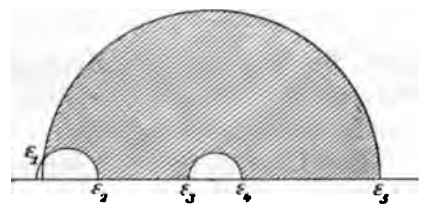


Fig. 12

gruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, l_1)$; die sämtlichen den verschiedenen $\frac{j_3}{j_2}$ entsprechenden Gebilde sind also äquivalent. Lassen wir indessen den Kreis $\varepsilon_1\varepsilon_2$ in Figur 12 mit $\varepsilon_3\varepsilon_4$ zugleich unendlich klein werden, so gelangen wir zu eben demjenigen Grenzgebilde, welches wir vordem längs der Geraden $t_1 = 1$ an deren Endpunkte $t_2 = 1$ von den hyperbolischen Diedergruppen aus erreichten. *Um demnach die Kontinuität der ausgewählten Grenzgebilde an der Ecke $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ zum vollen Abschluß zu bringen, müssen wir zwischen die beiden längs der Geraden $t_1 = 1$ bezw. $t_2 = 1$ an der fraglichen Ecke erreichten Grenzgebilde alle Grenzübergänge stetig eingeschaltet denken, wie sie in eben bezeichneter Weise den Grenzwerten $\lim \frac{j_3}{j_2} = 0, \cdots, \infty$ entsprechen.*

Man kann diese Verhältnisse dadurch einer geometrischen Deutung unterziehen, daß man eine dritte Koordinate t_3 neben t_1 und t_2 einführt und sodann die Relation vorschreibt:

$$t_3 = \frac{1 - t_2}{2 - t_1 - t_2}.$$

Hierdurch wird t_3 als eine Funktion von t_1, t_2 erklärt, die an der Stelle $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ stetig vieldeutig wird; und zwar entsprechen den aus dem Innern des t-Quadrates möglichen Grenzübergängen zum genannten Eckpunkte stetig eindeutig die Werte des Intervalles $0 \leqq t_3 \leqq 1$. Deutet man die zwischen den t vorgeschriebene Relation als Hyperboloid, so erscheint das bisher betrachtete Quadrat der t-Ebene auf einen Bereich dieses Hyperboloids übertragen, der, wie Fig. 13 zeigt, in ein Fünfeck eingespannt ist. Dieses der Hyperboloidoberfläche angehörende Fünfeck wird von drei geraden Strecken und zwei Hyperbelstücken gebildet. Der Rand des Fünfecks ist uns nunmehr ein Bild für das ringförmig geschlossene Kontinuum der ausgewählten Grenzgebilde.

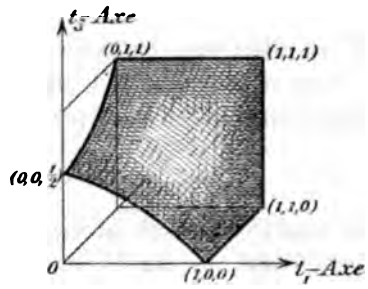


Fig. 13.

Zur Darstellung des Kontinuums algebraischer Gebilde, welche den betrachteten automorphen Gebilden gegenüberstehen, knüpfen wir an die obere, stark umrandete Hälfte des in Fig. 10 dargestellten Polygons. Diese Hälfte liefert den DB der oben genannten erweiterten Gruppe, welche dem Geschlechte $p = 0$ zugehört. Es sei $z = \varphi(\zeta)$ eine zugehörige Hauptfunktion, welche längs der Symmetriekreise reelle Werte hat. Den in Fig. 10 mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_5$ bezeichneten Ecken gehören dann

die Punkte $e_1, e_2, \cdots, e_5$ der reellen z-Achse zu; man darf voraussetzen, daß

$$e_1 < e_2 < e_3 < e_4 < e_5$$

zutrifft, sofern kein Grenzfall vorliegt.

Um das Kontinuum der solcherweise signierten z-Ebenen invariant darzustellen, führen wir die beiden Doppelverhältnisse ein:

$$\lambda_1 = -\frac{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)}{(e_4 - e_2)(e_3 - e_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(e_1 - e_3)(e_4 - e_5)}{(e_1 - e_4)(e_5 - e_3)}.$$

Bei der vorliegenden Anordnung der Stellen e längs der reellen z-Achse ist λ_1 im Intervall $0 < \lambda_1 < 1$ gelegen. Zugleich können wir λ_1 im Innern*) dieses Intervalls beliebig auswählen und würden dadurch das Punktquadrupel e_1, e_2, e_3, e_4 im wesentlichen fixieren. Denken wir letzteres geschehen, so ist e_5 noch beliebig zwischen e_4 und e_1 verschiebbar. Es wird demnach λ_2 gleichfalls dem Intervall $0 < \lambda_2 < 1$ angehören und im Innern desselben beliebig wählbar sein. Nach dieser Auswahl ist die z-Ebene eindeutig bestimmt. Das Kontinuum der wie bezeichnet signierten z-Ebenen wird demnach durch die Punkte des in Fig. 14 gezeichneten Quadrates einer Ebene dargestellt werden, in welcher wir λ_1 und λ_2 als rechtwinklige Koordinaten deuten.

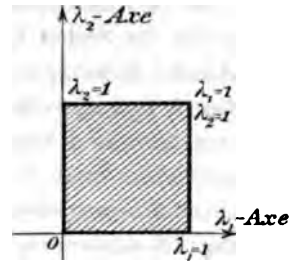


Fig. 14.

Die Grenzfälle haben wir nur insoweit zu betrachten, als dies durch die oben ausgesuchten Grenzgebilde des Gruppenkontinuums vorgezeichnet ist. Die Seite $t_1 = 0$ des Quadrates der t-Ebene hatten wir durch Zusammenrücken der Ecken $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ des Polygons erreicht. Es entsprang das eindimensionale Kontinuum der Polygone von der Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$, welches wir mittels der auf das Intervall $0 \leqq t_2 \leqq 1$ beschränkten Invariante t_2 darstellten. Diese Polygone liefern z-Ebenen, die mit vier Punkten $e_1, e_3 (= e_2), e_4, e_5$ signiert sind; und zwar erreicht man, falls man sich einem Punkte der Seite $t_1 = 0$ stetig annähert, den fraglichen Grenzfall der z-Ebene gleichfalls in stetigem Übergange. Wie man sieht, ist $\lambda_1 = 0$ geworden, und λ_2 hat einen gewissen Wert des Intervalls $0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$ angenommen. Aber für die Signatur $(0, 3; l_1, \infty)$ ist das Fundamentaltheorem oben bereits bewiesen worden. Die Seite $t_1 = 0$ des t-Quadrates ist eindeutig stetig auf die Seite $\lambda_1 = 0$ des λ-Quadrates bezogen, und zwar so, daß dem Endpunkte $t_2 = 0$ der Endpunkt $\lambda_2 = 0$ zugehört, dem Endpunkte $t_2 = 1$ aber der Endpunkt $\lambda_2 = 1$. In genau

*) Die Grenzfälle $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1$, welche sogleich ausführlich zu betrachten sind, gelten zunächst als ausgeschlossen.

derselben Weise findet man, daß sich die Seite $t_2 = 0$ des t-Quadrates auf die Seite $\lambda_2 = 0$, welche ihr im anderen Quadrate homolog ist, überträgt.

Man wird diese Betrachtung leicht für die dritte und vierte Seite des Quadrates der t-Ebene weiterführen. Den Übergang zur Seite $t_1 = 1$ vollzogen wir durch Zusammenschieben von ε_1 und ε_2; es entsprang ein Kontinuum hyperbolischer Diedergruppen. Man gelangt zu $\lambda_1 = 1$. Das Fundamentaltheorem für dieses Kontinuum ist zwar oben nicht erwähnt, jedoch geht die Richtigkeit desselben bereits aus der Theorie der elliptischen Funktionen hervor. Die durch $t_1 = 1$ dargestellte Seite des Quadrates der t-Ebene überträgt sich eindeutig stetig auf die homologe Seite des λ-Quadrates. Die gleiche Beziehung stellt man auf dieselbe Weise für die Seiten $t_2 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ fest.

An der Ecke $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ wird man analoge Verhältnisse erwarten, wie bei $t_1 = 1$, $t_2 = 1$. In der Tat findet auch bei den algebraischen Gebilden hier kein kontinuierlicher Zusammenschluß statt, falls man sich der fraglichen Ecke einmal längs der Seite $t_1 = 1$, sodann längs $t_2 = 1$ annähert. Um sogleich zu einem anschaulichen Bilde zu gelangen, wie es der Fig. 13 entspricht, führen wir das dritte Doppelverhältnis:

$$\lambda_3 = -\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_5)}{(e_1 - e_3)(e_5 - e_2)}$$

ein. Alsdann gilt:

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 \lambda_2 - 1},$$

so daß λ_3 im allgemeinen eindeutig in λ_1 und λ_2 ist. Nur an der fraglichen Stelle $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ ist λ_3 stetig vieldeutig und nimmt, falls wir uns dieser Ecke aus dem Innern des Quadrates in bestimmter Richtung annähern, einen gewissen zwischen 0 und 1 gelegenen Grenzwert an. Deuten wir λ_3 als dritte Koordinate, so liefert die Relation:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_3 + 1 = 0$$

eine Fläche dritter Ordnung, auf welcher das in Fig. 15 gezeichnete windschiefe geradlinige Fünfeck gelegen ist. Das in dieses Fünfeck eingespannte Stück der Fläche tritt jetzt an die Stelle des λ-Quadrates.

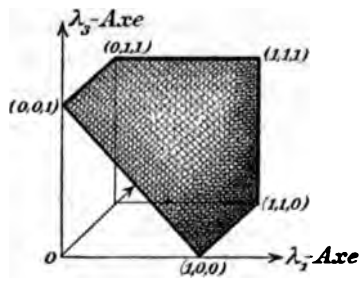


Fig. 15.

Die über dem Punkte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ stehende Seite des Fünfecks ist nun eindeutig stetig auf die homologe Seite des Fünfecks im Raume der t bezogen. Zum Beweise dessen brauchen wir nicht auf ein voraufgehendes Fundamentaltheorem zurückzugehen, vielmehr genügt hier das

Existenztheorem der automorphen Funktionen. Die fragliche Seite des t-Fünfecks können wir entweder in der oben (pag. 461 u. f.) befolgten Weise oder auch (was projektiv auf dasselbe hinauskommt) im Anschluß an Fig. 10 dadurch beschreiben, daß wir die Verschwindungsstelle des Kreises $\varepsilon_3\varepsilon_4$ über das Segment $\varepsilon_2\varepsilon_5$ der reellen ζ-Axe hinführen, während übrigens die Symmetriekreise des Polygons fest bleiben. Der bei diesem Prozeß festbleibende Grenzfall der elliptischen Diedergruppe $(0, 3; 2, 2, l_1)$ gibt als Abbild des Polygons eine mit e_1, e_2, e_5 signierte z-Ebene, wobei die Strecke e_2e_5 eindeutig stetig auf das Segment $\varepsilon_2\varepsilon_5$ bezogen ist. Beschreibt somit die Verschwindungsstelle von $\varepsilon_3\varepsilon_4$ dieses Segment, so beschreibt die Koinzidenzstelle der Punkte e_3 und e_4 die von e_2 bis e_5 reichende Strecke der reellen z-Achse, d. h. aber λ_3 wandert längs der fraglichen Fünfecksseite von 1 bis 0.

Um die gewonnenen Prämissen für den Kontinuitätsbeweis zusammenzufassen, so gilt folgendes: Jedem Punkte im Innern oder auf dem Rande des fünfeckigen Bereiches im t-Raume entspricht eindeutig ein Punkt des Bereiches im λ-Raume, der sich überall (d. i. auch unter Einschluß des Randes) stetig ändert, falls der Punkt l selbst eine stetige Änderung erfährt. Diese Beziehung ist umgekehrt höchstens eindeutig, d. h. keinem Punkte λ können zwei verschiedene Punkte t entsprechen. *Im speziellen ist die Beziehung eine solche, daß der Rand des t-Fünfecks eineindeutig stetig auf den des λ-Fünfecks bezogen ist, wobei homologe Seiten und Ecken der Fünfecke einander korrespondieren.*

Man denke sich nun den Rand des t-Fünfecks kontinuierlich in das Innere desselben hineingezogen und lasse denselben schließlich zu einem Punkte zusammenschrumpfen, etwa zu dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$, welcher dem Bereiche angehört. Dieser Prozeß soll derart geschehen, daß jeder Punkt des Bereiches (abgesehen natürlich von dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ selbst) einmal und nur einmal von der sich zusammenziehenden Kurve überstrichen wird. Da der Bereich das Stück einer Fläche zweiten Grades darstellt, so hat es keine Schwierigkeit, die gegebene Vorschrift auf die eine oder andere Weise zu erfüllen. Wir gelangen zu einer den Bereich bedeckenden Kurvenschar, welche dargestellt sei durch:

$$T(t_1, t_2, t_3; \sigma) = 0.$$

Hierbei sei σ ein Parameter, der zur Gewinnung unserer Kurvenschar das Intervall von 0 bis 1 beschreiben möge. Durch den einzelnen Punkt des Bereiches läuft eine und nur eine Kurve der Schar hindurch, ihm gehört also ein und nur ein Wert σ an. Dem Fünfeckrande gehöre $\sigma = 0$ zu, dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ aber $\sigma = 1$.

Man betrachte nun das Abbild dieser Kurvenschar auf dem λ-Fünfecke. Wir gewinnen daselbst eine entsprechende Schar, welche dargestellt sei durch:

$$\Lambda(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; \sigma) = 0.$$

Für $\sigma = 0$ erhalten wir den Rand des λ-Bereiches, für $\sigma = 1$ denjenigen inneren Punkt, welcher dem Punkte $t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}$ eindeutig zugeordnet ist. Sind σ_1 und σ_2 zwei verschiedene Werte des Parameters, so können die beiden zugehörigen λ-Kurven einander weder schneiden noch berühren. Jedem gemeinsamen Punkte beider Kurven würden nämlich notwendig zwei getrennte Punkte des t-Bereiches entsprechen; das aber würde dem Unitätssatze widersprechen.

Man hat nun folgende Alternative: Entweder bedecken die λ-Kurven den fraglichen Bereich überall dicht, oder man kann mindestens einen Bereich B von *endlicher* Flächenausdehnung im Innern unseres λ-Bereiches nachweisen, durch welchen überall keine λ-Kurve hindurchzieht. Zur Erleichterung der Ausdrucksweise bei der weiterfolgenden Überlegung projiziere man B auf die $\lambda_1 \lambda_2$-Ebene, wo man als Projektion den gleichfalls endlich ausgedehnten Bereich B_0 erhalte. Innerhalb B_0 denke man einen Kreis K gezeichnet, dessen Durchmesser δ als eine bestimmte von 0 verschiedene Zahl angenommen werden kann.

Die einzelne λ-Kurve ist nun, wie ihr Original, eine einfach geschlossene, von Spaltungsstellen überall freie Kurve. Von jeder vorgelegten λ-Kurve muß man demgemäß in eindeutig bestimmter Weise die Frage beantworten können, ob sie den frei bleibenden Bereich B umschließt oder nicht. In bekannter Schlußweise gewinnen wir eine bestimmte „Zahl" σ_0, so daß für $\sigma < \sigma_0$ die zugehörige λ-Kurve den Bereich B umschließt, während für jede zu $\sigma > \sigma_0$ gehörende λ-Kurve B außerhalb liegt.

Sei nun ε eine kleine Zahl > 0, über deren Auswahl wir uns sogleich noch schlüssig machen. Man konstruiere dann zunächst die beiden Kurven:

$$T(t_1, t_2, t_3; \sigma_0 - \varepsilon) = 0, \quad T(t_1, t_2, t_3; \sigma_0 + \varepsilon) = 0.$$

Man wolle nun diese beiden Kurven in irgend einer Weise eindeutig stetig aufeinander beziehen und zwar kann man dies derart ausführen, daß die Entfernung je zweier einander zugeordneten Punkte für $\lim \varepsilon = 0$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Die gleiche Zuordnung der Punkte begründe man für die korrespondierenden λ-Kurven. Da es sich beim Übergang zur λ-Kurve um eine gleichmäßig stetige Abbildung handelt, so können wir ε so klein annehmen, daß die Entfernung zweier zugeordneten Punkte der λ-Kurven stets $< \delta$ ist, wo δ die vorhin so bezeichnete Zahl ist.

Dies aber ist ein Widerspruch mit obiger Annahme. Denkt man sich nämlich, der leichteren Anschaulichkeit halber, die λ-Kurven auf die $\lambda_1 \lambda_2$-Ebene projiziert, so umschließt zwar die zu $\sigma_0 - \varepsilon$ gehörige den Kreis K, aber nicht die zu $\sigma_0 + \varepsilon$ gehörige. Beschreibt man die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte beider Kurven, so werden diese sich notwendig über den Kreis K hinwegschieben, also sicher einmal $\geqq \delta$ werden.

Hiernach läßt sich die Annahme eines offen bleibenden Bereiches mit dem Stetigkeitssatze nicht vereinigen. Es ist demnach sicher, daß durch jeden Punkt des λ-Bereiches eine λ-Kurve hindurchläuft. Das Fundamentaltheorem ist damit im vorliegenden Falle bewiesen.

Die vorstehende Überlegung, welche in ihren Grundzügen einwurfsfrei sein dürfte, kann zweifellos auf Grund der scharfen Begriffe der Funktion, der Kurve, der Stetigkeit usw., wie sie insbesondere durch Eingreifen der Mengenlehre sich herausgebildet haben, hie und da eine Präzision erfahren. Dem gleichen Bedenken waren die Andeutungen und Überlegungen unterworfen, durch welche Klein und Poincaré anfänglich ihre Kontinuitätsbetrachtungen stützten. In der Tat ist denn auch bereits von mengentheoretischer Seite unternommen worden, dem Kontinuitätsbeweise der Fundamentaltheoreme nach der fraglichen Richtung hin Ergänzung und Präzision zu verleihen. So beweist A. Schönflies*) auf Grund mengentheoretischer Betrachtungen den Satz, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Fläche eines Quadrates wieder ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ist, ein Satz, dessen Anwendbarkeit auf unsere hier vorliegende Untersuchung unmittelbar einleuchtet. Vereinfachte Beweise dieses Schönfliesschen Satzes haben W. F. Osgood**) sowie F. Bernstein***) gegeben.

Das Hauptziel der vorliegenden Abhandlung besteht nun nicht etwa darin, eine auch für den Standpunkt der Mengenlehre in jeder Beziehung abgeschlossene Darstellung des Kontinuitätsbeweises zu liefern, vielmehr ist das vornehmliche Ziel, die Gruppenkontinua und die ihnen gegenüberstehenden Kontinua algebraischer Gebilde insoweit einer Durchforschung und Darstellung zu unterwerfen, daß die Durchführung einer Betrachtung, die ihrem Wesen nach der Mengentheorie angehört, dann keine erhebliche Schwierigkeit mehr finden dürfte. Bei den Kontinuis, welche im folgenden zur Behandlung kommen, habe ich mich darauf beschränkt, jeweils eine Betrachtung durchzuführen, welche an der soeben (pag. 466 u. f.) gegebenen, ihr genaues Modell findet. Die Analogie wird eine so unmittel-

*) Göttinger Nachr. 1899, Heft 3.

**) Göttinger Nachr. 1900, Heft 1.

***) Göttinger Nachr. 1900, Heft 1.

bare sein, daß es nicht nötig erscheinen wird, die Einzelheiten der Überlegung in jedem Falle zu wiederholen.

Die Betrachtung der Gebilde $(0, 3; l_1)$ möge durch Ausspruch des Fundamentaltheorems im Anschluß an das vollständige in Fig. 10 gezeichnete Polygon beendet werden: *Es sei eine zweiblättrige Riemannsche Fläche über der z-Ebene mit vier reellen Verzweigungspunkten e_2, e_3, e_4, e_5 vorgelegt; dieselbe sei mit zwei übereinander liegenden Punkten e_1, e_1' der reellen z-Achse, denen eine beliebige ganze Zahl $l_1 > 1$ (oder $l_1 = \infty$) zugeordnet sei, signiert (cf. Fig. 16). Auf dieser Fläche gibt es stets eine*

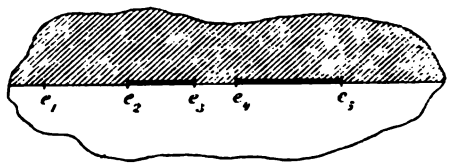


Fig. 16.

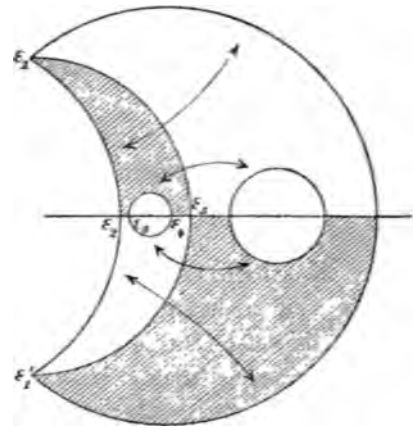


Fig. 17.

und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$, welche die Fläche konform auf ein Kreisbogenpolygon des in Fig. 17 dargestellten Typus abbildet; an den Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$, welche den Punkten e_1, e_1' entsprechen, finden die Winkel $\frac{2\pi}{l_1}$ statt, den Verzweigungspunkten $e_2, \cdots$ entsprechen die Schnittpunkte $\varepsilon_2, \cdots$ der Symmetriekreise mit der reellen ζ-Achse.

Gebilde der Signatur (0, 3).

Das Polygonkontinuum der Signatur (0, 3), welches wieder mit dem Gruppenkontinuum identisch ist, ist dreidimensional. Zur invarianten Darstellung dienen die drei Moduln j_1, j_2, j_3, die wir indessen wieder durch:

$$t_1 = \frac{j_1 - 2}{j_1}, \quad t_2 = \frac{j_2 - 2}{j_2}, \quad t_3 = \frac{j_3 - 2}{j_3}$$

ersetzen. Die t_1, t_2, t_3 sind voneinander unabhängig in den Intervallen $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$, $0 \leqq t_3 \leqq 1$ variabel. Deuten wir die t_1, t_2, t_3 als rechtwinklige Raumkoordinaten, so ist unser Gruppenkontinuum durch die Punkte (t_1, t_2, t_3) des durch die angegebenen Ungleichungen charakterisierten Hexaeders dargestellt.

Die typische Gestalt eines dem Innern des Kontinuums angehörenden Polygons ist in Fig. 18 dargestellt. Die zugehörigen algebraischen Gebilde sind hyperelliptisch vom Geschlechte $p = 2$. Das einzelne Gebilde gestattet zwei symmetrische Umformungen in sich, deren jede drei Symmetrielinien besitzt. Erweitert man durch die elliptischen Substitutionen

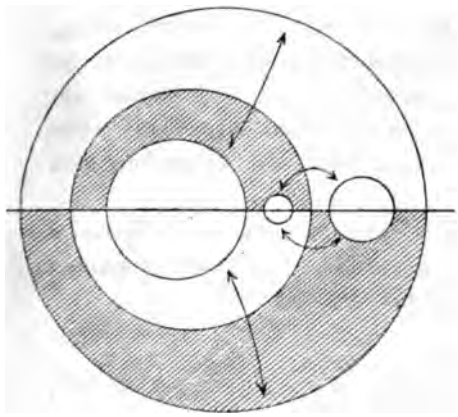


Fig. 18.

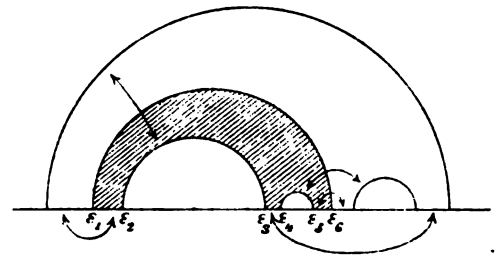


Fig. 19.

der Periode 2, deren Fixpunkte die Schnittstellen der Symmetriekreise mit der reellen ζ-Achse sind, so entspringt eine Gruppe des Geschlechtes $p = 0$, deren DB in Fig. 19 dargestellt ist. Die Invarianten t_1, t_2, t_3 können wir in leicht ersichtlicher Art den Halbkreispaaren der schraffierten Polygonhälfte zuordnen; und zwar gehöre t_1 zum Paare $\varepsilon_1\varepsilon_6$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, weiter t_2 zum Paare $\varepsilon_3\varepsilon_2$, $\varepsilon_4\varepsilon_5$, endlich t_3 zum Paare $\varepsilon_4\varepsilon_5$, $\varepsilon_1\varepsilon_6$,

Das gegenüberstehende Kontinuum algebraischer Gebilde stellen wir am zweckmäßigsten wieder mittels einer Hauptfunktion $z = \varphi(\zeta)$ des DB der Fig. 19 dar. Die schraffierte Polygonhälfte werde auf die positive z-Halbebene abgebildet; die den Ecken $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_6$ entsprechenden Werte $z = e_1, e_2, \cdots, e_6$ sind dann sämtlich reell, und man darf $e_1 \leqq e_2 \cdots \leqq e_6$ annehmen, wobei das Zutreffen der Gleichheitszeichen Grenzfälle andeutet. Zur invarianten Darstellung ziehe man die folgenden drei Doppelverhältnisse heran:

$$\lambda_1 = -\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_6)}{(e_1 - e_3)(e_6 - e_2)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(e_3 - e_4)(e_5 - e_2)}{(e_3 - e_5)(e_2 - e_4)},$$

$$\lambda_3 = -\frac{(e_5 - e_6)(e_1 - e_4)}{(e_5 - e_1)(e_4 - e_6)}.$$

Die Werte der λ sind auf das Intervall von 0 bis 1 eingeschränkt. Man darf dem „Innern" dieses Intervalls drei Werte λ_1, λ_2, λ_3 voneinander unabhängig und willkürlich entnehmen, um auf diese Weise ein einzelnes, nicht an der Grenze des Kontinuums liegendes Gebilde eindeutig zu be-

stimmen. Setzt man nämlich, was erlaubt ist, $e_1 = 0$, $e_3 = 1$, $e_6 = \infty$, so folgt:

$$e_2 = \lambda_1, \quad e_5 = e_4 \cdot \lambda_3^{-1},$$

während für e_4 die Gleichung gilt:

$$e_4^2(1 - \lambda_2) + e_4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_1 - 1) + \lambda_1\lambda_3(1 - \lambda_2) = 0.$$

Diese Gleichung hat nur eine Wurzel, die > 1 ist; diese Wurzel ist e_4. Deutet man auch die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als rechtwinklige Raumkoordinaten, so liefern die Bedingungen $0 \leqq \lambda_1 \leqq 1$, $0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$, $0 \leqq \lambda_3 \leqq 1$ wieder ein reguläres Hexaeder, dessen Punkte unser Kontinuum darstellen. Dem Rande des Hexaeders entsprechen die Grenzgebilde mit koinzidierenden Punkten e.

Die Untersuchung der Beziehung des t-Hexaeders auf das λ-Hexaeder erfordert wieder ein Eingehen auf die Grenzgebilde. Für $t_3 = 0$ gewinnen wir die Grundfläche des t-Hexaeders, d. i. das Quadrat

$$t_3 = 0, \quad 0 \leqq t_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq t_2 \leqq 1.$$

Hier gelangen wir zum Kontinuum der Gebilde von der Signatur $(0, 3; \infty)$, die bereits im vorigen Falle ihre Erledigung gefunden haben.

Die Doppelverhältnisse λ_1, λ_2 sind hier gerade in derselben Bedeutung gebraucht wie oben, während $\lambda_3 = 0$ zutrifft. Nach dem Fundamentaltheorem für Signatur $(0, 3; \infty)$ ist das Quadrat:

$$t_3 = 0, \quad 0 \leqq t_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq t_2 \leqq 1$$

eineindeutig stetig auf das Quadrat:

$$\lambda_3 = 0, \quad 0 \leqq \lambda_1 \leqq 1, \quad 0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$$

bezogen, wobei homologe Seiten und Ecken einander zugeordnet sind. Homolog heißen dabei die Seiten $t_1 = 0$, $\lambda_1 = 0$ usw. In gleicher Weise findet man die Seitenflächen $t_2 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ unserer Hexaeder aufeinander bezogen, sowie drittens die Seitenflächen $t_3 = 0$ und $\lambda_3 = 0$.

Wir wollen uns jetzt irgend einem Punkte $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, t_3 = 1$ der Seitenfläche $t_3 = 1$, $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$ in der Art annähern, daß wir $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$ festhalten und t_3 bis 1 anwachsen lassen; wir beschreiben somit im t-Hexaeder eine zur Grundfläche senkrecht stehende Gerade. Dieser Grenzübergang soll in zwei Weisen zur Ausführung gelangen. Wir werden dabei von dem Prinzipe Gebrauch machen, *daß der korrespondierende Weg im λ-Hexaeder in beiden Fällen ein und derselbe ist*, was aus der Eindeutigkeit der Abbildung des t-Hexaeders auf das λ-Hexaeder und dem Stetigkeitssatze sofort hervorgeht.

Zur Erklärung der fraglichen Grenzübergänge gehen wir auf Fig. 19 zurück und verstehen unter V irgend eine hyperbolische Substitution, welche ε_2 und ε_3 zu Fixpunkten und also den Halbkreis $\varepsilon_2\varepsilon_3$ zur Bahn-

kurve hat; durch V möge die ζ-Ebene von ε_2 nach ε_3 hin verschoben werden. Lassen wir nun in Fig. 19 die Halbkreise $\varepsilon_1\varepsilon_6$ und $\varepsilon_2\varepsilon_3$ an Ort und Stelle, während wir $\varepsilon_4\varepsilon_5$ durch eine beliebige Potenz V^s von V verschieben, so behalten die Moduln t_1, t_2 ihre anfänglichen Werte $t_1^{(0)}$, $t_2^{(0)}$, während sich t_3 als stetige Größe dem Werte 1 annähert, falls sich s als stetige Variable dem Grenzwerte $+\infty$ nähert. Dieser erste Grenzübergang liefert Koinzidenz von ε_3, ε_4, ε_5 und damit als nicht-zerfallendes Grenzgebilde die hyperbolische Diedergruppe der Invariante $t_1 = t_1^{(0)}$. In der z-Ebene bewegen sich die Punkte $e_1, \cdots, e_6$ stetig in der Art, daß schließlich e_3, e_4, e_5 koinzidieren. Somit wird $\lambda_3 = 1$, λ_2 kleidet sich in eine unbestimmte Gestalt, und λ_1 ist das Doppelverhältnis des zur obigen Diedergruppe gehörenden algebraischen Gebildes. Nun gilt das Fundamentaltheorem für das Kontinuum dieser Gruppen. Es ist somit der erhaltene Grenzwert λ_1 eine Funktion $\lambda_1 = h(t_1)$, welche das Intervall $0 \leqq t_1 \leqq 1$ eineindeutig stetig (unter Einschluß der Endpunkte) auf das Intervall $0 \leqq \lambda_1 \leqq 1$ abbildet. Den erhaltenen Grenzwert des ersten Doppelverhältnisses bezeichnen wir durch $\lambda_1^{(0)} = h(t_1^{(0)})$.

Um zu untersuchen, ob sich λ_2 einem bestimmten Grenzwerte annähert, führen wir auf Grund des obengenannten Prinzips einen zweiten Grenzübergang aus, indem wir bei festbleibenden Kreisen $\varepsilon_2\varepsilon_3$ und $\varepsilon_4\varepsilon_5$ den Kreis $\varepsilon_6\varepsilon_1$ durch V^{-s} transformieren und wieder s als stetige Größe der Grenze $+\infty$ nähern. Das Grenzgebilde wird nun die hyperbolische Diedergruppe des Moduls $t_2^{(0)}$. Von den Doppelverhältnissen kleidet sich λ_1 in unbestimmte Gestalt, λ_3 wird $= 1$, und λ_2 nimmt den Grenzwert $\lambda_2^{(0)} = h(t_2^{(0)})$ an, unter $h(t)$ die eben so bezeichnete Funktion verstanden.

Wir sind so zu dem Ergebnis geführt: *Die Seitenfläche* $t_3 = 1$, $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$ *des t-Hexaeders ist eineindeutig stetig auf die homologe Seitenfläche* $\lambda_3 = 1$, $0 \leqq \lambda_1 \leqq 1$, $0 \leqq \lambda_2 \leqq 1$ *des λ-Hexaeders bezogen. Die Abbildung hat insofern einen besonders elementaren Charakter, als sie durch zwei Gleichungen:*

$$\lambda_1 = h(t_1), \quad \lambda_2 = h(t_2)$$

darstellbar ist. Die beiden zu den Seiten des t-Quadrates parallelen Geradenscharen übertragen sich auf die entsprechenden Geradenscharen des λ-Quadrates.

Genau dieselben Verhältnisse treffen wir bei den Seitenflächen $t_2 = 1$ und $t_1 = 1$ an.

Man betrachte nun einen ebenen Horizontalschnitt des t-Hexaeders, der ein durch $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$, $t_3 = t_3^{(0)}$ gegebenes Quadrat darstellt. Auf das durch dieses Quadrat dargestellte Gruppenkontinuum lassen sich genau dieselben Überlegungen anwenden, welche wir oben für das einzelne Kontinuum der Signatur $(0, 3; l_1)$ ausführten. Dem Rande des

Quadrates können wir ein ringförmig geschlossenes Kontinuum von Grenzgebilden zuordnen, wenn wir nur an der Ecke $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ zur Herstellung der vollständigen Kontinuität die einfach unendlich vielen Richtungen aus dem Innern des Quadrates nach dem Eckpunkte unterscheiden. Wir können alsdann für dieses Quadrat im speziellen den Kontinuitätsbeweis ausführen. Die den Flächen $t_1 = 1$ und $t_2 = 1$ angehörenden Quadratseiten übertragen sich auf zwei Gerade in den homologen Ebenen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$; und zwar sind es die Geraden $\lambda_3 = h(t_3^{(0)})$. Die beiden anderen Geraden übertragen sich auf zwei den Ebenen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ angehörende Kurven, welche mit den beiden vorgenannten Geraden $\lambda_3 = h(t_3^{(0)})$ ein geschlossenes Viereck bilden. In dieses Viereck ist das Abbild der Fläche des durch $t_3 = t_3^{(0)}$ gegebenen Quadrates eingespannt, und zwar beweist man wie oben, daß es sich hier um eine (unter Einschluß der Ränder) eineindeutige stetige Beziehung handelt.

Man lege jetzt durch das t-Hexaeder $(n + 1)$ Horizontalschnitte in gleichen Abständen hindurch; der unterste Schnitt falle mit der Grundfläche $t_3 = 0$ zusammen, der oberste mit der gegenüberliegenden Seitenfläche $t_3 = 0$. Zugleich führe man das zu diesem Ebenensystem senkrecht stehende Geradenbüschel ein. Beide Gebilde übertrage man auf das λ-Hexaeder und diskutiere die entspringenden Abbildungen auf Grund des Unitäts- und des Stetigkeitssatzes; zum Zwecke der Anwendung des letzteren Satzes wird man vorschreiben, daß die Zahl n beliebig groß gewählt werden darf. Die Abbilder der Horizontalschnitte werden bei ausreichend groß gewähltem n beliebig nahe aneinander heranrücken; die Entfernungen zweier benachbarten Abbilder an irgend welchen Stellen mag man dabei mittelst der Abbilder der vertikalen Geraden messen. Man sieht, daß sich hier eine Betrachtung analog der beim Kontinuitätsbeweise für die Signatur $(0, 3; l_1)$ durchführen läßt. Man findet, daß die beiden Hexaeder (unter Einschluß ihrer Oberflächen) eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind.

Das Fundamentaltheorem für die Gebilde der Signatur $(0, 3)$ können wir so formulieren: Gegeben sei eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit sechs auf der reellen Achse liegenden Verzweigungspunkten $e_1, e_2, \cdots, e_6$. Man lege einen ersten Rückkehrschnitt in bekannter Weise um e_1 und e_2, einen zweiten um e_2 und e_3 usw. So entspringen im ganzen sechs Rückkehrschnitte, die wie die Glieder einer geschlossenen Kette ineinandergreifen. Man denke die Rückkehrschnitte jetzt um ihre jeweiligen Punkte e zusammengezogen, sodaß der einzelne Schnitt nur noch aus zwei koinzidierenden Segmenten der reellen Achse und aus zwei dieselben verbindenden unendlich kleinen Halbkreisen um die betreffenden Punkte e besteht. Alsdann gilt der Satz: *Auf der fraglichen Riemannschen Fläche*

gibt es zwei und nur zwei wesentlich verschiedene polymorphe Funktionen $\zeta = f(z)$, welche die Fläche auf Hauptkreispolygone vom Typus der Fig. 18 abbilden. Bei der einen Funktion $\zeta = f(z)$ gehen der erste, dritte und fünfte Rückkehrschnitt in Segmente der reellen ζ-Achse über, bei der anderen aber der zweite, vierte und sechste. —

III. Die Gebilde des Charakters $p = 1$, $n = 1$.

Die Transformationstheorie der Polygone vom Charakter (1, 1) ist in A. F. I pag. 320 ff. dargestellt, die entsprechenden birationalen Transformationen der Moduln sind a. a. O. pag. 397 besprochen. Einige weitere vorläufige Angaben über die hier eintretende automorphe Modulgruppe und ihren DB sind in der Note „Über die Theorie der automorphen Modulgruppen“*) gemacht. Wir müssen jetzt ausführlich auf diesen DB eingehen und bedienen uns dabei, einem allgemeinen Prinzipe folgend, der Theorie der Normalpolygone.

DB der automorphen Modulgruppe bei $p = 1$, $n = 1$.

Nach A. F. I pag. 265 gibt es bei den Normalpolygonen der Gattung $p = 1$, $n = 1$ nur einen „allgemeinen Typus“, nämlich das Zehneck der Fig. 20 mit einer festen Ecke e_1 und drei Zyklen zufälliger Ecken. Man bewege nun das Polygonzentrum C und halte gerade in dem Augenblicke

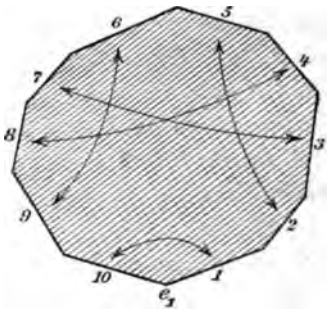


Fig. 20.

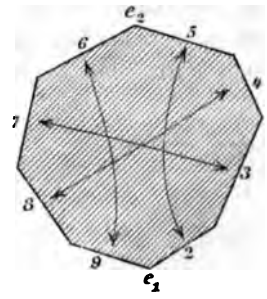


Fig. 21.

an, daß die feste Ecke e_1 im Begriffe steht, dem Polygon verloren zu gehen. Die Seiten 1 und 10 haben sich auf Punkte zusammengezogen, das Polygon ist zu dem Achteck der Fig. 21 mit zwei festen Ecken e_1, e_2 geworden, die einen Zyklus bilden. Das Zentrum C liegt jetzt auf dem Mittellote der Verbindungsgeraden der beiden festen Ecken e_1, e_2. Man verschiebe C auf diesem Mittellote nach rechts, bis e_1 und e_2 gleichzeitig

*) Göttinger Nachrichten von 1896 Heft 2.

im Begriffe sind, dem Polygone verloren zu gehen. In diesem Augenblicke haben sich die Seiten 6 und 9 auf Punkte zusammengezogen; das Polygon ist zu einem Sechseck geworden, dessen Gegenseiten einander zugeordnet sind (cf. Fig. 22). Die drei festen Ecken e_1, e_2, e_3 bilden einen Zyklus, ebenso die drei zufälligen Ecken.

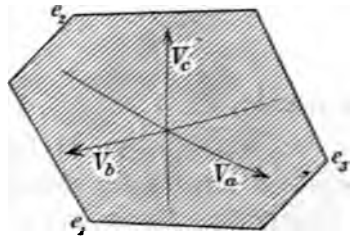


Fig. 22.

Das gewonnene Normalsechseck liefere die Gruppenerzeugenden V_a, V_b, V_c, wie in Fig. 22 angezeigt ist. Welche unter den erzeugenden Substitutionen V_a sein soll, möge einstweilen dahingestellt bleiben; später wird darüber zu entscheiden sein. Die erzeugenden Substitutionen sind verbunden durch die Relation:

$$V_a V_b V_c = 1.$$

Die drei zu den festen Ecken gehörenden gleichberechtigten Substitutionen V_{e_1}, V_{e_2}, V_{e_3}, welche sowohl elliptisch als parabolisch als auch hyperbolisch sein mögen, sind gegeben durch:

$$V_{e_1} = V_b V_a V_c, \quad V_{e_2} = V_c V_b V_a, \quad V_{e_3} = V_a V_c V_b.$$

Die gemeinsame Invariante j_e dieser Substitutionen ist nach A. F. I pag. 360 negativ anzunehmen.

Jede Gruppe unserer Art ist bekanntlich eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 in einer Gruppe vom Charakter (0, 4) und zwar handelt es sich hierbei um die Signatur $(0, 4; 2, 2, 2)$ für $j_e < -2$ (hyperbolischer Fall) oder um die Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, \infty)$ für $j_e = -2$ (parabolischer Fall) oder endlich um $(0, 4; 2,2,2,2l_1)$ für $j_e > -2$ (elliptischer Fall). Einen DB dieser erweiterten Gruppe hat man in dem (in Fig. 23 schraffierten) Dreiecke e_1, e_2, e_3. Das Zentrum C gehört diesem Dreiecke an. Die Fixpunkte der drei elliptischen Erzeugenden der Periode 2 gewinnt man, indem man von C Lote auf die Seiten des Dreiecks fällt. In Fig. 23 sind diese Punkte mit e_1', e_2', e_3' bezeichnet; ist $j_e \gtrless -2$, so sind sie die Seitenmitten des Dreiecks. Im parabolischen Fall ($j_e = -2$) würde diese Bemerkung unstatthaft sein, weil die Punkte e_1, e_2, e_3 im Sinne der zugrundeliegenden projektiven Maßbestimmung unendlich fern sind.

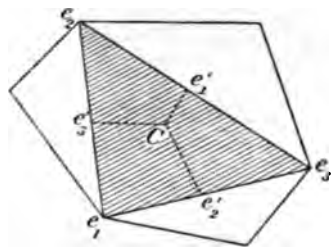


Fig. 23.

Man erkennt nun sofort im schraffierten Dreieck der Fig. 23 das zum Zentrum C gehörende Normalpolygon der erweiterten Gruppe. Weiter

folgt: *Für die Gruppe* (0, 4) *ist der Normalbereich in Gestalt des fraglichen Dreiecks eindeutig bestimmt.* Dies folgt unmittelbar aus der Theorie der Normalpolygone (siehe z. B. den „Reziprozitätssatz" der Normalpolygone in A. F. I pag. 260). In der Tat erinnere man sich, daß man bereits die gesamten Normalpolygone einer vorgelegten Gruppe gewinnt, falls man mit dem Zentrum einen DB der Gruppe beschreibt. Liegt aber das Zentrum im Innern des Vierecks $e_1 e_2' C e_3'$ der Fig. 23, so ragt das zugehörige Polygon nur an e_1, aber an keinen weiteren mit e_1 äquivalenten Punkt heran. Ist das Zentrum auf der Geraden $e_2' C$, aber nicht im Endpunkt C selbst, gelegen, so ragt das Polygon an e_1 und e_3, aber nicht an einen dritten mit jenen äquivalenten Punkt heran. Durch Fortsetzung der Betrachtung erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

Einen DB der ursprünglichen Gruppe (1, 1) kann man auch dadurch gewinnen, daß man das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ etwa längs der Seite $e_1 e_2$ zum „Parallelogramm"*) ergänzt. Letzteres wird alsdann durch die zum Fixpunkte e_3' gehörende Substitution $V_{e_3'}$ der Periode 2 in sich transformiert. Der Punkt C gehe hierbei über in C'. *Für die einzelne Gruppe des Charakters* (1, 1) *gibt es zwei und nur zwei Normalsechsecke unserer Art; beide sind miteinander kongruent und liefern demnach dieselben Invarianten.* In der Tat erkennt man sofort, daß außer C nur noch der Punkt C' des Parallelogramms ein Sechseck liefert, welches letztere aber aus dem ersteren durch $V_{e_3'}$ hervorgeht. —

Bei der Umkehrung der durchlaufenen Entwicklung knüpfen wir an ein beliebiges Dreieck $e_1 e_2 e_3$, dessen Ecken zugleich entweder innerhalb oder auf oder außerhalb der die Maßbestimmung begründenden Ellipse gelegen sind. Im ersten Fall soll die Winkelsumme des Dreiecks $\frac{\pi}{l_1}$ sein, wo l_1 eine gegebene ganze Zahl > 1 ist. Im ersten und dritten Falle wird ferner gefordert, *daß der Mittelpunkt C des umgeschriebenen Kreises, der durch das Dreieck eindeutig bestimmt ist, dem Innern des Dreiecks oder einer Seite desselben angehört.* Im zweiten Falle werde *ein von einer Ecke verschiedener Punkt im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks willkürlich gewählt und als Punkt C bezeichnet.* Die Lote von C auf die Seiten mögen e_1', e_2', e_3' heißen; im ersten und dritten Falle handelt es sich um die Seitenmitten. Die zu e_1', e_2', e_3' als Fixpunkten gehörenden elliptischen Substitutionen der Periode 2 seien $V_{e_1'}$, $V_{e_2'}$, $V_{e_3'}$. Man erkennt ohne weiteres: *Das so ausgestattete Dreieck ist der DB einer aus $V_{e_1'}$, $V_{e_2'}$, $V_{e_3'}$ zu erzeugenden Gruppe vom Charakter* (0, 4), *und zwar haben wir im Dreieck das zum Punkte C als Zentrum gehörende Normalpolygon vor uns.*

*) Im Sinne der zugrundeliegenden projektiven Maßbestimmung heißt „Parallelogramm" soviel wie „Viereck mit gleichen Gegenseiten".

Der Übergang zum Sechseck der Untergruppe vom Charakter (1, 1) ist nun sofort vollzogen. Wir merken als Hauptergebnis an: *Das im wesentlichen eindeutig bestimmte Normalsechseck einer Gruppe vom Charakter* (1, 1) *ist durch die Eigenschaft als charakterisiert anzusehen, daß das Zentrum C dem Innern oder dem Rande des Dreiecks $e_1 e_2 e_3$ angehört.* —

Zur Darstellung der Polygonkontinua, welche bei der Gattung $p = 1$, $n = 1$ auftreten, dienen nach A. F. I pag. 360 die Invarianten j_a, j_b, j_c der Erzeugenden V_a, V_b, V_c*), denen wir jedoch hier sogleich die vorhin mit j_e bezeichnete Invariante der gleichberechtigten Substitutionen $V_{e_1}, V_{e_2}, V_{e_3}$ hinzufügen. Zwischen diesen Invarianten besteht die Relation:

$$j_a^2 + j_b^2 + j_c^2 - j_a j_b j_c = j_e + 2.$$

Zur Einführung einer geometrischen Deutung setzen wir:

$$j_a : j_b : j_c : 1 = x : y : z : t$$

und interpretieren x, y, z, t als homogene Raumkoordinaten. Die angegebene Relation nimmt alsdann die Gestalt an:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz - (j_e + 2)\, t^3 = 0.$$

Für den Einzelwert j_e sehen wir uns hiernach auf eine bestimmte Fläche dritter Ordnung F_3 eingeschränkt. Was diese Werte j_e angeht, so haben wir die dreifache Fallunterscheidung, daß entweder $j_e > -2$ und dann gleich $-2\cos\frac{\pi}{l_1}$ ist (elliptischer Fall) oder $j_e = -2$ zutrifft (parabolischer Fall) oder endlich $j_e < -2$ gilt (hyperbolischer Fall).

Für jeden hiernach zulässigen speziellen Wert j_e besitzt die zugehörige F_3 ein längs der Ebene $t = 0$ in das Koordinatendreieck $xyz = 0$ eingespanntes Flächenstück, welches sackartig im Innern des Koordinatentetraeders hängt und einen einfach zusammenhängenden Bereich darstellt. Für $\lim j_e = -\infty$ ist die Fläche des eben genannten Dreiecks selbst die Grenzlage der gedachten Flächenstücke F_3. *Für $j_e = -2\cos\frac{\pi}{l_1}$ ist dieses einfach zusammenhängende Flächenstück F_3 direkt das Bild des Polygonkontinuums, von dem man weiß, daß es einen einfach zusammenhängenden zweidimensionalen Bereich darstellt.* Alle für $j_e < -2$ eintretenden Flächenstücke füllen den Raum zwischen der besonderen F_3:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz = 0$$

und der Fläche des wiederholt genannten Dreiecks in der Ebene $t = 0$ einfach und vollständig aus. *Der so entspringende einfach zusammenhängende dreidimensionale Bereich ist uns das Gegenbild des einen im*

*) In A. F. I pag. 360 war $j_c = j_{ab}$ als Simultaninvariante des Paares V_a, V_b aufgefaßt.

hyperbolischen Falle eintretenden Polygonkontinuums. Die Fälle $j_e = -2$ kann man nach Belieben als Randgebilde des letzteren Kontinuums auffassen oder auch für sich behandeln und alsdann als Grenzlage den elliptischen Fällen anreihen.

Daß die einzelne F_3 durch die birationalen Modultransformationen in sich übergeführt wird, wurde bereits in A. F. I pag. 397 festgestellt. Es gilt nun das allgemeine Prinzip, daß, wenn ein *einfach* zusammenhängender Bereich durch eine Gruppe eineindeutiger stetiger Transformationen in sich übergeführt wird, im Falle der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe der DB derselben als solcher gleichfalls einen *einfach* zusammenhängenden Bereich darstellt. Bei unseren zwei- bezw. dreidimensionalen Bereichen, welche die Polygonkontinua darstellen, muß nun die Gestalt der einfach zusammenhängenden DB der Modulgruppen implizite in den obigen Entwicklungen über die Normalsechsecke enthalten sein. Nur darf man hierbei nicht übersehen, daß oben lediglich nur erst die Reihenfolge der Erzeugenden V_a, V_b, V_c am Sechseck festgesetzt wurde. Dagegen ist eine zyklische Permutation derselben und also der Invarianten j_a, j_b, j_c noch statthaft.

Da auch für $j_e < -2$ diese Invariante j_e gegenüber den Modultransformationen unverändert bleibt, so können wir auch im hyperbolischen Falle damit beginnen, den BD auf der einzelnen F_3 zu fixieren. Man knüpft nun am einfachsten an das oben betrachtete Dreieck $e_1 e_2 e_3$ an. Ist dasselbe gleichseitig, resp. ist im parabolischen Falle der Punkt C der Höhenschnittpunkt, so hat das Dreieck den Charakter eines Normalpolygons. Andrerseits ist in diesem Falle $j_a = j_b = j_c$ und also $x = y = z$; dieser Punkt ist also auf der F_3 jedenfalls dem gesuchten DB angehörig. Von dieser Anfangsstelle aus werden wir den fraglichen Bereich auf der F_3 bekommen, falls wir das Dreieck unter Festhaltung seiner Winkelsumme allen solchen stetigen Abänderungen unterwerfen, bei welchen das Zentrum C, wie oben vorgeschrieben, dem Dreieck erhalten bleibt.

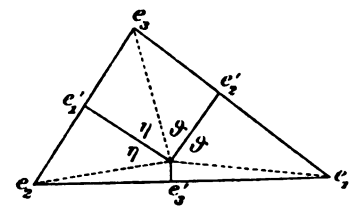


Fig. 24.

Hiernach gelangen wir an den Rand des zu konstruierenden Bereiches, wenn C auf eine der drei Seiten des Dreiecks rückt. Prüfen wir etwa den Fall, daß C auf die Seite $e_1 e_2$ rückt. Die Fig. 24, welche durch sich selber verständlich ist, deutet diesen Grenzübergang an. Man erkennt sofort, daß in der Grenzlage selbst die mit ϑ und η bezeichneten Winkel $\vartheta + \eta = \frac{\pi}{2}$ geben. Führen wir demnach die Variable ζ derart ein, daß

der Hauptkreis die reelle ζ-Achse liefert, der Punkt C mit $\zeta = i$ zusammenfällt und die Gerade $e_3'e_2'$ zur imaginären ζ-Achse wird, so liefert die Gerade $e_1'e_3'$ den Einheitskreis, und das längs e_1e_2 zum „Parallelogramm" ergänzte Dreieck liefert den DB der Gruppe (1, 1) in Gestalt der Fig. 25*).

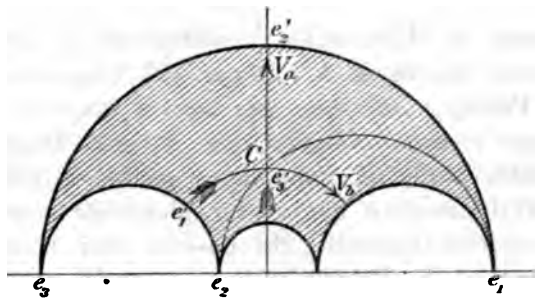


Fig. 25.

Man hat also hier mit einem symmetrischen Gebilde zu tun, und insbesondere läßt sich die zugehörige Gruppe (0, 4) durch Spiegelungen derart erweitern, daß die erweiterte Gruppe ein von vier Symmetriekreisen eingegrenztes Viereck zum DB hat. Die Erzeugenden V_a, V_b der Gruppe (1, 1) haben die Gestalt:

$$V_a = \begin{pmatrix} \alpha_1, & 0 \\ 0, & \delta_1 \end{pmatrix}, \quad V_b = \begin{pmatrix} \alpha_2, & \beta_2 \\ \beta_2, & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

wie aus der Lagerung des DB in Fig. 25 direkt hervorgeht. Die Invarianten haben die Werte:

$$j_a = \alpha_1 + \delta_1, \quad j_b = 2\alpha_2, \quad j_c = j_{ab} = \alpha_2(\alpha_1 + \delta_1);$$

zwischen ihnen besteht demnach die Relation:

$$j_a j_b - 2j_c = 0.$$

Umgekehrt folgt aus dieser Relation die hier vorliegende Gestalt des DB der Gruppe (1, 1). Nehmen wir nämlich, was uns freisteht, die Substitution V_a in der Gestalt $\begin{pmatrix} \alpha_1, & 0 \\ 0, & \delta_1 \end{pmatrix}$ an, so folgt für $V_b = \begin{pmatrix} \alpha_2, & \beta_2 \\ \gamma_2, & \delta_2 \end{pmatrix}$ aus jener Relation:

$$(\alpha_1 + \delta_1)(\alpha_2 + \delta_2) = 2(\alpha_1\alpha_2 + \delta_1\delta_2),$$
$$(\alpha_1 - \delta_1)\delta_2 = (\alpha_1 - \delta_1)\alpha_2.$$

Nun ist $\alpha_1 \gtrless \delta_1$, und also folgt $\alpha_2 = \delta_2$. Die Gestalt von V_a, sowie die Gleichung $\alpha_2 = \delta_2$ bleiben erhalten, falls man jetzt nachträglich noch vermöge einer Substitution der Gestalt $\begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & d \end{pmatrix}$ transformiert. Letztere kann man dann so wählen, daß nach der Transformation die Gleichung $\beta_2 = \gamma_2$ zutrifft. Es wird demnach jedes Gebilde mit $j_a j_b = 2j_c$ am Rande des DB der automorphen Modulgruppe liegen.

*) Als Beispiel ist in der Figur der parabolische Fall angenommen.

Die Fälle, daß C auf die zweite oder dritte Seite des Dreiecks rückt, behandelt man genau so. Man gelangt zu dem vorläufigen Ergebnis: *Zur Gewinnung eines DB der automorphen Modulgruppe auf der einzelnen F_3:*

$$t(x^2+y^2+z^2) - xyz - t^3(j_c+2) = 0$$

grenze man auf derselben einen dreieckigen Bereich ein, begrenzt durch drei Kurven, welche auf der F_3 durch die drei Flächen zweiten Grades F_2:

$$yz - 2xt = 0, \quad zx - 2yt = 0, \quad xy - 2zt = 0$$

ausgeschnitten werden.

Die hier vorliegenden geometrischen Verhältnisse wird man sich leicht klar machen; einige Andeutungen mögen genügen. Man deute etwa hierbei x, y, z als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten, indem man $t = 1$ setzt. Dann beachte man erstlich, daß die F_3 gänzlich im Oktanten $x \geqq 2$, $y \geqq 2$, $z \geqq 2$ verläuft, wobei die Ebene $x = 2$ nur den unendlich fernen Punkt der Geraden $y = z$ mit der F_3 gemein hat, und wobei Entsprechendes von den Ebenen $y = 2$, $z = 2$ gilt. Die drei Geraden $x = 2$, $y = z$; $y = 2$, $z = x$; $z = 2$, $x = y$ stehen nun auch zu den F_2 in nächster Beziehung. Diese F_2 sind jetzt hyperbolische Paraboloide; das erste von ihnen läuft durch die zweite und dritte Gerade hindurch, das zweite durch die dritte und erste, das dritte durch die erste und zweite.

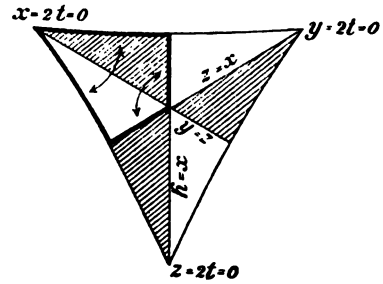


Fig. 26.

Mit Benutzung dieser Angaben wird man sich den Verlauf der fraglichen Flächen leicht weiter klar machen. Bei Ausspruch des Ergebnisses führen wir die vierte Variable und damit die projektive Denkweise wieder ein. *Die drei F_2 schneiden auf der F_3 einen dreieckigen Bereich aus, dessen Eckpunkte der Ebene $t = 0$ als Seitenmitten des Koordinatendreiecks $x \cdot y \cdot z = 0$ angehören. Wie in der schematisch zu verstehenden Fig. 26 bereits angedeutet wurde, hat das gewonnene Dreieck die drei durch die Ebenen $y = z$, $z = x$, $x = y$ ausgeschnittenen Kurven zu Symmetrielinien.*

Diese drei Symmetrielinien zerlegen das Dreieck in sechs abwechselnd symmetrische und kongruente kleinere Dreiecke. Zum DB der automorphen Modulgruppe gelangen wir nun unmittelbar durch die Festsetzung, daß die Invariante j_a weder größer als j_b, noch größer als j_c sein soll, daß also die Ungleichungen $x \leqq y$, $x \leqq z$ gelten sollen. Wir finden: *Auf der F_3 ist das in Fig. 26 stark umrandete Doppeldreieck ein DB der*

automorphen Modulgruppe; die Zuordnung der Seiten des Doppeldreiecks ist in der Figur angegeben.

Um daraufhin die Erzeugenden dieser Modulgruppe zu berechnen, bemerken wir, daß letztere offenbar durch Spiegelungen erweitert werden kann. Der DB der erweiterten Gruppe sei das schraffierte Dreieck des eben gewonnenen DB. Die Spiegelungen an den drei Seiten desselben sind:

$$(S_1) \quad x' : y' : z' : t' = xt : yt : (xy - zt) : t^2,$$
$$(S_2) \quad x' : y' : z' : t' = x : z : y : t,$$
$$(S_3) \quad x' : y' : z' : t' = y : x : z : t.$$

Um die geometrische Bedeutung von S_1 darzulegen, beachte man, daß die Tetraederecke $x = y = t = 0$ der F_3 angehört. Der von dieser Ecke an die F_3 gehende Tangentenkegel berührt, wie man leicht ausrechnet, längs der Symmetrielinie von S_1, d. h. längs der Seite $xy - 2zt = 0$ unseres DB. Auf der einen Seite dieses Kegels laufen vom Scheitelpunkte lauter Strahlen aus, welche die F_3 in zwei weiteren, getrennt liegenden Punkten schneiden. *Dann ist die Bedeutung von S_1, daß diese Spiegelung jeweils zwei solche Schnittpunkte miteinander permutiert.* Für die Spiegelungen S_2 und S_3 sind ganz entsprechende Bemerkungen gültig. Übrigens gelten vorstehende Angaben für alle F_3, d. i. für jeden der bei uns in Betracht kommenden Werte von j_ε.

Die Erzeugenden der ursprünglichen Modulgruppe berechnen sich nun so:

$$(T_1 = S_1 S_2), \quad x' : y' : z' : t' = xt : zt : (xz - yt) : t^2,$$
$$(T_2 = S_2 S_3), \quad x' : y' : z' : t' = y : z : x : t.$$

Diese Formeln sind in Übereinstimmung mit den bezüglichen Angaben in A. F. I, wo die Transformationen der Moduln aus den Abänderungen des kanonischen Schnittsystems auf der Riemannschen Fläche berechnet wurden.

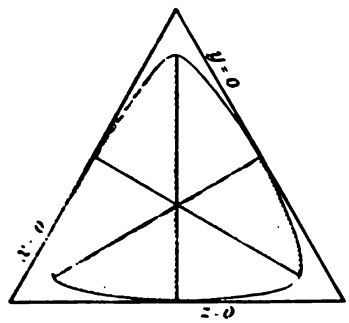


Fig. 27.

Der ganzen hier vorliegenden automorphen Modulgruppe entspricht nun eine *Einteilung der einzelnen Flächenschale F_3 in ein Netz unendlich vieler Dreiecke, welche diese Schale lückenlos und einfach bedecken*, und welche gegen den Rand der Schale (das in der Ebene $t = 0$ gelegene Koordinatendreieck) unendlich klein werden. Eine besondere Betrachtung erfordert hierbei noch der Grenzübergang $\lim j_\varepsilon = -\infty$, wo im Grenzfalle selbst die F_3 zur Fläche des öfter genannten Koordinatendreiecks geworden ist. Einen der Grenze nahe gelegenen Fall können wir am kürzesten durch die (schematisch zu verstehende) Fig. 27 beschreiben. Die Symmetrielinien von S_1, S_2, S_3 ziehen

sich immer mehr an die Ecken des fraglichen Koordinatendreiecks heran. *Im Grenzfalle selber sind vom ganzen Dreiecksnetze nur die sechs den Punkt* $x = y = z$, $t = 0$ *rings umgebenden Dreiecke übrig geblieben, welche die Fläche des Koordinatendreiecks bereits vollständig füllen; das gesamte übrige Netz hat sich auf den Rand des Dreiecks zusammengezogen.*

Um jetzt für $j_e < -2$ zur Darstellung des in diesem Falle dreidimensionalen Gruppenkontinuums zu gelangen, haben wir auf allen zugehörigen Schalen F_3 nach Maßgabe des in Fig. 26 stark umrandeten Doppeldreiecks den DB der automorphen Modulgruppe eingegrenzt zu denken. *Diese kontinuierlich aufeinander folgenden Doppeldreiecke liefern als Gegenbild des fraglichen Gruppenkontinuums eine Hexaeder, welches durch drei Ebenen:*

$$x - y = 0, \quad x - z = 0, \quad t = 0,$$

zwei Flächen zweiten Grades:

$$xy - 2zt = 0, \quad xz - 2yt = 0$$

und die Fläche dritter Ordnung:

$$t(x^2 + y^2 + z^2) - xyz = 0$$

eingegrenzt ist. Durch die Operation T_1 wird die eine F_3 in die andere transformiert, durch T_2 die Ebene $x = z$ in die durch $y = x$ dargestellte. —

Gebilde der Signatur $(1, 1; l_1)$.

Indem wir l_1 als ganze Zahl > 1 oder als ∞ gewählt denken, wenden wir uns zur Spezialbetrachtung des Gruppenkontinuums der Signatur $(1, 1; l_1)$, welches wir auf der zugehörigen F_3 durch die Punkte des in Fig. 26 stark umrandeten Doppeldreiecks darstellen. Letzteres ragt mit einer Spitze an die Grenzkurve der Flächenschale F_3 heran. Zur Vermeidung späterer Unterbrechungen müssen wir zunächst feststellen, zu welchen Grenzgebilden man geführt wird, falls man in dem ebengenannten DB der automorphen Modulgruppe oder auf dem Rande dieses DB an die fragliche Spitze herangeht.

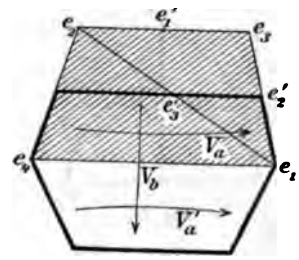


Fig. 28.

Zu diesem Ende setzen wir den DB der Gruppe zunächst in die Gestalt eines „Parallelogramms", dessen Gegenseiten durch V_a und V_b aufeinander bezogen sind (schraffierter Bereich der Fig. 28). Alsdann gehe man durch „erlaubte Abänderung" zu dem stark umrandeten Bereich, indem man das obere Stück des Parallelogramms längs der von e_2' ausziehenden Mittellinie abschneidet und unten anhängt. Der neue DB ist

ein Sechseck, welches als Erzeugende die beiden gleichberechtigten Substitutionen V_a, V_a' und die Substitution V_1 liefert.

Der Grenzübergang zur gekennzeichneten Spitze des auf der F_3 gelegenen Doppeldreiecks erfordert nun $\lim j_2 = 2$, $\lim j_3 = \infty$. Ein der Grenzlage nahegelegenes Sechseck ist in Fig. 29 dargestellt. Im Grenzfalle selbst ziehen sich die beiden durch V_1 einander zugewiesenen Seiten auf Punkte der fundamentalen Ellipse der projektiven Maßbestimmung zusammen, die beiden gleichberechtigten Substitutionen V_a, V_a' werden parabolisch. Das entspringende Viereck hat somit zwei parabolische Spitzen, sowie zwei zu einem Zyklus gehörende elliptische Ecken seitlich in der Fig. 29), wobei die beiden an diesen Ecken liegenden Winkel (wie auch schon an den Sechsecken) einander gleich und gleich $\frac{\pi}{l_1}$ sind. Wir haben hiernach den DB der Gruppe von der Signatur $(0, 3: l_1, \infty, \infty)$ gewonnen: *Jeder Übergang aus dem Innern des DB der automorphen Modulgruppe nach der bei $x = 2t = 0$ gelegenen Spitze führt als Grenzgebilde zu der Gruppe von der Signatur* $(0, 3: l_1, \infty, \infty)$.

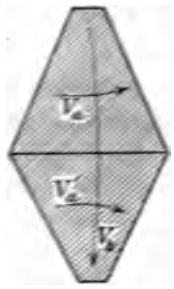


Fig. 29.

Unserem Gruppenkontinuum steht das Kontinuum der mit einem Punkte e signierten Riemannschen Flächen des Geschlechtes $p = 1$ gegenüber. Eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes 1 läßt stets eine kontinuierliche Gruppe von Transformationen in sich zu, und unter letzteren kann man stets solche angeben, welche eine beliebige Stelle der Fläche in eine beliebige andere überführen. Die Signierung einer einzelnen Stelle e ist demnach hier ohne Bedeutung, so daß wir mit dem Kontinuum der algebraischen Gebilde mit $p = 1$ schlechthin zu operieren haben.

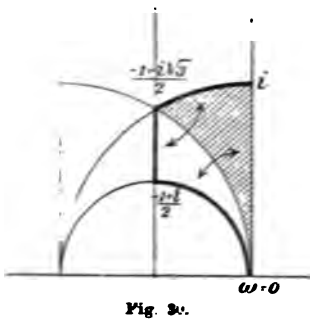


Fig. 30.

Die für den vorliegenden Zweck geeignetste Darstellung des fraglichen Kontinuums ist die durch die Punkte eines Doppeldreiecks des der Theorie der elliptischen Modulfunktionen zu Grunde liegenden Netzes der Dreieck ein der ω-Halbebene. Und zwar wählen wir am passendsten das in Fig. 30 skizzierte Doppeldreieck, das wir den in Fig. 26 stark umrandeten DB der automorphen Modulgruppe gegenüberstellen. Diese Auswahl des Doppeldreiecks setzt voraus, daß den Substitutionen V_a, V_b, V_c die folgenden Transformationen des dem elliptischen Gebilde angehörenden Integrals erster Gattung entsprechen:

$$(V_a) \quad u' = u + \omega_1,$$
$$(V_b) \quad u' = u + \omega_2,$$
$$(V_c) \quad u' = u - \omega_1 - \omega_2.$$

Wir untersuchen nunmehr die Abbildung des auf der F_3 gelegenen Doppeldreiecks auf das ω-Doppeldreieck und beginnen mit dem Rande des ersteren Bereiches. Betrachten wir zunächst die der Kurve $xy - 2zt = 0$ angehörende Seite des Bereiches! Die zugehörigen Gruppen-DB haben den in Fig. 25 dargestellten Typus, und da die hier vorliegenden Symmetrien bei Abbildung auf die Ebene des Integrales u erhalten bleiben, so ist das in der u-Ebene gelegene Periodenparallelogramm ein Rechteck. Speziell entspricht der Ecke $x = y$, $xy = 2zt$ ein Quadrat, während übrigens wegen $j_a < j_b$ notwendig $|\omega_1| < |\omega_2|$ folgt. Der Periodenquotient ω ist rein imaginär und absolut $\leqq 1$; der Ecke $x = y$, $xy = 2zt$ gehört $\omega = i$ zu. Dem anderen Endpunkte $x = 2t = 0$ gehört das Gebilde der Signatur $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$ zu. Es findet also Herabminderung des Geschlechtes auf $p = 0$ statt, und man hat $\omega = 0$ erreicht. Für die beiden hier vorliegenden linearen Kontinua bildet man sofort ein spezielles Fundamentaltheorem durch: Die in Rede stehende Seite des DB der Fig. 26 ist eineindeutig stetig auf die $\omega = i$ und $\omega = 0$ verbindende Seite des ω-Bereiches bezogen.

Wir beschreiben zweitens die der Kurve $x = y$ angehörende Seite vom Endpunkt $x = y$, $xy = 2zt$ zum anderen Endpunkt $x = y = z$. Ergänzen wir das Dreieck der Fig. 24 längs der Seite $e_1 e_2$ zum Parallelogramm, so korrespondieren die Gegenseiten durch V_a und V_b. Wegen $j_a = j_b$ hat man mit einem Rhombus zu tun, und da sich die Symmetrien desselben in der u-Ebene wiederfinden, so ist auch das Periodenparallelogramm ein Rhombus, und man findet, daß der Periodenquotient den absoluten Betrag 1 hat. Für $x = y = z$ ist das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ gleichseitig geworden (im parabolischen Falle ist C der Höhenschnittpunkt); hier stellt man leicht fest, daß $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ geworden ist. Indem man für die beiden jetzt vorliegenden Kontinua rhombischer Gebilde unsere Kontinuitätsbetrachtung durchführt, findet man die durch $x = y$ zu charakterisierende Seite auf die $\omega = i$ und $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ verbindende, dem Einheitskreise der ω-Ebene angehörende Seite des Doppeldreiecks eineindeutig stetig bezogen.

Man wird die so eingeleitete Betrachtung leicht weiterführen und demnächst wieder zu rhombischen Gebilden mit $x = z$ und also $j_a = j_c$ gehen usw. Haben wir längs der Seite $xz = 2yt$ die Spitze $x = 2t = 0$ wieder erreicht, so sind wir zum Gebilde $(0, 3; l_1, \infty, \infty)$ und damit

längs der vierten Seite des ω-Doppeldreiecks zu $\omega = 0$ zurückgekehrt. Wir merken als vorläufiges Resultat an: *Der Rand des DB der automorphen Modulgruppe auf der F_3 ist eineindeutig stetig auf den Rand des korrespondierenden ω-Doppeldreiecks bezogen; dem Rande des ersten DB haben wir dabei ein ringförmig geschlossenes Kontinuum von automorphen Gebilden zuordnen können, d. h. auch am Grenzpunkte $x = 2t = 0$ findet kontinuierlicher Zusammenschluß der Randgebilde statt.*

Hiermit ist der Boden geebnet, um eine Betrachtung durchzuführen genau analog derjenigen von pag. 465ff. Wir überdecken die Fläche des Doppeldreiecks der F_3 mit einem Systeme von geeignet gestalteten Kurven, wobei je zwei benachbarte Kurven einander so nahe gewählt werden können, als man will. Bei dem einfachen Charakter des fraglichen Bereiches hat die Ausführung dieser Vorschrift keine Schwierigkeit. Wir bilden sodann dieses Kurvensystem auf das Doppeldreieck der ω-Halbebene ab und diskutieren die Abbildung wie oben unter Benutzung des Stetigkeits- und des Unitätssatzes. Das Ergebnis ist, daß beide Bereiche eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind*). So vollenden wir auch im vorliegenden Falle den Beweis des Fundamentaltheorems: *Eine beliebig gegebene Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 1$ sei mit einem Punkte e signiert, dem eine ganze Zahl $l_1 > 1$ (∞ eingeschlossen) zugeordnet sei. Dann gibt es stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$ auf der Fläche, welche die zerschnittene Fläche auf ein Grenzkreispolygon unserer Art der Signatur $(1, 1; l_1)$ abbildet, in dem die feste Polygonecke der Stelle e der Fläche entspricht.* —

Gebilde der Signatur (1, 1).

Das Gruppenkontinuum des Charakters (1, 1) ist dreidimensional; wir stellten dasselbe oben (pag. 481) durch die Punkte eines Hexaeders dar, welches durch drei ebenda angegebene Ebenen, zwei F_2 und eine F_3 begrenzt war. Wir konnten das Hexaeder durch eine kontinuierliche Schar von Flächenstücken F_3 ausfüllen, bei deren Darstellung der „Parameter“ j_e von -2 bis $-\infty$ abzunehmen hat.

Es fragt sich jetzt zunächst, ob wir der Gesamtoberfläche des Hexaeders ein überall geschlossenes zweidimensionales Kontinuum von Grenzgebilden zuordnen können. Man betrachte erstlich eine einzelne der eben gemeinten F_3, welche als dem Hexaeder angehörig ein Doppeldreieck trägt. Auf letzteres können wir Schritt für Schritt die Betrachtung übertragen,

*) Wie aus der oben beschriebenen Zuordnung der Berandungen hervorgeht, handelt es sich hier um eine Abbildung, bei welcher der Drehungssinn der Winkel invertiert erscheint.

welche wir im vorigen Falle $(1, 1; l_1)$ für die entsprechenden Doppeldreiecke ausführten. Dem Rande des Doppeldreiecks gehört ein Kontinuum von Grenzgebilden zu, welches selbst im Grenzpunkte $x = 2t = 0$ geschlossen erscheint. An dieser Stelle haben wir mit dem Gebilde $(0, 3; \infty, \infty)$ der Invariante j_ε zu tun.

Ändern wir j_ε stetig, so reihen sich die gewonnenen Grenzgebilde stetig aneinander an. Das gewünschte Kontinuum der Grenzgebilde würde damit für die das Hexaeder berandende F_3, für die beiden F_2, sowie für zwei unter den Ebenen bereits gewonnen sein. Nur tritt, was man beachten wolle, die Besonderheit ein, daß dem Punkte $x = 0$, $y = z$, $t = 0$ bereits jetzt ein ganzes Kontinuum von Grenzgebilden zugehört, nämlich jene Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ mit alle in Betracht kommenden Werten j_ε. Wir scheiden die einzelne Gruppe aus, indem wir vorschreiben, längs welcher F_3 wir uns jener Stelle annähern. Alle diese F_3 berühren dabei die Ebene $x = 2t$.

Nähern wir uns jetzt einem Punkte der Ebene $t = 0$, der jedoch nicht der Kante $x = 0$, $t = 0$ angehören soll, so werden j_a, j_b, j_c gleichzeitig unendlich groß. In der ζ-Ebene können wir die DB unserer Gruppen, falls nicht $j_\varepsilon = -2$ zutrifft, stets in die durch Fig. 31 dargestellte Gestalt setzen. Den Grenzübergang

$$\lim j_a = \infty,$$
$$\lim j_b = \infty$$

kann man dann so einrichten, daß gleichzeitig alle vier Randkreise dieses DB sich auf Punkte zusammenziehen. Der bezeichnete Grenzübergang zu einem Punkte der Ebene $t = 0$ führt zu einem nicht zerfallenden Grenzgebilde, dem die denkbar einfachste, nämlich nur aus der Identität 1 bestehende, Gruppe zugrunde liegt.

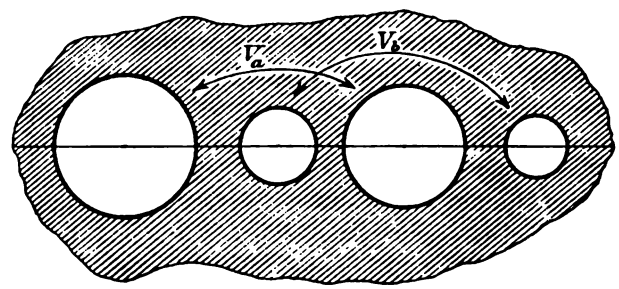


Fig. 31.

Wir haben jetzt allerdings allen Randpunkten des Hexaeders Grenzgebilde zugeordnet; indessen zeigt sich, daß längs der Kante $x = 0$, $t = 0$ des Hexaeders keine Kontinuität stattfindet. Zur näheren Untersuchung der hier eintretenden Verhältnisse greifen wir zunächst einen Punkt y_0, z_0 im „Innern" derjenigen Hälfte der fraglichen Kante auf, welche durch $y_0 < z_0$ charakterisiert ist. Dann gilt:

$$\frac{2z_0}{y_0} = j_a^{(0)} > 2.$$

Für die Annäherung an den in Rede stehenden Punkt schreiben wir nun die geradlinige Bahn:

$$x = j_a^{(0)} \cdot t, \qquad y \cdot j_a^{(0)} = 2z$$

vor, welche die Gleichung $xy = 2zt$ befriedigt und also derjenigen das Hexaeder berandenden F_2 angehört, welche mit der Ebene $t = 0$ die vorhin gewählte Hälfte der Kante $x = 0$, $t = 0$ gemein hat. Längs jener geradlinigen Bahn ist nun $\frac{x}{t} = j_a$ konstant gleich $j_a^{(0)}$, und man hat insgesamt:

$$j_d = j_a^{(0)}, \quad j_b = \frac{2}{t}, \quad j_c = \frac{j_a^{(0)}}{t}.$$

Beim Grenzübergang zum Kantenpunkte selbst wird $\lim t = 0$, also hat man bei konstantem $j_a = j_a^{(0)}$, $\lim j_b = \infty$. Als Grenzgebilde entspricht (cf. Fig. 31) die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante $j_a^{(0)}$. Nähert man sich dem gleichen Kantenpunkte in der Ebene $t = 0$ an, so kommt, wie oben gezeigt wurde, das Grenzgebilde, dessen Gruppe aus der Identität allein besteht.

Um nun die Kontinuität zwischen diesen beiden Grenzfällen herzustellen, haben wir zwischen den beiden Richtungen, welche eben benutzt wurden, etwa in der Ebene $y \cdot j_a^{(0)} = 2z$ die gesamten, dem Hexaeder angehörenden Annäherungsrichtungen an den markierten Kantenpunkt einzuschalten. Um die einzelne dieser Richtungen auszuzeichnen, setzen wir j_a gleich irgend einem positiven Werte $\geqq j_a^{(0)}$ und beschreiben die Gerade:

$$x = j_a \cdot t, \qquad y \cdot j_a^{(0)} = 2z.$$

Nun entspringt die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante j_a. Vermöge der Grenzübergänge $\lim j_a = j_a^{(0)}$ und $\lim j_a = \infty$ stellen wir nun in der Tat den kontinuierlichen Zusammenhang zwischen den beiden oben gewonnenen Grenzfällen her.

Für die Hexaederecke $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ findet man gleichfalls volle Kontinuität der Grenzgebilde. Hier tangiert nämlich die durch $xy = 2zt$ gegebene Seitenfläche des Hexaeders die Ebene $t = 0$. Jede Annäherung an diese Ecke liefert somit als Grenzgebilde die aus der Identität allein bestehende Gruppe.

Für die andere Hälfte der Kante $x = 0$, $t = 0$, für welche $y > z$ zutrifft, sowie für die Ecke $x = 0$, $t = 0$, $z = 0$ gelten analoge Ausführungen. Eine besondere Bemerkung erfordert nun noch der Punkt $x = 0$, $y = z$, $t = 0$. Nähern wir uns diesem Punkte etwa in der Ebene $y = z$ in einer Bahn an, bei welcher

$$\lim \frac{x}{t} = j_a > 2$$

ist, so durchschreiten wir sämtliche F_3, mit denen wir das Hexader aus-

füllten, und gewinnen die zyklische hyperbolische Gruppe der Invariante j_a. Die Invariante j_e ist für diese Gruppen durchweg gleich $-\infty$. Bei denjenigen Bahnen nach dem fraglichen Punkte, welche tangential zur Ebene $x = 2t$ einmünden, hat man noch weiter zu unterscheiden, in welcher F_3 sie verlaufen, oder (was auf dasselbe hinausläuft) welches der Grenzwert des Krümmungsradius ist. Dem hier in Betracht kommenden linearen Kontinuum dieser Grenzwerte entsprechen die oben schon genannten Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$, an welche sich für $\lim j_e = -\infty$ die an der fraglichen Stelle schon gefundenen zyklischen hyperbolischen Gruppen ohne Unterbrechung der Kontinuität anschließen.

Indem wir zusammenfassen, haben wir folgendes Ergebnis auszusprechen: *Der Oberfläche des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe haben wir ein überall geschlossenes Kontinuum von Grenzgebilden zugeordnet, wobei im allgemeinen dem einzelnen Punkte der Oberfläche auch nur ein Gebilde zugehört. Nur entspricht dem einzelnen Punkte der Kante $x = 0$, $t = 0$ stets ein ganzes Kontinuum von einfach unendlich vielen Gebilden, abgesehen von den beiden Ecken $y = 0$ und $z = 0$. Das einzelne Gebilde jedes solchen Kontinuums bestimmt man durch die Schlußrichtung der nach jenem Kantenpunkte zurückgelegten Bahn, bezw. bei den an dem Punkte $x = 0$, $y = z$, $t = 0$ tangential gegen die Ebene $x = 2t$ einmündenden Bahnen durch den Schlußwert des Krümmungsradius.*

Die Gruppen des betrachteten Kontinuums liefern algebraische Gebilde des Geschlechtes $p = 2$, die orthosymmetrisch sind. Zur Gewinnung einer zweiwertigen Funktion $z = \varphi(\zeta)$ erweitere man im Einzelfalle die Gruppe, wie oben ausführlich beschrieben wurde, zu einer Gruppe der Signatur $(0, 3; 2, 2, 2)$, indem man aus dem Normalsechseck das Dreieck $e_1 e_2 e_3$ ausschneidet und die Seitenmitten e_1', e_2', e_3' zu Fixpunkten elliptischer Substitutionen $V_{e_1'}, V_{e_2'}, V_{e_3'}$ der Periode 2 macht. In ihnen stellen sich dann die Erzeugenden der ursprünglichen Gruppe wie folgt dar:

$$V_a = V_{e_2'} \cdot V_{e_3'}, \quad V_b = V_{e_3'} \cdot V_{e_1'},$$
$$V_c = V_{e_1'} \cdot V_{e_2'}.$$

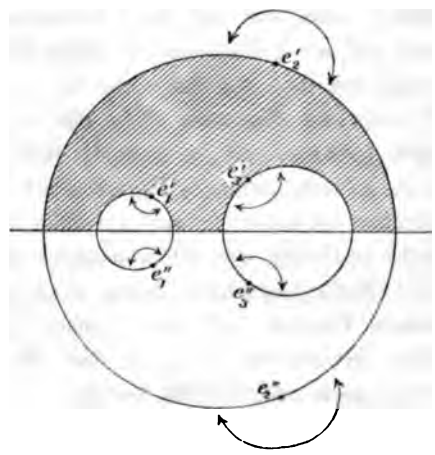


Fig. 32.

Bei Fortgang zur ζ-Ebene gehen die hyperbolischen Ecken e_1, e_2, e_3 des Dreiecks verloren. Der DB der Gruppe von der Signatur $(0, 3; 2, 2, 2)$ hat die in Fig. 32 dargestellte Gestalt. Die Hauptfunktion $z = \varphi(\zeta)$ können

wir so einführen, daß sie den schraffierten Teil des eben angegebenen DB auf die positive z-Halbebene abbildet, den freien Teil auf die negative Halbebene. Die den Fixpunkten $e_1', \cdots, e_3''$ entsprechenden Stellen s mögen die gleichen Bezeichnungen tragen. Um alsdann zu dem algebraischen Gebilde zu gelangen, das der ursprünglichen Gruppe zugehört, haben wir die z-Ebene doppelt zu überdecken und an den paarweise einander bezüglich der reellen z-Achse symmetrisch liegenden Punkten e_1', e_1'', e_2', e_2'', e_3', e_3'' Verzweigungen beider Blätter anzubringen.

Das gewonnene algebraische Gebilde können wir offenbar durch das der positiven z-Halbebene angehörende Tripel der Punkte e_1', e_2', e_3' vollständig und eindeutig charakterisieren. Man beachte andrerseits, daß die Auswahl von s noch die Willkür offen läßt, daß wir durch eine beliebige reelle Substitution:

$$s' = \frac{as+b}{cs+d} \quad \text{mit} \quad ad - bc > 0$$

transformieren dürfen. Alle Punktetripel, welche aus e_1', e_2', e_3' durch solche Transformationen hervorgehen, stellen ein und dasselbe Gebilde dar und sollen demnach als nicht wesentlich verschieden gelten.

Um jetzt zum Kontinuum algebraischer Gebilde, welches unserem Gruppenkontinuum gegenübersteht, zu gelangen, müssen wir alle im angegebenen Sinne wesentlich verschiedenen Punktetripel zusammenfassen. Zur invarianten Darstellung des Kontinuums eignen sich hier Doppelverhältnisse nicht recht: vielmehr dienen wir den vorliegenden Zwecken mehr, *wenn wir auf die z-Halbebene dieselbe hyperbolische Maßbestimmung wie auf die ζ-Halbebene beziehen, das Kreisbogendreieck der Ecken e_1', e_2', e_3' einführen und auf dieses die in A. F. I, pag. 348ff. entwickelte invariante Darstellung anwenden.* Von den a. a. O. angegebenen Bedingungen kommt hier natürlich die in Fortfall, daß die Winkel des Dreiecks aliquote Teile von π sein sollen. Die Winkel können hier vielmehr irgend welche Größen zwischen 0 und π haben, die Grenzen selbst eingeschlossen; nur muß natürlich die Winkelsumme $\leqq \pi$ sein.

Nach Vorschrift der a. a. O. gegebenen Regeln stellen wir nunmehr unser Dreieck und damit unser Kontinuum algebraischer Gebilde durch drei Invarianten j_1, j_2, j_3 dar, für welche wir zuvörderst folgende Bedingungen anzumerken haben:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 \geqq 4,$$
$$-2 \leqq j_1 \leqq +2, \quad -2 \leqq j_2 \leqq +2, \quad -2 \leqq j_3 \leqq +2.$$

Um ein anschauliches Bild des fraglichen Kontinuums zu gewinnen, deuten wir die j_1, j_2, j_3 als rechtwinklige Koordinaten und untersuchen den durch

die vorstehenden Ungleichungen charakterisierten Bereich. Letzterer ist das durch Fig. 33 dargestellte Tetraeder, welches von drei ebenen, geradlinig begrenzten Dreiecken und einem Stück der durch:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 = 4$$

dargestellte F_3 eingeschlossen wird. Dieses Tetraeder hat die drei Ebenen $j_2 = j_3$, $j_3 = j_1$, $j_1 = j_2$ zu Symmetrieebenen und geht in sich selbst über, wenn man es um die Achse $j_1 = j_2 = j_3$ durch den Winkel $\frac{2\pi}{3}$ dreht. Je drei hierbei ineinander übergehende Punkte stellen dasselbe algebraische Gebilde dar. Wir kommen hier zu analogen Verhältnissen, wie oben bei der Darstellung des Gruppenkontinuums. Um jedes algebraische Gebilde nur einmal darzustellen, müssen wir uns auf ein Drittel des Tetraeders beschränken. Die nähere Untersuchung zeigt, daß den oben getroffenen Festsetzungen $j_a \leqq j_b$, $j_a \leqq j_c$ die folgende Forderung parallel geht:

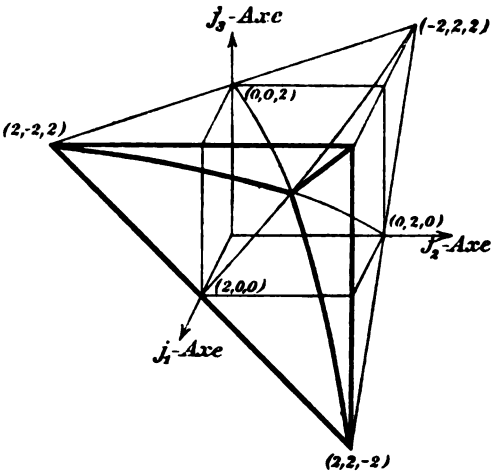


Fig. 33.

$$j_1 \geqq j_2, \quad j_1 \geqq j_3.$$

Das entsprechende Drittel des Tetraeders ist dasjenige kleinere Tetraeder, dessen Kanten in Fig. 33 stark markiert sind.

Bei der Untersuchung der Beziehung dieses Tetraeders auf den DB der automorphen Modulgruppe stellen sich nun Umständlichkeiten ein, die man am besten dadurch überwindet, daß man den Raum der j_1, j_2, j_3 vorab einer bestimmten Transformation unterwirft. Letztere ist den Rechnungen entnommen, welche sich beim Studium der fraglichen Beziehung darboten; sie ist gegeben durch:

$$u = \frac{2j_2 + 2j_3}{j_2 j_3 + 4}, \quad v = \frac{2j_3 + 2j_1}{j_3 j_1 + 4}, \quad w = \frac{2j_1 + 2j_2}{j_1 j_2 + 4}.$$

Deuten wir auch die u, v, w als rechtwinklige Koordinaten, so handelt es sich, wie man leicht erkennt, hier um eine 1-2-deutige Beziehung beider Räume aufeinander; und zwar entsprechen dem einzelnen Punkte (u, v, w) immer zwei Punkte (j_1, j_2, j_3) und $\left(\frac{4}{j_1}, \frac{4}{j_2}, \frac{4}{j_3}\right)$.

Die Funktionaldeterminante der $w(j_1, j_2, j_3, \cdots)$ ist, abgesehen von einem numerischen Faktor:

$$\frac{4-j_1^2}{j_2 j_3 - 4^2}\,\frac{4-j_2^2}{j_3 j_1 - 4^2}\,\frac{4-j_3^2}{j_1 j_2 - 4^2}.$$

Dieselbe verschwindet längs der drei ebenen Seitenflächen des Tetraeders. Letztere, ebenso wie die Tetraederecken, erfordern demnach eine besondere Untersuchung. Dem „Innern" des Tetraeders kann von zwei Punkten (j_1, j_2, j_3), $\left(\frac{4}{j_1}, \frac{4}{j_2}, \frac{4}{j_3}\right)$ höchstens einer angehören. Für das „Innere" des Tetraeders und den entsprechenden Bereich im Raume der u, v, w ist somit die angegebene Beziehung eine umkehrbar eindeutige.

Wir wenden uns zur Untersuchung der ebenen Seitenflächen des Tetraeders und betrachten als Beispiel $j_3 = 2$: die Fläche besteht aus dem in Fig. 34 stark umrandeten Dreieck. Für $j_3 = 2$ findet man nun $u = v = 1$, so daß sich alle Punkte der Dreiecksfläche auf die Gerade $u = v = 1$ übertragen. Des näheren hat man:

$$w(j_1 j_2 - 4) = 2j_1 + 2j_2.$$

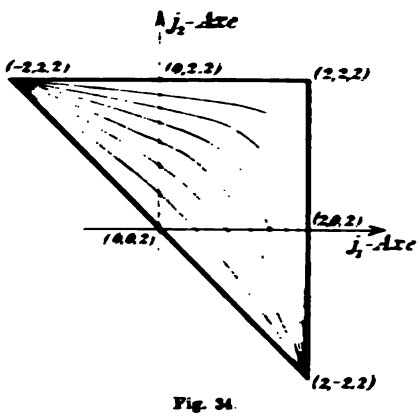


Fig. 34.

Faßt man hier w als Parameter, der alle Werte von 0 bis 1 durchlaufen soll, und deutet j_1, j_2 als Koordinaten in der Ebene $j_3 = 2$, so gewinnt man eine Schar von Hyperbeln, welche die Fläche des Dreiecks in der in Fig. 34 skizzierten Art bedecken. Die Punkte des einzelnen solchen Hyperbelstücks ziehen sich vermöge unserer Transformation auf den einen Punkt $u = v = 1$, w zusammen, wo w der zugehörige Wert des Parameters ist. Die ganze Dreiecksfläche bildet sich solchergestalt auf das von $w = 0$ bis $w = 1$ reichende Stück der Geraden $u = v = 1$ ab; die Hypotenuse des Dreiecks liefert den Punkt $w = 0$, die beiden Katheten ziehen sich auf den Punkt $w = 1$ zusammen.

Ganz analoge Bemerkungen gelten natürlich von den beiden anderen ebenen Seitenflächen des j-Tetraeders.

Man nähere sich jetzt der Ecke $(2, 2, -2)$ des Tetraeders an. Hier ist $w = 1$, während u und v stetig vieldeutig werden. Um die Art dieser Vieldeutigkeit darzulegen, denken wir von der fraglichen Ecke aus Wegdifferentiale beschrieben und untersuchen die Grenzwerte u, v, welche dem einzelnen Wegdifferentiale entsprechen. Zuerst untersuchen

wir die Differentiale, welche den drei aus der fraglichen Ecke zusammenlaufenden Seitenflächen des Tetraeders angehören. Wir beginnen mit der Ebene $j_2 = 2$, reihen daran $j_1 = 2$ und dann die F_3; d. h. wir durchlaufen die Differentiale, wie es die drei Pfeile der Fig. 35 vorschreiben.

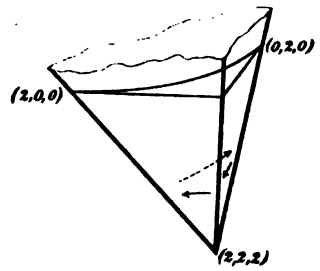


Fig. 35.

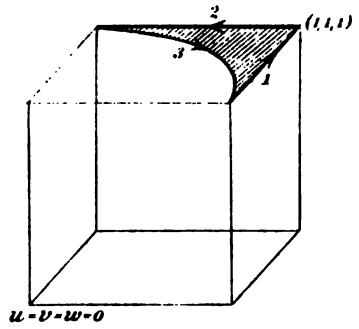


Fig. 36.

Diesen drei Scharen von Wegdifferentialen entsprechen in der Ebene $w = 1$ die drei in Fig. 36 mit den Nummern 1, 2 und 3 versehenen Linien, und die zugefügten Pfeile entsprechen denen in Fig. 35. Das Auftreten der beiden mit 1 und 2 bezeichneten Geraden ist aus den bisherigen Entwicklungen bereits evident. Die Linie 3, welche den auf der F_3:

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 - 4 = 0$$

gelegenen Differentialen entspricht, ist ein Stück einer gewissen Kurve vierter Ordnung C_4. Wenn wir nämlich die Koordinaten der Endpunkte jener Differentiale $2 + dj_1$, $2 + dj_2$, $-2 + dj_3$ nennen, so folgt aus der Gleichung der F_3, welche in der fraglichen Ecke einen Knotenpunkt aufweist, nach leichter Rechnung:

$$(dj_1 + dj_2 + dj_3)^2 - 4 dj_1 \cdot dj_2 = 0.$$

Nun entspricht dem Punkte $(2 + dj_1,\ 2 + dj_2,\ -2 + dj_3)$ im Raume der u, v, w der Punkt:

$$u = \frac{dj_3 + dj_2}{dj_3 - dj_2}, \quad v = \frac{dj_3 + dj_1}{dj_3 - dj_1}, \quad w = 1,$$

woraus sich umgekehrt ergibt:

$$dj_1 : dj_2 : dj_3 = (u+1)(v-1) : (u-1)(v+1) : (u+1)(v+1).$$

Die Eintragung dieser Werte in die zwischen den Differentialen bestehende Relation ergibt als Gleichung der C_4:

$$5u^2v^2 + 6uv(u+v) + 5(u^2+v^2) - 4uv - 2u - 2v - 3 = 0.$$

Die hierdurch dargestellte Kurve verläuft ganz im Bereiche

$$-1 \leqq u \leqq +1, \quad -1 \leqq v \leqq +1$$

und hat die in Fig. 37 dargestellte Gestalt. Der stärker ausgezogene Teil der Kurve kommt bei der Abbildung unserer Tetraederecke zur Benutzung. Indem man sich der in Rede stehenden Ecke jetzt in allen Richtungen vom Tetraeder aus annähert, findet man als Abbild der Ecke den in Fig. 36 schraffierten der Ebene $w = 1$ angehörigen dreieckigen Bereich.

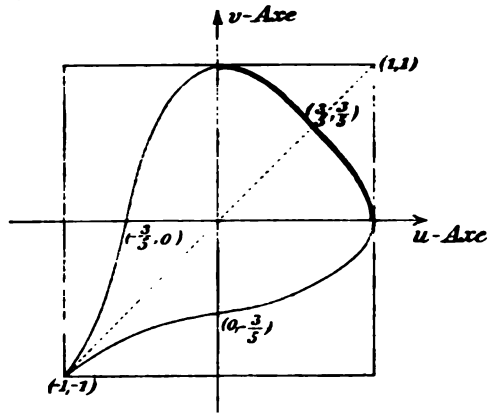


Fig. 37.

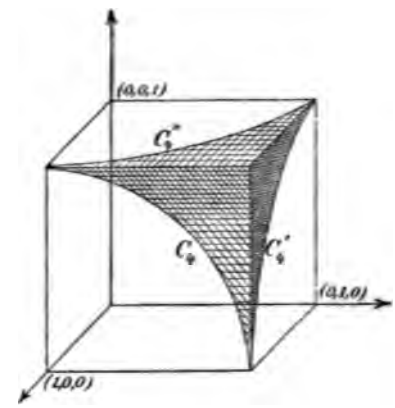


Fig. 38.

Für die beiden Ecken $(2, -2, 2)$ und $(-2, 2, 2)$ kommt man selbstverständlich zu ganz analogen Ergebnissen. Die Abbilder der drei Ecken sind in Fig. 38 zusammengestellt; es handelt sich um die drei, in den Ebenen $u = 1$, $v = 1$, $w = 1$ gelegenen schraffierten dreieckigen Bereiche, welche von je zwei Geraden und je einer Kurve vierter Ordnung begrenzt sind. Die oben in der Ebene $w = 1$ speziell betrachtete Kurve ist in der Figur durch C_4'' bezeichnet.

Es restiert die Abbildung des Flächenstückes dritter Ordnung, welches das j-Tetraeder, neben den vier ebenen Dreiecken, berandet. Die Gleichung des Abbildes im Raume der u, v, w gewinnt man durch Elimination von j_1, j_2, j_3 aus den vier Gleichungen:

$$u = \frac{2j_2 + 2j_3}{j_2 j_3 + 4}, \quad v = \frac{2j_3 + 2j_1}{j_3 j_1 + 4}, \quad w = \frac{2j_1 + 2j_2}{j_1 j_2 + 4},$$

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 - 4 = 0.$$

Die etwas umständliche Rechnung liefert als Resultat:

$$\{(uvw - u - v - w)^2 + 2(u+1)(v+1)(w+1)(uv + uw + vw - 1) - 4(uv + uw + vw) - 8uvw\}^2 = 4\{(u+1)(v+1)(w+1)\}^3 \cdot (1-u)(1-v)(1-w).$$

Für $w = 1$ wird die rechte Seite dieser Gleichung 0, die linke aber liefert das Quadrat der linken Seite der oben für die C_4'' ausgerechneten Gleichung. Die im Raume der u, v, w gewonnene F_{12} berührt die drei Ebenen $u = 1$, $v = 1$, $w = 1$ längs der Kurven C_4, C_4', C_4''. Ein in diese drei Kurven eingespanntes Stück der F_{12} gewinnen wir als gesuchtes Abbild des Flächenstücks F_3.

Endlich beachte man noch, daß die Symmetrieebenen $j_1 = j_2$, $j_2 = j_3$, $j_3 = j_1$ sich bezw. übertragen auf die Ebenen $u = v$, $v = w$, $w = u$, welche gleichfalls den Charakter von Symmetrieebenen bekommen. Auch überlege man noch, wie sich die vorhin schon besprochene Ungleichung $j_1 \geqq j_2$, $j_1 \geqq j_3$ auf die u, v, w überträgt. Wir finden als Schlußergebnis:

Das j-Tetraeder überträgt sich auf ein Tetraeder im Raume der u, v, w; und zwar liefert die Seite F_3 des ersten Tetraeders die Seite F_{12} des zweiten, die Ecken $(2, 2, -2)$, $(2, -2, 2)$ *und* $(-2, 2, 2)$ *des j-Tetraeders gehen in die drei ebenen Seitenflächen des neuen Tetraeders über, die drei ebenen Seitenflächen des j-Tetraeders ergeben die drei geradlinigen Kanten des zweiten Tetraeders, endlich ziehen sich die drei in der Ecke* $(2, 2, 2)$ *zusammenlaufenden Kanten auf die Ecke* $u = v = w = 1$ *zusammen.* Für die Darstellung unseres Kontinuums algebraischer Gebilde aber gilt: *Wir stellen das fragliche Kontinuum gerade erschöpfend dar, indem wir aus dem gewonnenen Bereiche dasjenige, ein Pentaeder bildende, Drittel aussondern, welches den Ungleichungen* $u \leqq v$, $u \leqq w$ *entspricht.*

Wir haben nunmehr die Abbildung des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe auf das eben zuletzt gewonnene, den Ungleichungen $u \leqq v$, $u \leqq w$ entsprechende Pentaeder näher zu untersuchen und beginnen in üblicher Weise mit der Betrachtung der Oberflächen beider Bereiche.

In dieser Hinsicht konstatieren wir zunächst, daß die Seitenfläche F_3 des Hexaeders auf die F_{12} des Pentaeders eineindeutig stetig bezogen ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem oben bereits bewiesenen Fundamentaltheoreme für die Gebilde der Signatur $(1, 1; \infty)$. Zu bemerken ist hierbei nur, daß das Kreisbogendreieck $e_1' e_2' e_3'$ der positiven z-Halbebene, welches uns die Grundlage für die invariante Darstellung des Kontinuums der algebraischen Gebilde abgab, bei der oben vorgeschriebenen Auswahl der Hauptfunktion z gegenwärtig unendlich klein wird. Damit das Dreieck endlich ausgedehnt bleibt, hat man die reelle ξ-Achse auf die Peripherie eines Kreises der z-Ebene mit *endlichem* Radius abzubilden und muß alsdann diesen Kreis beim Übergange zum parabolischen Grenzfalle auf einen Punkt zusammenziehen.

Man nähere sich jetzt einem Punkte der Seitenfläche $t = 0$ des Hexaeders an, und zwar tangential zu dieser Fläche, falls es sich um einen Kantenpunkt $x = 0$, $t = 0$ handeln sollte. Hier wird $\lim j_a = \infty$, $\lim j_b = \infty$.

Wählten wir somit den DB der Gruppe als Parallelogramm des Zentrums e_3', so werden im Grenzfalle die Punkte e_1', e_2' an zwei getrennte Stellen der Ellipse rücken. Da die Gruppe T schließlich nur noch aus der Identität besteht, so wird im Grenzfalle die ζ-Ebene mit der z-Ebene identisch sein, und also folgt $j_1 = 2$, $j_2 = 2$, d. h. wir gelangen zu einem Kantenpunkt des j-Tetraeders, der einer der drei von der Ecke $(2, 2, 2)$ ausziehenden Kanten angehört. Aber beim Übergange zum Raume der u, v, w ziehen sich diese Kanten auf die Ecke $u = v = w = 1$ zusammen. Die Folge ist, daß sich bei der Abbildung des Hexaeders auf das Pentaeder die Seitenfläche $t = 0$ des ersteren auf den Eckpunkt $u = v = w = 1$ des letzteren zusammenzieht.

Wir haben nun am Hexaeder noch vier weitere Seitenflächen, nämlich zwei Dreiecke, welche auf den F_2:

$$xy - 2zt = 0, \qquad zx - 2yt = 0$$

gelegen sind, und zwei Vierecke, den Ebenen $x = y$, $z = x$ angehörig. Die beiden ersten Flächen stehen koordiniert, und was von der einen gilt, überträgt sich sofort auf die andere; in demselben Sinne sind die beiden letzten Flächen koordiniert. Wir brauchen demnach von jedem Paare nur eine Fläche in Betracht zu ziehen.

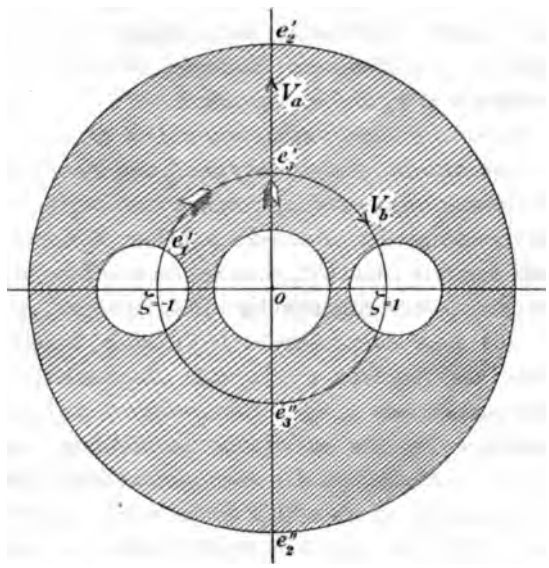


Fig. 39.

Gehen wir erstlich zum Dreieck der Fläche

$$xy - 2zt = 0,$$

so haben wir mit den DB der in Fig. 39 angegebenen symmetrischen Gestalt zu tun. Bei der Abbildung auf die z-Ebene werden die Punkte e_1', e_2', e_3' auf einen zur reellen z-Achse orthogonalen Halbkreis rücken, und zwar liegt auf diesem Halbkreise e_3' zwischen e_1' und e_2'. Wir haben somit $j_1 = 2$, $j_2 = 2$, $j_3 = -2$ und gelangen im Raume der u, v, w zur Seitenfläche $w = 1$ des Pentaeders, welche die Gestalt eines ebenen Dreiecks besitzt.

Man muß nun für die beiden solchergestalt in Korrespondenz gesetzten

dreieckigen Flächen ein besonderes Fundamentaltheorem aufstellen, was in der üblichen Weise geschieht. Eine erste Seite hat das Hexaederdreieck mit der F_3 der parabolischen Gebilde gemein. Diese Seite ist, wie wir bereits wissen, stetig eindeutig auf die von der C_4'' gelieferten Seite des anderen Dreiecks bezogen. Als zweite Seite ersteren Dreiecks reihen wir hieran die durch $x = y$ gegebene. Hier haben wir $j_a = j_b$, so daß der DB der Fig. 39 als neue Symmetriekreise diejenigen gewinnt, welche die imaginäre ξ-Achse bei $\xi = \pm i$, d. h. an den Stellen e_3', e_3'', unter 45^0 schneiden. Da die neue Symmetrie bei Abbildung auf die z-Ebene erhalten bleibt, so werden in der z-Halbebene die Abstände $e_1' e_3'$ und $e_2' e_3'$ im Sinne der projektiven Maßbestimmung einander gleich. Wir gelangen somit zur Geraden $u = v$, d. i. zur zweiten Seite des Dreiecks in der Ebene $w = 1$. Für $\lim t = 0$ werden wir dabei notwendig zur Ecke $u = v = 1$ geführt; wir finden daraufhin in üblicher Schlußweise, daß die beiden in Rede stehenden Seiten eineindeutig stetig aufeinander bezogen sind.

Etwas mehr Umstände verursacht das letzte Seitenpaar unserer beiden Dreiecke. Nähern wir uns auf dem Hexaederdreieck der Seite $x = 0$, so gewinnen wir zyklische hyperbolische Gruppen der Invariante j_a; und zwar sind die Werte $j_a = 2$ bis $j_a = +\infty$ stetig auf die Punkte jener Seite vom Endpunkt $y = z$ beginnend bis zum andern Endpunkte bezogen. Diese zyklischen hyperbolischen Gruppen führen nun in der z-Halbebene auf Dreiecke, bei denen, wie Fig. 40 zeigt, der Punkt e_1' auf die reelle Achse rückt. Verschiebt man e_1' bei festgehaltenen Punkten e_2', e_3' längs des Segmentes $a\,b$ der reellen z-Achse etwa im Sinne des Pfeiles, so bleibt erstlich das algebraische Gebilde unverändert; andrerseits beschreibt hierbei, wie die nähere Untersuchung zeigt, der Punkt (j_1, j_2, j_3) in dem das j-Tetraeder begrenzende Dreieck $j_1 = 2$ ein bestimmtes unter den in Fig. 34 dargestellten Hyperbelstücken von der Ecke $(2, -2, 2)$ zur Ecke $(2, 2, -2)$. Der Parameter dieser Hyperbelschar ist u, und es sind (Fundamentaltheorem der zyklischen hyperbolischen Gruppen) die hier in Betracht kommenden Parameterwerte von $u = 0$ bis $u = 1$ stetig eindeutig auf die Werte $j_a = 2$ bis $j_a = \infty$ bezogen. Für unsere in Betracht kommende Seite $xy - 2zt = 0$ des Hexaeders liegt nun in Fig. 40 der Punkt e_1' allemal an der Stelle b, d. h. es handelt sich, den unterschiedenen Werten j_a entsprechend, um die in der Seitenfläche $j_1 = 2$ des j-Tetraeders an der Ecke $(2, 2, -2)$

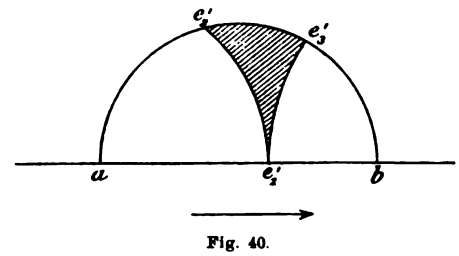


Fig. 40.

errichteten Wegdifferentiale. Letztere aber bezogen wir oben bereits auf die Punkte der durch $v = 1$, $w = 1$ gegebenen Kante des Tetraeders der Fig. 38.

Hiernach sind in der Tat die beiden noch fehlenden Seiten unserer beiden dreieckigen Bereiche eineindeutig stetig einander zugeordnet, und wir beweisen in üblicher Weise die gleiche Art der Beziehung für diese gesamten Bereiche.

In ganz analoger Art zeigt man, daß sich die auf der Fläche zweiten Grades $zx - 2yt = 0$ gelegene Seitenfläche des Hexaeders eineindeutig stetig auf diejenige dreieckige Seitenfläche des Pentaeders überträgt, welche der Ebene $v = 1$ angehört.

Es restieren endlich noch die beiden viereckigen Grenzflächen des Hexaeders, welche in den Ebenen $x = y$ bezw. $z = x$ gelegen sind. Beginnen wir mit der ersteren Fläche, so zieht sich die der Ebene $t = 0$ angehörende Seite im Raume der u, v, w, wie wir bereits wissen, auf den Eckpunkt $u = v = w = 1$ des Pentaeders zusammen. Auch das Abbild der durch $xy - 2zt = 0$, $x - y = 0$ dargestellten zweiten Seite haben wir schon aufgefunden; es ist die Gerade $u = v$, $w = 1$ in ihrem Verlauf von der Ecke $u = v = 1$ bis zur Kurve C_4''. Endlich ergibt sich als Abbild der durch $x = y$ auf der F_3 ausgeschnittenen Seite des Vierecks die entsprechend durch $u = v$ auf der F_{12} ausgeschnittene Kurve, und zwar von der C_4'' aus bis zum Punkte $u = v = w$ der F_{12}. Dies folgt aus der oben bereits festgestellten Beziehung der F_3 auf die F_{12}.

Neu festzustellen ist hier nur das Abbild der Seite $x = y = z$. Es ist von vornherein selbstverständlich, daß sich dieselbe auf die Gerade $u = v = w$ überträgt; und es hat keine Schwierigkeit, für die hier in Betracht kommenden linearen Kontinua ein spezielles Fundamentaltheorem zu beweisen. Dem einen Endpunkte der Seite $x = y = z$, welche der F_3 angehört, entspricht der auf der F_{12} gelegene Endpunkt der Seite $u = v = w$; der andere, auf $t = 0$ gelegene, Endpunkt liefert den Endpunkt $u = v = w = 1$.

Da sich allgemein die Symmetrieen von der ζ-Ebene auf die z-Ebene übertragen, so folgt aus $x = y$ notwendig $u = v$. Das unser Hexaeder begrenzende, in die vier besprochenen Seiten eingespannte ebene Viereck wird somit sein Abbild in der Ebene $u = v$ finden. Auf Grund der schon gewonnenen Feststellungen erhalten wir durch übliche Fortsetzung der Kontinuitätsbetrachtung als Abbild jenes Vierecks ein der Ebene $u = v$ angehörendes Dreieck, das in die Seiten $w = 1$, $u = v = w$ und in eine dritte auf der F_{12} gelegene Seite eingespannt ist.

Die viereckige der Ebene $z = x$ angehörige Grenzfläche des Hexaeders überträgt sich entsprechend auf das in der Ebene $w = u$ gelegene Dreieck, welches das Pentaeder begrenzt.

Gehen wir jetzt auf das überall geschlossene Kontinuum der Grenzgebilde zurück, das wir oben den gesamten Oberflächenpunkten des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe zugeordnet fanden, so bleibt nur noch eine Bemerkung übrig betreffs derjenigen Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ sowie derjenigen zyklischen hyperbolischen Gruppen, welche wir bei Annäherung an die Kante $x = 0$, $t = 0$ aus dem Innern des DB antrafen. Nun liefern die Gruppen $(0, 3; \infty, \infty)$ algebraische Gebilde mit $p = 0$; sie gehen aus den Riemannschen Flächen des Geschlechtes $p = 1$ hervor, wenn zwei Verzweigungspunkte zusammenrücken und eine Trennung der beiden Blätter an der Koinzidenzstelle eintritt, wobei dann die beiden Narben den parabolischen Spitzen des Polygons entsprechen. In unserem Falle werden die beiden Punkte e_2', e_3' koinzidieren, so daß wir $j_1 = 2$, $j_2 = -j_3$ gewinnen. Wir gelangen somit zu der durch diese Gleichungen dargestellten Kante des j-Tetraeders und damit zur Ecke $u = 0$, $v = 1$, $w = 1$ im Raume der u, v, w. Daß andrerseits die hyperbolischen zyklischen Gruppen im letzteren Raume ihren Ort auf der Kante $v = 1$, $w = 1$ fanden, stellten wir bereits fest.

Indem wir die Ergebnisse zusammenfassen, haben wir folgenden Satz gewonnen: *Das überall geschlossene Kontinuum der Grenzgebilde, welches wir der Oberfläche des hexaedrischen DB der automorphen Modulgruppe bei der Signatur* $(1, 1)$ *zugeordnet fanden, überträgt diese Oberfläche stetig auf die rings geschlossene Oberfläche des im Raume der u, v, w eingegrenzten pentaedrischen Bereiches.*

Hiermit ist der Grund für die Durchführung der schließlichen Kontinuitätsbetrachtung gelegt. Wir erfüllen das Hexaeder durch eine Schar ausreichend nahe zueinander verlaufender Flächen und untersuchen auf Grund des Stetigkeits- und des Unitätssatzes deren Abbildung auf das Pentaederinnere. Es ergibt sich, daß das Hexaederinnere eineindeutig stetig auf das Innere des Pentaeders bezogen ist: *Auf jeder Riemannschen zweiblättrigen Fläche mit sechs zur reellen Achse paarweise symmetrischen Verzweigungspunkten existiert eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$, welche die zerschnittene Fläche auf ein orthosymmetrisches Hauptkreispolygon vom Charakter* $(1, 1)$ *abbildet.* —

IV. Die Grenzkreisgebilde des Charakters $p = 0$, $n = 4$.

Unter den Gebilden des Charakters $(0, 4)$ sollen hier nur diejenigen mit Grenzkreis betrachtet werden. Ein paar Angaben über die hierbei eintretenden Erzeugenden der automorphen Modulgruppe sind in A. F. I, pag. 395 gemacht. Wir werden die fraglichen Formeln unten auf einem neuen Wege wieder finden.

DB der automorphen Modulgruppe bei $p = 0$, $n = 4$.

Die gesamte Gattung der Grenzkreisgebilde vom Charakter (0, 4) zerfällt in unendlich viele Familien, deren einzelne durch ihre Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ eindeutig bestimmt ist. Signaturen, die sich nur durch die Reihenfolge der Zahlen l unterscheiden, liefern ein und dieselbe Familie. Die einzelne Familie bildet ein zweidimensionales Kontinuum automorpher Gebilde. Zur invarianten Darstellung dienen die Moduln:

$$j_1, j_2, j_3, j_4, \quad j_{12} = j_{34}, \quad j_{23} = j_{41}, \quad j_{13}, j_{24}.$$

Von diesen Moduln haben die ersten vier bei dem einzelnen Kontinuum die festen Werte:

$$j_1 = 2\cos\frac{\pi}{l_1}, \quad j_2 = 2\cos\frac{\pi}{l_2}, \cdots, j_4 = 2\cos\frac{\pi}{l_4}.$$

Wir wollen aus ihnen die drei Ausdrücke herstellen:

$$u = j_1 j_2 + j_3 j_4, \quad v = j_1 j_3 + j_4 j_2, \quad w = j_1 j_4 + j_2 j_3,$$

welche Zahlen des Intervalles $0 \leqq u, v, w \leqq 8$ sind. Die drei Werte $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ treten bei der Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, l_4)$ ein. In diesem Falle muß $l_4 > 2$ sein. Ist $l_4 = 2m_4$ eine gerade Zahl, so kommen wir zu dem bereits unter III behandelten Gruppen, deren jede eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 von der Signatur $(1, 1; m_4)$ enthält. Die hier zu erwartenden Entwicklungen wird man demnach in manchem Betracht als Verallgemeinerungen derjenigen unter III anzusehen haben. Der entgegengesetzte Extremfall, daß nämlich $u = 8$, $v = 8$, $w = 8$ zutrifft, wird von der Signatur $(0, 3; \infty, \infty, \infty, \infty)$ geliefert.

Aus den Invarianten j_1, j_2, j_3, j_4 wollen wir gleich auch noch die Verbindung:

$$J = j_1 j_2 j_3 j_4 + j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_4^2 - 4$$

herstellen. Der Zahlwert von J ist im Intervall $-3 \leqq J \leqq 28$ enthalten. Die untere Grenze wird bei der Signatur $(0, 4; 2, 2, 2, 3)$ erreicht, die obere bei $(0, 4; \infty, \infty, \infty, \infty)$.

Zwischen den vier weiteren Moduln $j_{12}, j_{13}, j_{14}, j_{24}$ müssen zwei Relationen bestehen, damit wir zu einem zweidimensionalen Kontinuum kommen. Diese Relationen lauten nach A. F. I, pag. 394:

$$j_{12}^2 + j_{14}^2 - j_{13} j_{24} - u j_{12} - w j_{14} + J = 0,$$
$$j_{12} j_{14} + j_{13} + j_{24} - v = 0.$$

Zur Einführung einer geometrischen Sprechweise setzen wir:

$$j_{12} : j_{13} : j_{14} : -1 = x : y : z : t$$

und deuten x, y, z, t als homogene Raumkoordinaten. Die Invariante j_{24}

drücken wir vermöge der zweiten eben angegebenen Relation in den x, y, z, t aus und finden alsdann für die erste jener Relationen die neue Gestalt:

$$t(x^2+y^2+z^2) - xyz + t^2(ux+vy+wz) + Jt^3 = 0.$$

Diese eine noch bleibende Relation haben wir bei fest gegebenen u, v, w, J als *Fläche dritter Ordnung* F_3 zu deuten. In dem schon genannten Spezialfalle der Signatur $(0, 4;\ 2, 2, 2, 2m_4)$ kommen wir auf die in III zugrunde gelegte Fläche F_3 zurück.

Das Polygonkontinuum bei der einzelnen Signatur $(0, 4;\ l_1, l_2, l_3, l_4)$ ist zweidimensional und wurde in der Note „Über die in der Theorie der automorphen Funktionen auftretenden Polygonkontinua" (Göttinger Nachr. 1903, Heft 5) als „einfach" zusammenhängend erkannt. Die charakteristischen Ungleichungen sind hier $j_{12} < -2$, $j_{13} < -2$, $j_{14} < -2$ oder in den x, y, z, t geschrieben:

$$x > 2t, \quad y > 2t, \quad z > 2t.$$

Zur Darstellung des fraglichen Kontinuums haben wir somit denjenigen Teil der F_3 zu benutzen, welcher dem durch die vier Ebenen:

$$x - 2t = 0, \quad y - 2t = 0, \quad z - 2t = 0, \quad t = 0$$

eingegrenzten Tetraeder angehört.

Um den Verlauf der F_3 innerhalb dieses Tetraeders zu erkennen, setzen wir für einen Augenblick $t = 1$ und deuten der größeren Anschaulichkeit wegen x, y, z als rechtwinklige Koordinaten. Man schneide die F_3 mit einer Horizontalebene $z = 2k$, wo $k \geqq 1$ gewählt werde. Der Schnitt ist die Hyperbel:

$$x^2 - 2kxy + y^2 + ux + vy + (4k^2+2kw+J) = 0$$

mit den Mittelpunktskoordinaten:

$$x_0 = \frac{u+vk}{2(k^2-1)}, \quad y_0 = \frac{v+uk}{2(k^2-1)}$$

und den durch:

$$y = x\left(k \pm \sqrt{k^2-1}\right)$$

gegebenen Asymptotenrichtungen. Einer der beiden Zweige dieser Hyperbel gehört dem für uns in Betracht kommenden Quadranten $x > 2$, $y > 2$ der gewählten Horizontalebene an. Für $\lim k = 1$ zieht sich dieser Zweig auf den unendlich fernen Punkt der Winkelhalbierenden $x = y$ zusammen. Die Asymptotenrichtungen koinzidieren für $\lim k = 1$ mit dieser Richtung $x = y$. Wächst k von 1 bis ∞, so entfernen sich die Asymptotenrichtungen mehr und mehr voneinander und werden schließlich für $\lim k = \infty$ die Richtungen der Achsen der x und y.

Durch Fortsetzung dieser elementaren Betrachtung stellt man unter Rückkehr zur projektiven Sprechweise folgendes Ergebnis fest: *Die Fläche* F_3,

d. h. der uns interessierende Teil derselben, welcher dem durch die Ebenen $x = 2t$, $y = 2t$, $z = 2t$, $t = 0$ *eingegrenzten Tetraeder angehört, ist ein einfach zusammenhängendes, in den Rand der Tetraederseite* $t = 0$ *eingespanntes Flächenstück, welches übrigens sackartig in das Innere des Tetraeders hineinhängt. Die durch die Kante* $z = 0$, $t = 0$ *hindurchzulegenden Ebenen* $z - 2kt = 0$ *schneiden die* F_3 *außer in jener Kante noch in Kurven des* 2^{ten} *Grades, welche sich für* $\lim k = 1$ *auf den Punkt* $x = y$, $z = t = 0$ *zusammenziehen und für* $\lim k = \infty$ *in das Geradenpaar* $x \cdot y = 0$ *ausarten. Entsprechendes gilt natürlich für die Ebenen* $x - 2kt = 0$ *und* $y - 2kt = 0$.

Ehe wir auf der F_3 den DB der automorphen Modulgruppe aufsuchen, sei folgende Betrachtung eingeschaltet. Unter den vier ganzen Zahlen l_i seien erstlich keine zwei einander gleich. Stellt alsdann (l_1', l_2', l_3', l_4') eine beliebige Permutation der (l_1, l_2, l_3, l_4) dar, so wird die Signatur $(0, 4; l_1', l_2', l_3', l_4')$ zwar, allgemein zu reden, neue Polygone liefern; aber dieselben können durch Transformation auf die oben bevorzugten Polygone zurückgeführt werden (cf. A. F. I, pag. 301) und liefern demnach dieselben automorphen Gebilde. Sind, wie einstweilen angenommen wurde, die l_1, l_2, l_3, l_4 durchaus voneinander verschieden, so gilt dasselbe von u, v, w. Gegenüber den 24 Permutationen der l_i erfahren die u, v, w ihre sechs Permutationen. Wir werden somit hier zu sechs verschiedenen Flächen F_3 geführt, deren Gleichungen durch Permutationen der u, v, w auseinander hervorgehen, und die somit selbst durch wiederholte Spiegelung an den Ebenen $y = z$, $z = x$, $x = y$ aus einer unter ihnen hergestellt werden können. *Jede unter diesen sechs Flächen ist ebenso gut wie jede andere zur Darstellung des Polygonkontinuums geeignet; sie werden durch die oben erwähnten Modultransformationen ineinander übergeführt.* Bei dieser Sachlage werden wir an der oben ausgesuchten F_3 festhalten.

Besonderheiten liegen vor, wenn zwei oder gar drei unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 einander gleich werden. Im ersteren Falle sind zwei unter den u, v, w einander gleich, im letzteren sogar alle drei. Wir haben entsprechend nur drei verschiedene Flächen F_3 oder gar nur eine einzige F_3. *Dies hat zur Folge, daß in den fraglichen besonderen Fällen die automorphen Modulgruppen Erweiterungen durch Spiegelungen gestatten, denen alsdann entsprechende Verkleinerungen der DB parallel gehen.* Wir kommen darauf unten zurück.

Eine weitere Bemerkung erfordert die oben befolgte unsymmetrische Behandlung der vier Invarianten $j_{12}, j_{13}, j_{14}, j_{24}$. Halten wir an der Anordnung (l_1, l_2, l_3, l_4) fest, so sind doch die Invarianten j_{13} und j_{24} völlig koordiniert. Statt also j_{24} zu eliminieren, können wir auch mit j_{13} so verfahren. Wir haben alsdann zu schreiben:

$$j_{12} : j_{24} : j_{14} : -1 = x' : y' : z' : t'$$

und finden, wie man sofort feststellt:

$$t'(x'^2+y'^2+z'^2) - x'y'z' + t'^2(ux'+vy'+wz') + Jt'^3 = 0.$$

Wir gelangen somit zu derselben Fläche F_3 wie vorhin; das oben durch den Punkt (x, y, z, t) dargestellte Polygon wird jetzt durch (x', y', z', t') geliefert; und es gilt, wie man leicht aus der zweiten Relation zwischen den Invarianten $j_{12}, \cdots$ abliest:

$$x' : y' : z' : t' = xt : (xz - yt - vt^2) : zt : t^2.$$

Durch diese Transformation muß somit unsere F_3 in sich selbst übergeführt werden, was man in der Tat durch direkte Rechnung leicht beweist. *Die geometrische Bedeutung der fraglichen Transformation ist die, daß sie eine symmetrische Umformung der F_3 in sich ist, deren Symmetrie- oder Übergangslinie auf der F_3 durch die Fläche zweiten Grades:*

$$xz - 2yt - vt^2 = 0$$

ausgeschnitten wird. Diese Fläche heiße F_2, die Symmetrielinie C_6 und die symmetrische Umformung selbst werde durch das Symbol $\overline{V}$ bezeichnet.

Aus der analytischen Gestalt von $\overline{V}$ folgt $x' : z' : t' = x : z : t$. *Je zwei einander durch $\overline{V}$ zugeordnete Punkte liegen hiernach mit der Tetraederecke $x = z = t = 0$ auf einer Geraden.* Beachtet man, daß diese Ecke selbst der F_3 angehört, und daß somit jeder von ihr ausziehende Strahl die F_3 entweder gar nicht oder in zwei weiteren Punkten schneidet, so ist die Transformation $\overline{V}$, welche diese beiden Punkte permutiert, in ihrer einfachsten Bedeutung erkannt. *Zugleich erkennen wir in C_6 den geometrischen Ort aller Berührungspunkte der von der fraglichen Tetraederecke an die F_3 laufenden Tangenten.* Setzen wir wie oben $t = 1$ und deuten die x, y, z als rechtwinklige Koordinaten, so handelt es sich um die zur y-Achse parallelen Tangenten. Zieht man die hyperbolischen Horizontalschnitte der F_3 mit den Ebenen $z = 2k$ wieder heran, so gewinnt man leicht weitere Aufschlüsse über den Verlauf von C_6. Insbesondere erinnere man sich des Grenzübergangs $\lim k = 1$, wo sich die Hyperbel auf den unendlich fernen Punkt der Winkelhalbierenden $x = y$ zusammenzieht. Unter Rückkehr zur projektiven Darstellung finden wir: *Die C_6 ist eine über die F_3 hinziehende Kurve, welche den Mittelpunkt $x = y$ der Tetraederkante $z = 0$, $t = 0$ mit dem Mittelpunkte $y = z$ der Kante $x = 0$, $t = 0$ verbindet.*

Wir gehen nun gleich noch einen Schritt weiter: *$\overline{V}$ ist eine unter drei koordiniert stehenden symmetrischen Umformungen der F_3 in sich:*

$$(\overline{U}) \qquad x' : y' : z' : t' = (yz - xt - ut^2) : yt : zt : t^2,$$

$$(\overline{V}) \qquad x' : y' : z' : t' = xt : (zx - yt - vt^2) : zt : t^2,$$

$$(\overline{W}) \qquad x' : y' : z' : t' = xt : yt : (xy - zt - wt^2) : t^2,$$

von denen offenbar ganz entsprechende Bemerkungen gelten wie von $\overline{V}$. Die Übergangslinien C_u, C_v, C_w werden auf der F_3 durch die drei Flächen zweiten Grades:

$$(F_u) \qquad yz - 2xt - ut^2 = 0,$$
$$(F_v) \qquad zx - 2yt - vt^2 = 0,$$
$$(F_w) \qquad xy - 2zt - wt^2 = 0$$

ausgeschnitten. Die drei Kurven C_u, C_v, C_w grenzen auf der F_3 einen Bereich ein, von dem Fig. 41 ein schematisches Bild liefert: ***Es handelt sich um einen dreieckigen Bereich, und zwar ragt dieser Bereich mit seinen drei Ecken an die Ebene*** $t = 0$ ***heran, welche er in den Mittelpunkten der Tetraederkanten erreicht.*** Wir werden diesen Bereich alsbald von anderer Seite her wieder finden. —

Auf Grundlage der vorstehenden Ergebnisse gehen wir jetzt daran, den DB der automorphen Modulgruppe auf der einzelnen F_3 auszusondern.

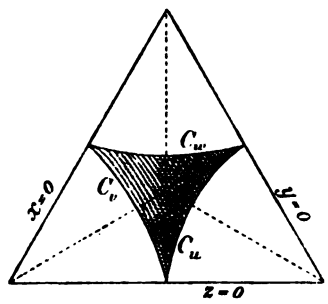


Fig. 41.

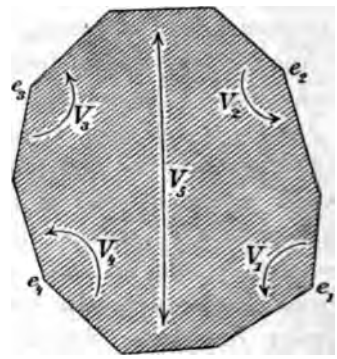


Fig. 42.

Nach allgemeinen Prinzipien soll uns hierzu die Theorie der Normalpolygone wieder die Grundlage liefern. Zufolge A. F. I, pag. 263 ist das Normalpolygon bei der Gattung $p = 0$, $n = 4$ im allgemeinen ein Zehneck mit vier festen Ecken und zwei Zyklen zufälliger Ecken. Die Gestalt des Zehnecks ist in Fig. 42 gegeben; doch könnte es auch sein, daß die hyperbolische Erzeugende V_5 die Ecken e_1, e_4 von e_2, e_3 trennt. Bewegen wir jetzt das Polygonzentrum C so, daß das Polygon gerade in Begriff steht die Ecke e_1 zu verlassen, so haben sich die durch V_1 einander zugewiesenen Seiten auf Punkte zusammengezogen, und das Polygon hat die Gestalt des in Fig. 43 (folg. Seite) skizzierten Achtecks angenommen. C liegt nun auf dem Mittellote der Verbindungsgeraden $e_1 e_1'$ bezw. für $l_1 = \infty$ auf einem Lote zu dieser Geraden. Man bewege jetzt C auf diesem Lote weiter, bis das Polygon im Begriffe steht, die Punkte e_1, e_1'

zu verlassen. In diesem Augenblick haben sich die durch V_5 einander zugeordneten Seiten auf Punkte zusammengezogen, und das Polygon ist zum Sechseck der Fig. 44 geworden.

Man könnte an der Allgemeingültigkeit der vorstehenden Überlegung zweifeln und tatsächlich gibt es auch Fälle, in denen die Herstellung eines Normalsechsecks bezeichneter Art auf dem vorgeschriebenen Wege

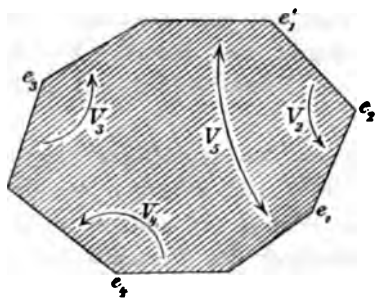


Fig. 43.

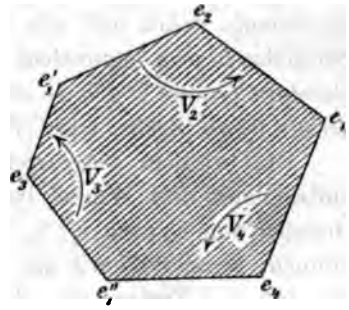


Fig. 44.

nicht durchführbar ist. Um eine einwurfsfreie Überlegung zu begründen, knüpfen wir an die Ausartung der Normalpolygone an, welche man gewinnt, falls das Zentrum C in den Punkt e_1 hineinrückt. Man gelangt so zu einem Netze von Bereichen, deren einzelner aus l_1 (also im Falle einer parabolischen Substitution V_1 aus unendlich vielen) DB der Gruppe besteht. Zufolge des „Reziprozitätssatzes" der Normalpolygone umfaßt der zu e_1 gehörige Bereich alle die Punkte, welche als Zentren C gewählt Normalpolygone liefern, die eben an diesen Punkt e_1 heranreichen. Der fragliche Bereich teilt insofern die Gestalt der Normalpolygone, als er geradlinig begrenzt ist und dreigliedrige zufällige Ecken mit konkaven Winkeln aufweist.

Wählen wir nun einen solchen dreigliedrigen Eckpunkt zum Zentrum C, so muß das zugehörige Normalpolygon an die drei zugehörigen Punkte e_1, e_1', e_1'' heranreichen und ein Sechseck darstellen. Aber man hat die *zwei* Fälle zu unterscheiden, daß die Reihenfolge der Ecken e_2, e_3, e_4 längs des Sechseckumfanges sowohl die in Fig. 44 gewählte, als auch die entgegengesetzte sein kann.

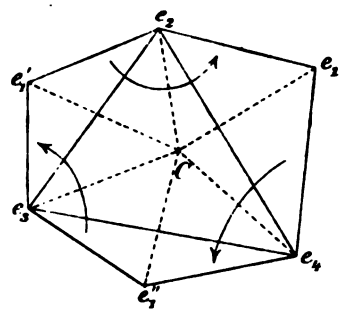


Fig. 45.

Wir legen nun erstlich die in Fig. 44 gewählte Eckenanordnung zu Grunde, verbinden das Zentrum C geradlinig mit den sechs Ecken und ziehen das Dreieck e_2, e_3, e_4 (cf. Fig. 45). Die drei Geraden von C nach e_1, e_1', e_1'' sind hier einander gleich; und

also sind die Dreiecke $e_1 e_2 C$ und $e_1' e_2 C$ einander kongruent, desgleichen die Dreiecke $e_1' e_3 C$ und $e_1'' e_3 C$, sowie endlich $e_1'' e_4 C$ und $e_1 e_4 C$. Denkt man die mit Ce_2, Ce_3, Ce_4 äquivalenten Geraden in allen Sechsecken des Netzes gezogen, zugleich aber alle übrigen Verbindungsgerade von Punkten e fortgenommen, so restiert die Ausartung des Polygonnetzes, welche wir oben durch Verschiebung von C in den Punkt e_1 erzielten. Wir erkennen: Das fragliche ausgeartete Polygonnetz weist erstens „feste" mit e_2, e_3, e_4 äquivalente Ecken auf: alle weiteren Ecken sind mit dem Zentrum C des Normalsechsecks äquivalent. Daraus aber ergibt sich sofort: *Bei der einzelnen Gruppe Γ gibt es stets ein und nur ein Normalsechseck mit einem dreigliedrigen Zyklus fester Ecken e_1, e_1', e_1''.*

Die bei dem ausgearteten Polygonnetze an den „zufälligen" Ecken auftretenden drei Winkel liegen in Fig. 45 als Winkel zwischen den drei Geraden von C nach e_2, e_3, e_4 vor. Da diese Winkel nie konvex werden können, so merken wir als eine weitere Eigenschaft des Normalsechsecks an, *daß das Zentrum C notwendig dem Dreieck e_2. e_3. e_4 angehört.*

Die gegebene Entwicklung ist der Umkehrung fähig: Jedes Sechseck, welches die bislang genannten Eigenschaften besitzt, dessen Winkel an den Ecken e_2, e_3, e_4 bezw. dessen Winkelsumme am Zyklus e_1, e_1', e_1'' die vorgeschriebene Größe haben, ist ein Normalsechseck unserer Art. Erstlich nämlich stellt es offenbar den DB einer Gruppe der Signatur $(0, 4; l_1, \cdots)$ dar; zweitens aber liefert der Punkt C als Zentrum notwendig gerade das vorgelegte Sechseck als Normalpolygon. Wir stellen somit jede Gruppe unseres „Gruppenkontinuums" einmal und nur einmal dar, falls wir alle inkongruenten Sechsecke beschriebener Gestalt und zwar sowohl für die in Fig. 45 vorliegende Anordnung der Ecken e_2, e_3, e_4 als für die entgegengesetzte zulassen.

Der DB der automorphen Modulgruppe wird nun auf der F_3 durch alle diejenigen Punkte dargestellt, welche den vorbezeichneten Sechsecken korrespondieren. Um diesen DB einzugrenzen, müssen wir die Grenzfälle der Normalsechsecke untersuchen und beginnen wieder mit der in Fig. 45 zu Grunde gelegten Reihenfolge der Ecken e_2, e_3, e_4. Wir gelangen nun zu einem Grenzfalle, wenn das Zentrum C entweder auf eine der Seiten oder in eine der Ecken des Dreiecks $e_2 e_3 e_4$ rückt.

Man nehme erstlich an, das Zentrum C sei ein Punkt der Seite $e_2 e_4$, jedoch weder e_2 noch e_4 selbst. In diesem Falle ist die Summe der beiden Winkel $\sphericalangle e_1 C e_2$, $\sphericalangle e_1 C e_4$ gleich π geworden; und da andrerseits:

$$\sphericalangle e_1 C e_2 = \sphericalangle e_1' C e_2,$$
$$\sphericalangle e_1 C e_4 = \sphericalangle e_1'' C e_4$$

gilt, so sind die beiden einander gleichen Winkel $\sphericalangle e_1' C e_2$ und $\sphericalangle e_1'' C e_2$

zu 0 geworden: Die Ecken e_1', e_3, e_1'' sind auf der absoluten Ellipse der Maßbestimmung zur Koinzidenz gekommen und liefern zusammen mit e_1 einen Zyklus *parabolischer* Spitzen (cf. Fig. 46); die Gerade e_2e_4 ist zur Symmetrielinie geworden. Man wird ganz entsprechende Überlegungen für den Fall durchführen, daß C auf eine der beiden anderen Seiten des Dreiecks $e_2e_3e_4$ rückt. Indem wir zusammenfassen, erhalten wir das Resultat: *Rückt C auf eine der Seiten des Dreiecks $e_2e_3e_4$, jedoch nicht in*

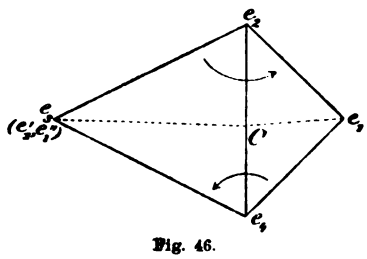


Fig. 46.

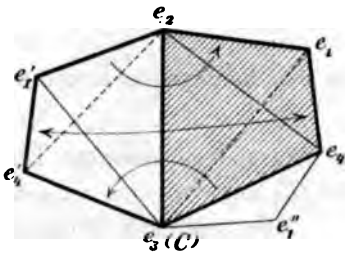


Fig. 47.

eine Ecke, so erhalten wir als Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$ *resp.* $(0, 3; l_2, \infty, l_4)$, $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$. Die drei zugehörigen Punkte der F_3 werden wir weiter unten angeben.

Es rücke jetzt zweitens C in die Ecke e_3. Unter diesen Umständen nimmt das Seckseck die in Fig. 47 angegebene Gestalt an. Wir haben hier noch das Dreieck $e_1''e_3e_4$ abgetrennt und vermöge der Substitution V_3 verlegt. Der DB der Gruppe erscheint jetzt aus zwei „konjugierten Vierecken" $e_1e_2e_3e_4$ und $e_1'e_2e_3e_4'$ zusammengesetzt (cf. A. F. I, pag. 304). Das Besondere ist aber hier, daß diese beiden Vierecke einander symmetrisch sind; denn aus den allgemeinen Winkelrelationen am Zentrum C und der Ecke e_3 des Sechseçks folgert man hier sofort:

$$\sphericalangle e_1e_2e_3 = \sphericalangle e_1'e_2e_3, \qquad \sphericalangle e_2e_3e_4 = \sphericalangle e_2e_3e_4',$$

woraus die Symmetrie beider Vierecke hervorgeht.

Die Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{l_1}, \frac{\pi}{l_2}, \frac{\pi}{l_3}, \frac{\pi}{l_4}$ in dieser Reihenfolge liefern nun, wie man sofort feststellt, ein *eindimensionales Kontinuum*. Um dieses Kontinuum invariant zu charakterisieren, bemerken wir, daß die zu den Punkten e_1', e_4' gehörenden Substitutionen:

$$V_1' = V_3^{-1}V_1V_2, \qquad V_4' = V_3V_4V_3^{-1}$$

sind. Soll somit die Spiegelung S an der Seite e_2e_3 unseren DB in sich selbst transformieren, so werden die durch S transformierten Substitutionen V_1, V_2, V_3, V_4 mit $V_1'^{-1}, V_2^{-1}, V_3^{-1}, V_4'^{-1}$ gleich sein:

$$SV_1S = V_2^{-1}V_1^{-1}V_2, \; SV_2S = V_2^{-1}, \; SV_3S = V_3^{-1}, \; SV_4S = V_3V_4^{-1}V_3^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$SV_1S \cdot SV_3S = V_2^{-1}V_1^{-1}V_2 \cdot V_3^{-1}.$$

Da aber $S^2 = 1$ und $V_3V_4 = V_2^{-1}V_1^{-1}$ gilt, so folgt weiter:

$$S(V_1V_3)S = V_3(V_4V_2)V_3^{-1}.$$

V_1V_3 und V_4V_2 haben somit. als ineinander transformierbar, gleiche Invarianten, d. h. es gilt $j_{24} = j_{13}$ und also zufolge der zweiten Invariantenrelation:

$$j_{12}j_{14} + 2j_{13} - r = 0.$$

In den homogenen Koordinaten geschrieben lautet diese Relation:

$$xz - 2yt - rt^2 = 0,$$

so daß die zu unserem linearen Gruppenkontinuum gehörenden Punkte der F_3 auf der oben eingeführten Kurve C_r gelegen sind.

Man zeigt nun leicht durch das übliche Schlußverfahren weiter, *daß das lineare Kontinuum der symmetrischen Gebilde gerade eineindeutig auf die C_r bezogen ist.* In der Tat hat unser Kontinuum zwei Grenzfälle. Der erste wird erreicht, wenn e_3 und e_4 oder (was im projektiven Sinne auf dasselbe hinausläuft) e_1 und e_2 zu einem parabolischen Punkte verschmelzen. Wählen wir letztere Alternative, so kommt in der Grenze das Gebilde $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$, das wir oben bereits für den Fall erreichten, daß C auf die Seite e_3e_4 rückt. Ganz entsprechend finden wir als zweites Grenzgebilde dasjenige der Signatur $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$, welches oben für ein auf der Geraden e_2e_3 gelegenes Zentrum C eintrat. Der Grenzübergang zum Gebilde $(0, 3; \infty, l_3, l_4)$ erfordert $\lim j_{12} = -2$, der zum Gebilde $(0, 3; l_2, l_3, \infty)$ aber $\lim j_{14} = -2$. Im ersten Falle werden wir zu dem auf der Kante $x = 0$, $t = 0$ des Tetraeders gelegenem Endpunkte von C_r geführt, im zweiten Falle zum Endpunkte auf der Kante $z = 0$, $t = 0$.

Fragen wir jetzt weiter, wie viele Kontinua symmetrischer Gebilde in unserem Gruppenkontinuum überhaupt enthalten sind, so werden hierbei diejenigen Anordnungen der Punkte e, welche durch zyklische Permutationen ineinander übergehen, als nicht verschieden zu gelten haben. Unter den sechs restierenden Anordnungen werden dann noch je zwei solche, die einander entgegengesetzt sind, wie (e_1, e_2, e_3, e_4) und (e_4, e_3, e_2, e_1), stets zu gleichen Kontinuis führen; in der Tat beachte man, daß z. B. in Fig. 47 die Anordnung e_4, e_3, e_2, e_1 am „konjugierten" Vierecke vorliegt. Es bleiben somit im ganzen nur *drei* Kontinua symmetrischer Gebilde, welche den Anordnungen:

$$(e_1, e_2, e_3, e_4), \quad (e_1, e_3, e_4, e_2), \quad (e_1, e_4, e_2, e_3)$$

korrespondieren. Zu diesen drei Kontinuis werden wir geführt, falls das Polygonzentrum C resp. in die Ecken e_3, e_4, e_2 des Dreiecks $e_2e_3e_4$

hineinrückt. *Auf der F_3 entsprechen diesen drei Kontinuis symmetrischer Gebilde die drei Kurven C_v, C_w, C_u; das von diesen Kurven eingegrenzte in Fig. 41 schraffierte Dreieck stellt denjenigen Teil des DB der automorphen Modulgruppe dar, welcher unseren Normalsechsecken mit der in Fig. 45 gewählten Eckenanordnung $e_2 e_3 e_4$ entspricht.*

Der Fall, daß die Reihenfolge der Punkte e_2, e_3, e_4 längs des Umfangs des Normalsechsecks nicht die bisher angenommene, sondern die entgegengesetzte ist, erledigt sich jetzt sehr leicht. In Fig. 48 ist ein Sechseck dieser Art stark umrandet; es hat die Ecken e_1, e_2, e_1', e_4', e_1'', e_3. Durch Verlegung des Dreiecks $e_3 e_4' e_1''$ vermöge V_3^{-1} entspringt das schraffierte Doppelviereck, welches aus zwei konjugierten Vierecken e_1, e_2, e_3, e_4 und e_1', e_2, e_3, e_4' besteht. Letztere sind gegenwärtig einander nicht symmetrisch; die Spiegelung S an $e_2 e_3$ liefert somit, ausgeübt auf Fig. 48, den DB einer *neuen* Gruppe. Dieser DB aber ist ein Sechseck, bei dem die Eckenfolge die oben zuerst zu Grunde gelegte ist. Rechnen wir somit die Transformation des DB durch die Spiegelung S auf die Invarianten j_{12}, j_{13}, j_{14} oder auf x, y, z, t um, so haben wir diejenige Transformation gewonnen, welche wir auf das von C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck ausüben müssen, um den uns noch fehlenden Teil des DB der automorphen Modulgruppe zu gewinnen.

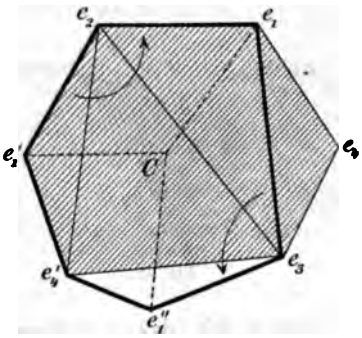


Fig. 48.

Der invariante Darstellung des Gebildes legten wir nun allemal die zu e_1, e_2, e_3, e_4 (cf. Fig. 48) gehörenden Substitutionen zu Grunde. Nach der vorgeschriebenen Transformation treten an Stelle dieser vier Substitutionen V_1, V_2, V_3, V_4 die folgenden vier:

$$V_1' = S V_2^{-1} V_1^{-1} V_2 S,\quad V_2' = S V_2^{-1} S,\quad V_3' = S V_3^{-1} S,\quad V_4' = S V_3 V_4^{-1} V_3^{-1} S,$$

wie man ohne Mühe feststellen wird. Hieraus ergeben sich sofort die nachfolgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_1' V_2' &= S V_2^{-1} V_1^{-1} S = S(V_1 V_2)^{-1} S, \\ V_3' V_1' &= S V_3^{-1} V_2^{-1} V_1^{-1} V_2 S = S(V_4 V_2) S, \\ V_2' V_3' &= S V_2^{-1} V_3^{-1} S = S(V_3 V_2)^{-1} S. \end{aligned}$$

Es gelten somit für die Invarianten folgende Gleichungen:

$$j_{12}'' = j_{12},\quad j_{13}'' = j_{24} = -j_{12} j_{14} - j_{13} + v,\quad j_{14}'' = j_{14}.$$

In x, y, z, t schreibt sich die gewonnene Transformation:

$$x' : y' : z' : t' = xt : (zx - yt - vt^2) : zt : t^2;$$

sie ist somit keine andere als die oben mit $\overline{V}$ bezeichnete symmetrische Umformung der F_3 in sich mit der Übergangslinie C_v. *Transformiert man das auf der F_3 durch die Kurven C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck durch $\overline{V}$, so ist das aus dem ursprünglichen und dem transformierten Dreieck aufgebaute Doppeldreieck ein DB der automorphen Modulgruppe.* Fig. 49 gibt ein schematisches Bild des Doppeldreiecks, welches die der Zeichnung zu Grunde liegende Ebene $t = 0$ mit den vier Ecken erreicht. Als Erzeugende der automorphen Modulgruppe liefert der DB die beiden Transformationen:

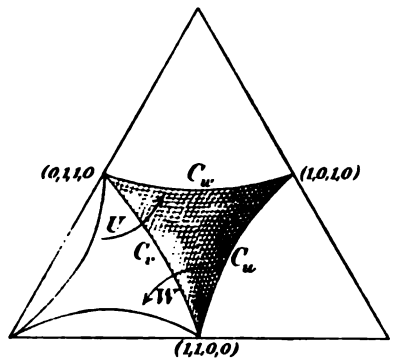


Fig. 49.

$$U = \overline{W}\,\overline{V}, \quad W = \overline{V}\,\overline{U},$$

die den in der Figur angegebenen Pfeilrichtungen entsprechen. Statt durch $\overline{V}$ können wir das ursprüngliche durch C_u, C_v, C_w eingegrenzte Dreieck auch längs C_u oder C_w vermöge der Substitutionen $\overline{U}$ resp. $\overline{W}$ reproduzieren. Entsprechend werden wir im Interesse der Symmetrie *die drei Transformationen:*

$$U = \overline{W} \cdot \overline{V}, \quad V = \overline{U} \cdot \overline{W}, \quad W = \overline{V} \cdot \overline{U}$$

als Erzeugende der automorphen Modulgruppe bezeichnen, zwischen denen alsdann die Beziehung besteht:

$$W \cdot V \cdot U = 1.$$

Die einfachste ausführliche Gestalt dieser Transformationen ist:

$$(U) \qquad \frac{x'}{t'} = \frac{x}{t}, \quad \frac{x}{t} \cdot \frac{z}{t} - \frac{y}{t} - \frac{y'}{t'} = v, \quad \frac{x'}{t'} \cdot \frac{y'}{t'} - \frac{z}{t} - \frac{z'}{t'} = w,$$

$$(V) \qquad \frac{y'}{t'} \cdot \frac{z'}{t'} - \frac{x}{t} - \frac{x'}{t'} = u, \quad \frac{y'}{t'} = \frac{y}{t}, \quad \frac{x}{t} \cdot \frac{y}{t} - \frac{z}{t} - \frac{z'}{t'} = w,$$

$$(W) \qquad \frac{y}{t} \cdot \frac{z}{t} - \frac{x}{t} - \frac{x'}{t'} = u, \quad \frac{x'}{t'} \cdot \frac{z'}{t'} - \frac{y}{t} - \frac{y'}{t'} = v, \quad \frac{z'}{t'} = \frac{z}{t}.$$

Die Invarianz der F_3 ist mit Hilfe dieser Gestalt der Erzeugenden besonders leicht zu zeigen. *Der gesamten Modulgruppe entspricht ein Nets von Dreiecken, welches die F_3 lückenlos und einfach bedeckt: die Grenze des Netzes wird von den drei in der Ebene $t = 0$ gelegenen Tetraederkanten gebildet, in welche die F_3 eingespannt ist.* Die Transformationen U, V, W sind aperiodisch. *Die vorliegende automorphe Modulgruppe erweist sich als isomorph mit der in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen auftreten-*

den Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe, d. i. mit der Gruppe der Signatur $(0, 3; \infty, \infty, \infty)$.

Die gewonnenen Ergebnisse sind in voller Übereinstimmung mit den vorläufigen Angaben über die Erzeugung der Modulgruppe in A. F. I, pag. 395. Die damals mit T_1 bezeichnete Transformation war durch Abänderung des kanonischen Querschnittsystems auf der Riemannschen Fläche berechnet und hatte die Gestalt:

$$j_{12}' = j_{12}, \quad j_{13}' = j_{14}, \quad j_{14}' = -j_{12}j_{14} - j_{13} + v,$$
$$u' = u, \quad v' = w, \quad w' = v.$$

Es tritt also hier noch eine Permutation der u, v, w ein, d. h. ein Übergang zu einer anderen unter den oben erwähnten sechs Flächen F_3. Dagegen transformiert T_1^2 unsere F_3 in sich:

$$(T_1^2) \qquad \begin{cases} j_{12}' = j_{12}, \quad j_{13}' = -j_{12}j_{14} - j_{13} + v, \\ j_{14}' = j_{12}^2 j_{14} + j_{12}j_{13} - vj_{12} - j_{14} + w. \end{cases}$$

Offenbar kann man diese Transformation T_1^2 auch so schreiben:

$$j_{12}' = j_{12}, \quad j_{12}j_{14} + j_{13} + j_{13}' - v = 0, \quad j_{12}j_{13}' + j_{14} + j_{14}' - w = 0.$$

Damit aber haben wir unsere obige Transformation U erreicht.

Es sind jetzt nur noch die beiden Fälle zu betrachten, daß es unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 entweder zwei oder gar noch mehr als zwei gleiche gibt. Im ersten Falle sind unter den u, v, w zwei einander gleich, im zweiten ist $u = v = w$.

Es gelte etwa zuerst $v = w \gtrless u$. Alsdann wird unsere F_3 samt dem auf ihr gelegenen Dreiecksnetze durch die Spiegelung:

$$(S_1) \qquad x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y, \quad t' = t$$

in sich transformiert, so daß die Erweiterung der Modulgruppe durch diese Spiegelung statthaft ist. *Der DB der erweiterten Gruppe, welche*

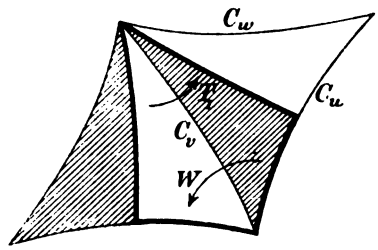


Fig. 50.

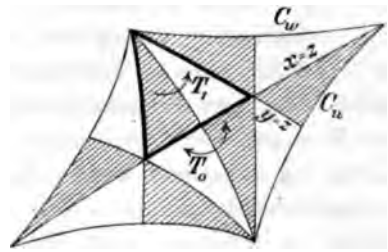


Fig. 51.

nunmehr mit der Gruppe der Signatur $(0, 3; 2, \infty, \infty)$ *isomorph ausfällt, ist in Fig. 50 stark umrandet; die Erzeugenden sind W und:*

$$(S_1\overline{V} = T_1) \qquad x' : y' : z' : t' = xt : zt : (xz - yt - vt^2) : t^2.$$

In der That ist diese letztere Substitution keine andere als die oben mit T_1 bezeichnete.

Sind endlich mindestens drei unter den Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 einander gleich, so gilt $u = v = w$. Dann ist die Erweiterung der Gruppe durch alle drei Spiegelungen S_1, S_2, S_3 an den Ebenen $y = z$, $z = x$, $x = y$ möglich. *Der DB der so erweiterten Gruppe, welche sich mit der Gruppe der Signatur* $(0, 3; 2, 3, \infty)$ *isomorph erweist, ist jetzt das in Fig. 51* (s. pag. 509) *stark umrandete Dreieck; die Erzeugenden sind* T_1 *und:*

$(S_2\overline{V} = T_0)$ $\quad x' : y' : z' : t' = zt : (xz - yt - ut^2) : xt : t^2$. —

Durchführung des Kontinuitätsbeweises bei den Gebilden der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$.

Die Durchführung des Kontinuitätsbeweises für die Gebilde der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ gestaltet sich nun höchst einfach. Sei $z = \varphi(\zeta)$ bei einem einzelnen Gebilde eine Hauptfunktion. Vermöge derselben wird das Polygon auf die Ebene der Variabelen z abgebildet. In letzterer entsprechen den festen Polygonecken vier Punkte, deren Werte z wir gleich selbst wieder mit e_1, e_2, e_3, e_4 bezeichnen. Unserem Gruppenkontinuum steht demnach als *Kontinuum algebraischer Gebilde die Mannigfaltigkeit der mit vier Punkten signierten Ebenen gegenüber, wobei diesen vier Punkten* e_1, e_2, e_3, e_4 *vier ganze Zahlen* l_1, l_2, l_3, l_4 *zugeordnet sind.*

Natürlich sind zwei derart signierte Ebenen, welche durch lineare Transformation von z ineinander überführbar sind, als nicht wesentlich voneinander verschieden anzusehen. Um demnach zu einer invarianten Darstellung des Kontinuums der algebraischen Gebilde zu gelangen, haben wir das Doppelverhältnis:

$$\lambda = -\frac{(e_1 - e_2)(e_3 - e_4)}{(e_1 - e_3)(e_4 - e_2)}$$

der vier Punkte e der z-Ebene einzuführen.

Wir nehmen zuvörderst wieder an, daß die sämtlichen Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 voneinander verschieden sind. Gegenüber den 24 Permutationen der e erfährt λ seine wohlbekannten sechs Substitutionen. In der Tat bleibt λ bei den Permutationen der Vierergruppe unverändert, da diese vier Permutationen, aber auch nur diese vier durch lineare Transformationen von z bewirkt werden können. Nehmen wir demnach irgend eine Permutation vor, bei der λ eine von der Identität verschiedene Substitution erfährt, so werden wir, da unter den Zahlen l keine zwei einander gleich sind, zu einem wesentlich neuen Gebilde gelangen. *Gegenwärtig müssen wir somit die ganze Ebene der komplexen Variabelen* λ *heranziehen, um jedes algebraische Gebilde unseres Kontinuums, und jedes nur einmal zu gewinnen.*

Nun ist der in Fig. 49 dargestellte DB der automorphen Modulgruppe

eindeutig stetig auf die λ-Ebene abgebildet, und umgekehrt ist die Beziehung der λ-Ebene auf jenen DB „höchstens" eindeutig, wobei man jedoch je zwei einander zugeordnete Randpunkte des DB als nicht wesentlich verschieden anzusehen hat. Wie ist des näheren diese Beziehung beschaffen?

Die Punkte der C_ϱ liefern die symmetrischen Gebilde bei der Anordnung e_1, e_2, e_3, e_4. Hier wird λ reell und gehört dem Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ an. Den Übergang zu dem auf der Kante $x = 0$, $t = 0$ gelegenen Endpunkte von C_ϱ erzielten wir oben durch Verschmelzen der Polygonecken e_1, e_2 zu einer parabolischen Spitze. Diesem Grenzfalle gehört $\lambda = 0$ zu. Ebenso findet man dem anderen Endpunkte von C_ϱ den Wert $\lambda = 1$ zugeordnet. Man wende auf die beiden uns soeben beschäftigenden linearen Kontinua unsere wohlbekannte Schlußweise des Kontinuitätsbeweises an und findet: Die Kurve C_ϱ bildet sich eineindeutig stetig auf die von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 1$ reichende Strecke der reellen λ-Achse ab. In genau derselben Weise finden wir die C_μ auf die Strecke von $\lambda = 1$ bis $\lambda = \infty$, die C_ω auf diejenigen von $\lambda = -\infty$ bis $\lambda = 0$ der reellen λ-Achse abgebildet, so daß der Rand des in Fig. 49 schraffierten Dreiecks gerade eineindeutig stetig auf die reelle λ-Achse bezogen ist.

Es fragt sich nun, ob das Innere jenes Dreiecks sich auf die positive oder die negative λ-Halbebene abbildet. Hierüber ist durch eine besondere Untersuchung zu entscheiden. Man kann zu diesem Zwecke z. B. so verfahren. Man transformiere einen Punkt der Kurve C_ϱ durch $U = T_1^2$ und beschreibe einen Weg vom ersten zum transformierten Punkt; dieser Weg führt zunächst durch das schraffierte Dreieck. Die Bedeutung von T_1^2 als Transformation des Schnittsystems der Riemannschen Fläche (z-Ebene) ist in A. F. I, pag. 300ff. dargelegt. Die Beschreibung des eben genannten Weges auf der F_3 läuft hier darauf hinaus, daß wir den Übergang vom ersten zum zweiten Schnittsystem durch Umläufe der Punkte e herstellt. Am einfachsten ist es, $e_1 = 0$, $e_3 = 1$, $e_4 = \infty$ festzuhalten und $e_2 = \lambda$ allein laufen zu lassen. Im obigen Falle wird λ zunächst die positive Halbebene betreten, so daß das Abbild des schraffierten Dreiecks der Fig. 49 in der positiven Halbebene λ zu suchen ist.

Es ist jetzt alles vorbereitet, um das Kontinuitätsverfahren in der üblichen Gestalt zur Anwendung zu bringen. Wir werden finden, daß das schraffierte Dreieck auf die positive λ-Halbebene umkehrbar eindeutig stetig bezogen ist.

Die Operation $\overline{V}$ bedeutete nun am Polygon der ζ-Halbebene eine Spiegelung desselben an einem Kreise. Beim Übergang zur z-Ebene bleibt der Charakter der Transformation als einer Spiegelung an einem Kreise gewahrt. Die Folge ist, daß λ bei Ausübung von $\overline{V}$ in seinen konjugiert

komplexen Wert übergeht: Das nicht-schraffierte Dreieck der Fig. 49 liefert, auf die λ-Ebene übertragen, die negative Halbebene. Indem wir zusammenfassen, finden wir als Resultat: *Der DB der automorphen Modulgruppe ist im Falle lauter verschiedener Zahlen l_1, l_2, l_3, l_4 eineindeutig stetig auf die λ-Ebene bezogen.*

Sind zwei unter den Zahlen l einander gleich, ist etwa $l_1 = l_2$, während keine weiteren Gleichheiten auftreten, so gilt $v = w \gtrless u$, und der DB der Modulgruppe reduziert sich auf den in Fig. 50 stark umrandeten Bereich. Bei den algebraischen Gebilden liefert ein Austausch von e_1 und e_2 bei festen e_3, e_4 kein neues Gebilde. Bei diesem Austausch aber erfährt λ die Substitution $\lambda' = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$; ihr ordnen wir als DB den in Fig. 52 stark umrandeten Kreis zu, welcher uns nunmehr das Kontinuum der algebraischen Gebilde eindeutig darstellt. Es kommen in diesem Falle neue symmetrische Gebilde hinzu, bei denen e_3 und e_4 auf der reellen x-Achse liegen, während e_1 und e_2 konjugiert komplex sind. Indem man auf diese Gebilde unsere Kontinuitätsbetrachtung ausübt, findet man in gewohnter Art, daß sich die Seite $y = z$ des DB der automorphen Modulgruppe auf den der positiven λ-Halbebene angehörenden, von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 2$ ziehenden Halbkreis abbildet, usw. In bekannter Fortsetzung des Verfahrens gelangen wir zu dem Schlusse, *daß sich auch jetzt der DB der automorphen Modulgruppe eineindeutig stetig auf den das Kontinuum der algebraischen Gebilde darstellenden Bereich abbildet.*

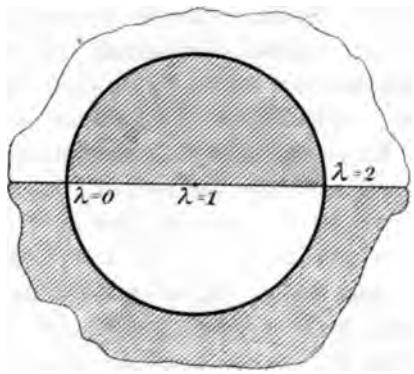


Fig. 52.

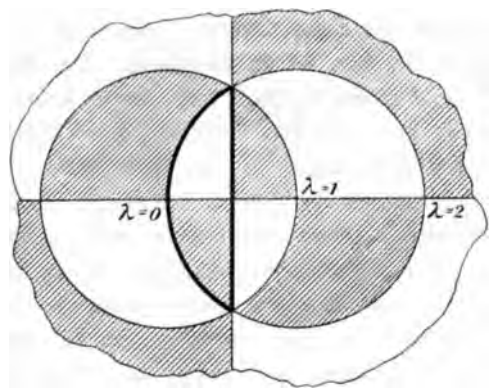


Fig. 53.

Endlich gelangen wir zum extremen Falle $u = v = w$, wo der DB der automorphen Modulgruppe in Fig. 51 stark umrandet ist. Man wird ohne Mühe den Nachweis führen können, *daß sich derselbe auf den in Fig. 53 stark umrandeten Bereich abbildet, welcher gegenwärtig das Kontinuum algebraischer Gebilde darstellt.*

Als Schlußergebnis dürfen wir hiernach das Fundamentaltheorem für die Gebilde der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ in folgenden Worten zum Ausdruck bringen: *Die Ebene der Variabelen z sei in irgend einer Art mit vier Punkten e_1, e_2, e_3, e_4 signiert, denen vier ganze Zahlen $l_i > 1$ (∞ eingeschlossen) zugeordnet seien. Es gibt alsdann auf dieser Ebene stets eine und im wesentlichen auch nur eine polymorphe Funktion $\zeta = f(z)$, welche die geeignet zerschnittene Ebene auf ein Grenzkreispolygon der Signatur $(0, 4; l_1, l_2, l_3, l_4)$ derart abbildet, daß die vier signierten Punkte die festen Ecken des Polygons liefern.* —

Braunschweig, Juli 1904.

Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.

(Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe.)

Von

E. ZERMELO in Göttingen.

... Der betreffende Beweis ist aus Unterhaltungen entstanden, die ich in der vorigen Woche mit Herrn Erhard Schmidt geführt habe, und ist folgender.

1) Es sei M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, deren Elemente mit m bezeichnet werden mögen, M' von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}'$ eine ihrer Teilmengen, welche mindestens ein Element m enthalten muß, aber auch alle Elemente von M umfassen darf, und $M - M'$ die zu M' „komplementäre" Teilmenge. Zwei Teilmengen gelten als verschieden, wenn eine von beiden irgend ein Element enthält, das in der anderen nicht vorkommt. Die Menge aller Teilmengen M' werde mit M bezeichnet.

2) *Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m_1' zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das „ausgezeichnete" Element von M' genannt werden möge.* So entsteht eine „Belegung" γ der Menge M mit Elementen der Menge M von besonderer Art. Die Anzahl dieser Belegungen γ ist gleich dem Produkte $\prod \mathfrak{m}'$ erstreckt über alle Teilmengen M' und ist daher jedenfalls von 0 verschieden. Im folgenden wird nun eine beliebige Belegung γ zu grunde gelegt und aus ihr eine bestimmte Wohlordnung der Elemente von M abgeleitet.

3) *Definition.* Als „γ-Menge" werde bezeichnet jede wohlgeordnete Menge M_γ aus lauter verschiedenen Elementen von M, welche folgende Beschaffenheit besitzt: ist a ein beliebiges Element von M_γ und A der „zugehörige" Abschnitt, der aus den vorangehenden Elementen $x < a$ von M_γ besteht, so ist a immer das „ausgezeichnete" Element von $M - A$.

4) *Es gibt γ-Mengen innerhalb M.* So ist z. B. m_1, das ausgezeichnete Element von $M' = M$, selbst eine γ-Menge, ebenso die (geordnete) Menge $M_2 = (m_1, m_2)$, wo m_2 das ausgezeichnete Element von $M - m_1$ ist.

5) *Sind M_γ' und M_γ'' irgend zwei verschiedene γ-Mengen* (die aber zu derselben ein für allemal gewählten Belegung γ gehören!), *so ist immer eine von beiden identisch mit einem Abschnitte der anderen.*

Es sei nämlich M_γ' die eine der beiden wohlgeordneten Mengen, welche auf die andere, M_γ'', oder einen ihrer Abschnitte ähnlich abbildbar ist. Dann müssen je zwei bei dieser Abbildung einander entsprechende Elemente miteinander identisch sein. Denn das erste Element *jeder* γ-Menge ist m_1, da der zugehörige Abschnitt A kein Element enthält, also $M - A = M$ ist. Wäre nun m' das *erste* Element von M_γ', welches von dem entsprechenden Elemente m'' verschieden wäre, so müssten die zugehörigen Abschnitte A' und A'' noch miteinander identisch sein, mithin auch die Komplementärmengen $M - A'$ und $M - A''$ und als deren ausgezeichnete Elemente m' und m'' selbst, gegen die Annahme.

6) *Folgerungen.* Haben zwei γ-Mengen ein Element a gemeinsam, so haben sie auch den Abschnitt A der vorangehenden Elemente gemein. Haben sie *zwei* Elemente a, b gemein, so ist in *beiden* Mengen entweder $a \prec b$ oder $b \prec a$.

7) Bezeichnet man als „γ-Element" jedes Element von M, das in irgend einer γ-Menge vorkommt, so gilt der Satz: *Die Gesamtheit L_γ aller γ-Elemente läßt sich so ordnen, daß sie selbst eine γ-Menge darstellt, und umfaßt alle Elemente der ursprünglichen Menge M.* Die letztere ist damit selbst wohlgeordnet.

I) Sind a, b zwei beliebige γ-Elemente und M_γ' und M_γ'' irgend zwei γ-Mengen, denen sie angehören, so enthält nach 5) die größere der beiden γ-Mengen beide Elemente und bestimmt die Ordnungsbeziehung $a \prec b$ oder $b \prec a$. Diese Ordnungsbeziehung ist nach 6) unabhängig von der Wahl der verwendeten γ-Menge.

II) Sind a, b, c drei beliebige γ-Elemente und $a \prec b$ und $b \prec c$, so ist immer $a \prec c$. Denn jede c enthaltende γ-Menge enthält nach 6) auch b und mithin a, und da sie einfach geordnet ist, so folgt in ihr aus $a \prec b$ und $b \prec c$ in der Tat $a \prec c$. Die Menge L_γ ist also *einfach geordnet.*

III) Ist L_γ' eine beliebige Teilmenge von L_γ und a eines ihrer Elemente, das der γ-Menge M_γ angehören möge, so enthält M_γ nach 6) alle Elemente $\prec a$, also auch die Teilmenge L_γ'', welche aus L_γ' durch Weglassung aller auf a folgenden Elemente entsteht, und L_γ'' besitzt als Teilmenge der wohlgeordneten Menge M_γ ein *erstes* Element, das zugleich erstes Element von L_γ' ist. L_γ ist also auch *wohlgeordnet.*

IV) Ist a ein beliebiges γ-Element und A die Gesamtheit *aller* vorangehenden Elemente $x \prec a$, so ist A nach 6) der zu a gehörige Abschnitt in jeder Menge M_γ, welche a enthält, und a ist mithin nach 3) das ausgezeichnete Element von $M - A$. *Also ist L_γ selbst eine γ-Menge.*

V) Gäbe es ein Element von M, das *keiner* γ-Menge angehörte, also Element von $M - L_\gamma$ wäre, so gäbe es auch ein ausgezeichnetes Element m_1'

von $M - L_\gamma$, und die geordnete Menge (L_γ, m_1'), in der jedes γ-Element dem Element m_1' voranginge, wäre nach 3) selbst eine γ-Menge. Also wäre auch m_1' ein γ-Element gegen die Annahme, und es ist in Wirklichkeit $L_\gamma = M$, also M selbst eine *wohlgeordnete Menge*.

Somit entspricht jeder Belegung γ eine ganz bestimmte Wohlordnung der Menge M, wenn auch nicht zwei verschiedenen Belegungen immer verschiedene. Jedenfalls muß es *mindestens eine* solche Wohlordnung geben, und jede Menge, für welche die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn hat, darf als eine wohlgeordnete, ihre Mächtigkeit als ein „Alef" betrachtet werden. So folgt also für jede transfinite Mächtigkeit

$$\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \aleph_0\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \text{ usw.},$$

und je zwei Mengen sind miteinander „vergleichbar", d. h. es ist immer die eine ein-eindeutig abbildbar auf die andere oder einen ihrer Teile.

Der vorliegende Beweis beruht auf der Voraussetzung, daß Belegungen γ überhaupt existieren, also auf dem Prinzip, daß es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht, oder formal ausgedrückt, daß das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Mengen, deren jede mindestens ein Element enthält, selbst von Null verschieden ist. Dieses logische Prinzip läßt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet. So kann z. B. die Allgemeingültigkeit des Satzes, daß die Anzahl der Teile, in die eine Menge zerfällt, kleiner oder gleich ist der Anzahl aller ihrer Elemente, nicht anders bewiesen werden, als indem man sich jedem der betrachteten Teile eines seiner Elemente zugeordnet denkt.

Die Idee, unter Berufung auf dieses Prinzip eine *beliebige* Belegung γ der Wohlordnung zu grunde zu legen, verdanke ich Herrn Erhard Schmidt; meine Durchführung des Beweises beruht dann auf der Verschmelzung der verschiedenen möglichen „γ-Mengen", d. h. der durch das Ordnungsprinzip sich ergebenden wohlgeordneten Abschnitte.

Münden i. Hann., den 24. September 1904.

Abzählungen bezüglich des Strahls im n-dimensionalen Raum.

Von

MAX CASPAR in Tübingen.

Das Problem der Bestimmung der Anzahlen eines k-dimensionalen linearen Raumes $[k]$ in einem n-dimensionalen linearen Fundamentalraum $[n]$ wurde zuerst von Herrn Schubert in Angriff genommen in der Abhandlung: „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums“ (Math. Ann. Bd. 26, 1886, S. 26—51). Einem linearen Raum $[k]$ werden die Bedingungen auferlegt, andere gegebene lineare Räume von niederer Dimension in einem Punkte, einer Geraden usw. zu schneiden und gleichzeitig in gegebenen linearen Räumen von höherer Dimension enthalten zu sein. Es ist die Frage: wieviele Räume $[k]$ erfüllen diese Bedingungen, wenn die Zahl der Konstanten, von denen der $[k]$ abhängt, gleich der Zahl der Gleichungen ist, denen die Bedingungen äquivalent sind. Nach einer Reihe von allgemeinen Voruntersuchungen stellt Herr Schubert eine Formel auf, welche die Berechnung sämtlicher Anzahlen des Strahls ($k = 1$) ermöglicht. An diese Arbeit schließt sich eine weitere*) desselben Verfassers an, in welcher ein Ausdruck für die Anzahlen des Strahls abgeleitet wird, der nur die Konstanten der gegebenen linearen Räume enthält. Von Bedeutung für die Theorie ist vor allem der symbolische Kalkül, welchen Herr Schubert in seiner ersten grundlegenden Arbeit einführt. Derselbe wurde in allen folgenden Abhandlungen über diesen Gegenstand beibehalten und hat sich bewährt. Die angewandte *Beweismethode* jedoch, die wesentlich auf geometrischer Anschauung beruht, macht durchweg Gebrauch von dem *Prinzip der Erhaltung der Anzahl*, dessen Anwendbarkeit nicht jedem Zweifel entrückt ist, und das bezüglich der Grenzen seiner Gültigkeit noch immer zur Diskussion steht.**)

*) „Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen.“ Mitt. der Hamburger Math. Ges. Bd. III, 1892, S. 86—97.

**) Vgl. die Einwände gegen das Prinzip von Herrn Kohn. Archiv der Math. u. Phys. III, Reihe IV, S. 312 ff.

Dieser Umstand läßt eine *rein algebraische Behandlung des Problems* wünschenswert erscheinen. Eine solche soll im folgenden für den Strahl ($k = 1$) versucht werden.

Nachdem in § 1 die Frage algebraisch formuliert ist, wird in § 2 auf Grund gewisser Beziehungen zwischen den Determinanten einer Matrix, die aus gleichartigen Elementen besteht, eine Formel aufgestellt, welche der von Herrn Schubert gegebenen vollständig entspricht, und wie diese die Berechnung sämtlicher Anzahlen des Strahls ermöglicht. § 3 bringt einige Anwendungen dieser Formel.*)

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor von Brill, welcher mich zur Behandlung des vorliegenden Themas veranlaßt hat, sei herzlicher Dank gesagt für die mannigfaltige Anregung und Förderung, die ich von seiner Seite erfahren durfte.

§ 1.

Das Schubertsche Symbol (a_0, a_1) bedeutet die Bedingung, daß ein Strahl ganz in einem beliebigen ebenen Raum $[a_1]$ liege, und einen gegebenen in dem $[a_1]$ liegenden $[a_0]$ in einem Punkte schneide. Diese Bedingungen lassen sich auf folgende Weise algebraisch formulieren.

Jeder Strahl des Fundamentalraums $[n]$ läßt sich darstellen durch die Gleichungen in homogenen Koordinaten:

$$\xi_i = x_i + \lambda y_i. \qquad i = 0, 1, \cdots, n. \tag{1}$$

Als Unbekannte sehen wir die Verhältnisse der x und die der y an; nur ist, einer Verschiebung der zwei Grundpunkte auf der Geraden entsprechend, noch ein x_i und ein y_k $(k \neq l)$ willkürlich annehmbar, so daß die Zahl der Unbekannten $2n - 2$ ist. Der Raum $[a_1]$, in welchem der Strahl liegen soll, sei gegeben durch die $n - a_1$ Gleichungen:

$$A^{(i)} \equiv \alpha_0^{(i)}\xi_0 + \alpha_1^{(i)}\xi_1 + \alpha_2^{(i)}\xi_2 + \cdots + \alpha_n^{(i)}\xi_n = 0 \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \cdots, n - a_1.$$

Der Raum $[a_0]$, der ganz in dem Raum $[a_1]$ enthalten ist, sei gegeben durch die $n - a_0$ Gleichungen:

$$A^{(l)} \equiv \alpha_0^{(l)}\xi_0 + \alpha_1^{(l)}\xi_1 + \alpha_2^{(l)}\xi_2 + \cdots + \alpha_n^{(l)}\xi_n \tag{3}$$
$$l = 1, 2, \cdots, n - a_0.$$

Substituiert man die Werte (1) in (2), d. h. bringt man den Strahl zum Schnitt mit dem $[a_1]$, so erhält man:

$$A_x^{(i)} + \lambda A_y^{(i)} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n - a_1, \tag{4}$$

*) Der allgemeine Fall $(k > 1)$ ist erst in neuester Zeit durch Arbeiten von Herrn Giambelli zu einem gewissen Abschluß gebracht worden. Siehe besonders die Abhandlung „Risoluzione del problema degli spazi secanti" Accad. R. delle Scienze di Torino, S. II. Tom. LII. 1902. p. 171 ff.

wo $A_x^{(i)}$ und $A_y^{(i)}$ die in den Variabeln x bezw. y geschriebenen Formen $A^{(i)}$ bedeuten.

Die Gleichungen (4) müssen für jedes λ befriedigt werden, da der Strahl ganz in dem $[a_1]$ liegen soll; es muß also sein:

$$A_x^{(i)} = 0; \quad A_y^{(i)} = 0. \qquad i = 1, 2, \cdots, n - a_1. \tag{5}$$

Bringt man ebenso den Strahl mit dem Raum $[a_0]$ zum Schnitt, so erhält man:

$$A_x^{(l)} + \lambda A_y^{(l)} = 0. \qquad l = 1, 2, \cdots, n - a_0. \tag{6}$$

Die Elimination von λ aus diesen $n - a_0$ Gleichungen ergibt das Verschwinden sämtlicher Determinanten der Matrix aus den A_x und A_y, was wir durch

$$\left\| \begin{matrix} A_x^{(1)} A_x^{(2)} \cdots A_x^{(n-a_0)} \\ A_y^{(1)} A_y^{(2)} \quad \cdot \cdot A_y^{(n-a_0)} \end{matrix} \right\| = 0 \tag{7}$$

bezeichnen wollen. Wegen (5) kann man an Stelle dieses Gleichungssystems das folgende setzen:

$$\left\| \begin{matrix} A_x^{(n-a_1+1)} A_x^{(n-a_1+2)} \cdots A_x^{(n-a_0)} \\ A_y^{(n-a_1+1)} A_y^{(n-a_1+2)} \cdots A_y^{(n-a_0)} \end{matrix} \right\| = 0. \tag{8}$$

Diese Matrix besitzt nur $a_1 - a_0$ Vertikalreihen.

Die Schubertsche Bedingung (a_0, a_1) *ist also ausgedrückt durch die Gleichungssysteme* (5) *und* (8).

Zur Abkürzung werde folgende Bezeichnung eingeführt: Es bezeichne eine Zahl ϱ in runden Klammern (ϱ) das Verschwinden der Determinanten einer Matrix von 2 Horizontalreihen und ϱ Vertikalreihen. Die Elemente der ersten Horizontalreihe seien lineare, homogene Formen der x_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$; die Elemente der zweiten Horizontalreihe seien dieselben Formen geschrieben in y_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

An Stelle der verschwindenden Matrix (8)*) tritt daher das Symbol

$$(a_1 - a_0).$$

Das Symbol (1) bezeichnet infolgedessen ein Paar linearer Gleichungen mit denselben Koeffizienten, von welchen die eine in x, die andere in y geschrieben ist.

Das gleichzeitige Verschwinden der Determinanten von μ Matrices, von welchen jede ϱ Vertikalreihen besitzt, werde mit $(\varrho)^\mu$ bezeichnet. Danach tritt an Stelle der Gleichungen (5) das einfache Symbol

$$(1)^{n-a_1}.$$

*) Wir sagen „eine Matrix verschwindet", wenn alle ihre Determinanten gleich Null werden.

Mit $[(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)]$ werde die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen, die aus dem Verschwinden von r Matrices von $\varrho_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ Vertikalreihen entstehen, bezeichnet, wobei eventuell eine Anzahl der Variabeln als konstant anzusehen ist.

Die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungssysteme (5) *und* (8) *ist demzufolge dargestellt durch den symbolischen Ausdruck*

$$[(1)^{n-a_0}(a_1-a_0)].$$

Die Zahl der Gleichungen, welchen die Systeme in der eckigen Klammer äquivalent sind, ist

$$2n-2a_0+a_1-a_0-1=2n-a_0-a_1-1.$$

Herr Schubert nennt diese Zahl die „Dimension" der Bedingung (a_0, a_1).

Das Produkt zweier oder mehrerer Schubertscher Symbole (a_0, a_1) $(b_0, b_1)\cdots$ besagt, daß der Strahl alle Bedingungen einzeln erfüllen soll. In unserer algebraischen Formulierung ist die Zahl der Strahlen, welche die zusammengesetzte Bedingung (a_0, a_1) (b_0, b_1) erfüllen, repräsentiert durch den symbolischen Ausdruck:

$$[(1)^{2n-a_1-b_1}(a_1-a_0)(b_1-b_0)].$$

Man sieht: dem geometrischen Problem der Bestimmung der Anzahlen des Strahls im n-dimensionalen Raum entspricht in algebraischer Behandlung das folgende:

Man soll die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen bestimmen, die aus dem Verschwinden von beliebig vielen, etwa r Matrices von zwei Horizontalreihen und beliebig vielen Vertikalreihen entstehen; die Elemente der ersten Horizontalreihe jeder Matrix sind lineare Formen der $n+1$ homogenen Variabeln x, die der zweiten Horizontalreihe dieselben Formen geschrieben in den $n+1$ homogenen Variabeln y; d. h. in unserer Formulierung: gesucht ist die Zahl

$$[(1)^{\mu}(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)].$$

Die Zahl der Gleichungen, der die Systeme in diesem Ausdruck äquivalent sind, muß gleich der Zahl der Unbekannten sein:

$$\sum\varrho-r+2\mu=2n-2.$$

Es sei bemerkt, daß die Übersetzung der algebraischen Symbole in Schubertsche Symbole nicht eindeutig ist, während dies umgekehrt zutrifft. Es entspricht nämlich dem algebraischen Symbol

$$[(1)^{\mu}(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)], \tag{9}$$

in welchem die Elemente der Matrices Formen von $n+1$ homogenen Variabeln sind, folgendes Schubertsche Symbol im Raum $[n_1]$

$$(a_1-\varrho_1, a_1)(a_2-\varrho_2, a_2)\cdots(a_r-\varrho_r, a_r), \tag{10}$$

wenn n_1 und die a die Beziehungen erfüllen:

$$(r-1)n_1 + n - \mu = \Sigma a; \quad n_1 \geqq n - \mu;$$
$$\varrho_i \leqq a_i \leqq n_1. \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

Denn überträgt man dieses Schubertsche Symbol in algebraische Formulierung, so erhält man:

$$[(1)^{rn_1 - \Sigma a}(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)]$$

oder wegen der vorstehenden Gleichung:

$$[(1)^{\mu-(n-n_1)}(\varrho_1)(\varrho_1)\cdots(\varrho_r)]. \tag{11}$$

Hierin sind jedoch die Elemente der Matrices lineare Formen von $n_1 + 1$ Variabeln. Ist nun $n_1 > n$, so kann man mit Hilfe von $n_1 - n$ der $\mu - n + n_1$ Paare linearer Gleichungen $n_1 - n$ Variable x und die entsprechenden $n_1 - n$ Variabeln y eliminieren, und gelangt so zu (9). Ist $n_1 < n$, so gelangt man von (9) nach (11), indem man in (9) mittels $n - n_1$ der μ Paare linearer Gleichungen $n - n_1$ Variable x und y eliminiert. Die Zahl (9) gibt also die Zahl der Strahlen an, welche den Bedingungen (10) genügen.

§ 2.

Zur weiteren Behandlung des Problems bedarf es einer Formel, welche Herr Brill*) aufgestellt hat. Bezeichnet man mit

$$(12\cdots q)_2$$

die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2q} \end{matrix} \right\|,$$

in welcher die a allgemeine ganze Funktionen von hinlänglich vielen Variabeln sind, und mit

$$[(12\cdots q)_2]$$

die Zahl der Lösungen, die dem Verschwinden der Determinanten der Matrix entsprechen, so hat man die Beziehung:

$$[(12\cdots q)_2] = [(12\cdots q-1)_2 (q-1\,q)_2] - [(12\cdots q-2)_2 (q-1)_2] \tag{12}$$

d. h. die Zahl der Lösungen, die das Verschwinden aller Determinanten der gegebenen Matrix enthält, ist gleich der Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen folgender Gleichungssysteme:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1q-1} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2q-1} \end{matrix} \right\| = 0; \qquad \left| \begin{matrix} a_{1q-1} & a_{1q} \\ a_{2q-1} & a_{2q} \end{matrix} \right| = 0$$

*) In seiner Abhandlung: „Über Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen" Math. Ann. Bd. 5, 1872, S. 380; vgl. die Abhandlung desselben Verfassers: „Über algebraische Korrespondenzen" Math. Ann. Bd. 36, 1890, S. 321 ff.

vermindert um die Zahl der Lösungen der Gleichungssysteme:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1\,q-2} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{1\,q-2} \end{matrix} \right\| = 0; \qquad \begin{matrix} a_{1\,q-1} = 0, \\ a_{2\,q-1} = 0. \end{matrix}$$

An Stelle dieser Formel, deren Beweis a. a. O. streng erbracht wird, läßt sich die etwas allgemeinere setzen:

$$(13) \quad [(12\cdots q)_2] = [(12\cdots p)_2\,(p\cdots q)_2] - [(12\cdots p-1)_2\,(p+1\cdots q)_2\,(p)_2],$$

wo $1 < p < q$ sein muß.

Macht man nun bezüglich der Elemente der Matrices die Voraussetzungen von § 1 und führt die dort angewandte Bezeichnung ein, so tritt an Stelle der Formel (13) die folgende:

$$(14) \qquad [(q)] = [(p)\,(q-p+1)] - [(p-1)\,(q-p)\,(1)],$$

wo ebenfalls $1 < p < q$ ist; für $p = 2$ oder $p = q-1$ erhält man

$$(14a) \qquad [(q)] = [(2)\,(q-1)] - [(q-2)\,(1)],$$

welche Formel der Gleichung (12) entspricht; für $q = 3$ erhält man

$$(14b) \qquad [(3)] = [(2)\,(2)] - [(1)].$$

Der Umstand, daß in dem Ausdruck $[(12\cdots p)\,(p\cdots q)]$ auf der rechten Seite von Formel (13) die beiden Matrices eine gleiche Vertikalreihe besitzen, übt auf die Stufe*) und die Ordnung des durch diese Gleichungssysteme repräsentierten algebraischen Gebildes keinen Einfluß aus, so daß die vereinfachte Bezeichnung in Formel (14) ihre volle Gültigkeit behält.

Die Formel (14) wird nun zur Herleitung eines Ausdrucks für die Zahl $[(\varrho_1)\,(\varrho_2)]$, wo $\varrho_1 > \varrho_2$ sei, in folgender Weise angewandt. Es bestehen dieser Formel gemäß folgende Gleichungen:

$$[(\varrho_1+\varrho_2-1)] = [(\varrho_1)\,(\varrho_2)] - [(1)\,(\varrho_1-1)\,(\varrho_2-1)],$$
$$[(1)\,(\varrho_1+\varrho_2-3)] = [(1)\,(\varrho_1-1)\,(\varrho_2-1)] - [(1)^2\,(\varrho_1-2)\,(\varrho_2-2)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(1)^{i-1}(\varrho_1+\varrho_2-2i+1)] = [(1)^{i-1}(\varrho_1-i+1)(\varrho_2-i+1)] - [(1)^i(\varrho_1-i)(\varrho_2-i)],$$
$$[(1)^i\,(\varrho_1+\varrho_2-2i-1)] = [(1)^i(\varrho_1-i)(\varrho_2-i)] - [(1)^{i+1}(\varrho_1-i-1)(\varrho_2-i-1)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(1)^{\varrho_2-3}(\varrho_1-\varrho_2+5)] = [(1)^{\varrho_2-3}(\varrho_1-\varrho_2+3)(3)] - [(1)^{\varrho_2-2}(\varrho_1-\varrho_2+2)(2)],$$
$$[(1)^{\varrho_2-2}(\varrho_1-\varrho_2+3)] = [(1)^{\varrho_2-2}(\varrho_1-\varrho_2+2)(2)] - [(1)^{\varrho_2-1}(\varrho_1-\varrho_2+1)].$$

*) Es sei bei dieser Gelegenheit auf den Unterschied hingewiesen, welcher zwischen dem Kroneckerschen Begriff der „Stufe" und dem von Herrn Schubert in die abzählende Geometrie eingeführten besteht. In der im Crelleschen Journal Bd. 92 abgedruckten Festschrift von Kronecker wird in § 10 durch die Zahl der Gleichungen, denen eine Teilresolvente eines algebraischen Gleichungssystems äquivalent ist, die „Stufe" des durch diese Teilresolvente repräsentierten algebraischen Gebildes definiert, so daß eine Resolvente k^{ter} Stufe eine $(n-k)$ fache Mannigfaltigkeit darstellt. In der abzählenden Geometrie besitzt ein Gebilde k^{ter} Stufe eine k fache Mannigfaltigkeit.

Addiert man diese $\varrho_2 - 1$ Gleichungen, so ergibt sich:

$$[(\varrho_1)(\varrho_2)] = [(1)^{\varrho_2-1}(\varrho_1-\varrho_2+1)]+[(1)^{\varrho_2-2}(\varrho_1-\varrho_2+3)]+[(1)^{\varrho_2-3}(\varrho_1-\varrho_2-5)] + \cdots + [(1)(\varrho_1+\varrho_2-3)] + [(\varrho_1+\varrho_2-1)].$$

Fügt man noch jedem Glied den Faktor $(1)^\mu$ hinzu, so erhält man *die grundlegende Formel:*

$$(15)\quad [(1)^\mu(\varrho_1)(\varrho_2)] = [(1)^{\mu+\varrho_2-1}(\varrho_1-\varrho_2+1)]+[(1)^{\mu+\varrho_2-2}(\varrho_1-\varrho_2+3)] + \cdots + [(1)^{\mu+1}(\varrho_1+\varrho_2-3)] + [(1)^\mu(\varrho_1+\varrho_2-1)].$$

Diese Formel liefert die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen aller Gleichungen, die durch das simultane Verschwinden von zwei Matrices entstehen, ausgedrückt durch die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen der Gleichungen, die dem Verschwinden von nur einer Matrix entsprechen. Die Zahl der Gleichungen, welchen die in den einzelnen Gliedern auftretenden Systeme äquivalent sind, ist

$$2\mu + \varrho_1 + \varrho_2 - 2.$$

Die Formel (15) *entspricht Glied für Glied der Hauptformel, welche Herr Schubert zur Berechnung der Anzahlen des Strahls aufstellt.**) Dieselbe lautet nämlich für $a_1 - a_0 > b_1 - b_0$

$$(a_0, a_1)(b_0, b_1) = (a_0+b_1-n, b_0+a_1-n+1)+(a_0+b_1-n-1, b_0+a_1-n+2) + (a_0+b_1-n-2, b_0+a_1-n+3)+\cdots+(a_0+b_0-n+1, a_1+b_1-n).$$

Gibt man dieser Formel die algebraische Form nach der in § 1 angegebenen Weise, so erhält man Formel (15), wenn man setzt:

$$a_1 - a_0 = \varrho_1;\quad b_1 - b_0 = \varrho_2;\quad 2n - a_1 - b_1 = \mu.$$

Ist ein Ausdruck $[(1)^\mu(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)]$ zur Berechnung vorgelegt, so läßt sich ein solcher durch wiederholte Anwendung von Formel (15) darstellen durch die Zahl der gemeinschaftlichen Lösungen, die dem Verschwinden von nur einer Matrix entsprechen.

Die Formel (15) wurde abgeleitet unter der Voraussetzung $\varrho_1 > \varrho_2$; die Zahl der Vertikalreihen der in den einzelnen Gliedern auf der rechten Seite auftretenden Matrices ist daher durchweg > 1. Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, so geht das erste Glied $[(1)^{\mu+\varrho_2-1}(\varrho_1-\varrho_2+1)]$ auf der rechten Seite, dessen Matrix die kleinste Zahl von Vertikalreihen besitzt, mit Rücksicht auf die Gleichung (14b) über in $[(1)^{\mu+\varrho_2-1}]$. Es gilt daher bei Anwendung der Formel (15) folgende Regel. Es ist zu setzen:

$$(16)\quad \begin{cases} [(1)^\nu(\sigma)] = 0 & \text{für } \sigma < 1, \\ [(1)^\nu(\sigma)] = [(1)^\nu] & \text{für } \sigma = 1. \end{cases}$$

Eine weitere Beziehung, die zwischen ν und σ erfüllt sein muß, damit

*) In seiner Abhandlung Math. Ann. Bd. 26, S. 40.

die Zahl $[(1)^{\nu}(\sigma)]$ nicht 0 wird, erhält man durch folgende Überlegung: Das Symbol $[(1)^{\nu}(\sigma)]$ gibt die Zahl der Strahlen an, welche ganz in einem Raume $[n-\nu]$ liegen und einen Raum $[n-\nu-\sigma]$ in einem Punkte treffen. Damit das Problem einen Sinn hat, muß also sein $n-\nu-\sigma \geqq 0$. In algebraischer Ausdrucksweise ist zu sagen: Die $\nu+\sigma$ Gleichungen

$$A^{(i)} \equiv \alpha_0^{(i)}\xi_0 + \alpha_1^{(i)}\xi_1 + \cdots - \alpha_n^{(i)}\xi_n = 0, \quad i = 1, 2, \cdots \nu+\sigma,$$

welche den Raum $[n-\nu-\sigma]$ darstellen, haben bei beliebigen Koeffizienten α keine Lösung (außer $\xi_i = 0$; $i = 0, 1, \cdots, n$), wenn $\nu+\sigma > n$ ist. Man kann daher folgende Regel aussprechen: es ist

$$[(1)^{\nu}(\sigma)] = 0, \quad \text{für } \nu+\sigma > n. \tag{17}$$

Wenn nun in dem Ausdruck $[(1)^{\mu}(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)]$ die Zahl der äquivalenten Gleichungen gleich ist der Zahl der Unbekannten, d. h. wenn

$$\sum\varrho - r + 2\mu = 2n - 2$$

ist, so gelangt man durch fortgesetzte Anwendung der Formel (15) auf einen linearen Ausdruck für $[(1)^{\mu}(\varrho_1)\cdots(\varrho_r)]$, welcher Glieder enthält von der Form:

$$[(1)^{\mu+m}(2n-2\mu-2m-1)].$$

Nach den Regeln (16) und (17) aber sind 0 zu setzen diejenigen Glieder, für welche

$$2n-2m-2\mu-1 < 1$$

oder

$$n-\mu-1 < m$$

und

$$\mu+m+2n-2\mu-2m-1 > n$$

oder

$$n-\mu-1 > m$$

ist, d. h. es bleibt allein übrig das Glied, für welches

$$n-\mu-1 = m$$

ist, also das Glied

$$[(1)^{n-1}].$$

Die Zahl der Lösungen der in diesem Symbol enthaltenen $2n-2$ linearen Gleichungen ist aber 1. *Daher ist die Zahl* $[(1)^{\mu}(\varrho_1)(\varrho_2)\cdots(\varrho_r)]$ *gleich dem Koeffizienten dieses Gliedes.*

Mit Hilfe der Formel (17) läßt sich auch sofort entscheiden, ob ein Produkt von r Bedingungen in der Schubertschen Schreibweise

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2)\cdots(a_r, b_r)$$

überhaupt von einem Strahl erfüllt werden kann. In algebraischer Formulierung stellt sich dieses Bedingungsprodukt dar durch den Ausdruck:

$$[(1)^{rn-\Sigma b}(b_1-a_1)\cdots(b_r-a_r)].$$

Da aber nach jener Formel keine Lösung existiert, wenn die Summe des Exponenten von (1) und irgend einer Differenz $b_i - a_i$ größer wird als n, so kann man bezüglich der Schubertschen Symbolik den Satz aussprechen:

Die zusammengesetzte Bedingung

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2)\cdots(a_r, b_r)$$

ist nur erfüllbar, wenn

$$b_i - a_i \leqq \sum b - n(r-1) \qquad i = 1, 2, \cdots, r$$

ist.

§ 3.

Mit Hilfe der Formel (15) läßt sich ein Ausdruck herstellen für die Zahl $[(2)^i]$. Man erhält der Reihe nach:

$$[(2)^2] = [(3)] + [(1)],$$
$$[(2)^3] = [(4)] + 2[(1)(2)],$$
$$[(2)^4] = [(5)] + 3[(1)(3)] + 2[(1)^2] \text{ usw.}$$

Durch den Schluß von i auf $i+1$ soll nun die Richtigkeit folgender Formel bewiesen werden:

$$(18)\quad [(2)^i] = B_i^{(0)}[(i+1)] + B_i^{(1)}[(1)(i-1)] + B_i^{(2)}[(1)^2(i-3)] + \cdots$$
$$\cdots + B_i^{(m-1)}[(1)^{m-1}(i-2m+3)] + B_i^{(m)}[(1)^m(i-2m+1)] + \cdots$$

wo

$$B_i^{(m)} = \frac{i-2m+1}{i+1}\binom{i+1}{m}.$$

Die Reihe ist fortzusetzen, solange es die bei Anwendung der Formel (15) geltende Regel (16) gestattet.

Fügt man nämlich jedem Glied den Faktor (2) hinzu und wendet dann auf jedes Glied der rechten Seite die Formel (15) an, so erhält man:

$$[(2)^{i+1}] = B_i^{(0)}[(i+2)] + \{B_i^{(0)} + B_i^{(1)}\}[(1)(i)] + \{B_i^{(1)} + B_i^{(2)}\}[(1)^2(i-2)] + \cdots$$
$$\cdots + \{B_i^{(m-1)} + B_i^{(m)}\}[(1)^m(i-2m+2)] + \cdots$$
$$= C_{i+1}^{(0)}[i+2)] + C_{i+1}^{(1)}[(1)(i)] + \cdots + C_{i+1}^{(m)}[(1)^m(i-2m+2)] + \cdots$$

Es ist nun

$$C_{i+1}^{(m)} = B_i^{(m-1)} + B_i^{(m)} = \frac{i-2m+3}{i+1}\binom{i+1}{m-1} + \frac{i-2m+1}{i+1}\binom{i+1}{m}$$
$$= \frac{i-2m+2}{i+2}\binom{i+2}{m} = B_{i+1}^{(m)}.$$

Die für $[(2)^{i+1}]$ gefundene Formel geht also aus Formel (18) hervor, indem man in dieser $i+1$ statt i setzt.

Ist $i = 2n - 2$, d. h. ist die Zahl der Bedingungsgleichungen gleich der Konstantenzahl des Strahls, so ist das allgemeine Glied auf der rechten Seite der Formel

$$\frac{2(n-m)-1}{2n-1}\binom{2n-1}{m}[(1)^m(2n-2m-1)].$$

Die Anwendung der Regeln (16) und (17) auf den Klammerausdruck ergibt, daß alle Glieder 0 zu setzen sind, mit Ausnahme des Gliedes, für welches

$$m = n - 1$$

ist. Es ist daher:

$$(19) \qquad [(2)^{2n-2}] = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}[(1)^{n-1}] = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}.$$

Um die Zahl $[(1)^\lambda(2)^i(\varrho)]$ zu berechnen, wo ebenfalls die Zahl der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen gleich der Konstantenzahl des Strahls, also

$$(20) \qquad 2\lambda + i + \varrho - 1 = 2n - 2$$

sei, füge man jedem Glied der Formel (18) den Faktor $(1)^\lambda(\varrho)$ hinzu. Das allgemeine Glied auf der rechten Seite ist dann

$$\frac{i-2m+1}{i+1}\binom{i+1}{m}[(1)^{m+\lambda}(\varrho)(i-2m+1)].$$

Wendet man die Formel (17) auf den Klammerausdruck an, so ergibt sich mit Rücksicht auf (20), daß alle Glieder gleich 0 zu setzen sind, ausgenommen das Glied, für welches

$$m = \lambda + i - n + 1$$

ist. Es ist daher

$$[(1)^\lambda(2)^i(\varrho)] = \frac{i-2m+1}{i+1}\binom{i+1}{m}[(1)^{2\lambda-n+i+1}(2n-2\lambda-i-1)^2],$$

wo $m = \lambda + i - n + 1$ ist. Nach Formel (15) ist aber

$$[(1)^{2\lambda-n+i+1}(2n-2\lambda-i-1)^2] = [(1)^{n-1}] = 1,$$

so daß man erhält:

$$(21) \qquad [(1)^\lambda(2)^i(\varrho)] = \frac{i-2m+1}{i+1}\binom{i+1}{m} = \binom{i-1}{m} - \binom{i-1}{m-2}$$

$$= \binom{i-1}{n-\lambda-2} - \binom{i-1}{n-\lambda}.$$

Setzt man $\lambda = 0$; $i = 2n - 2$, so kommt man wieder auf Formel (19), welche ein Spezialfall von (21) ist.

Die Gleichung

$$[(2)^{2n-2}] = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}$$

gestattet eine *doppelte geometrische Interpretation.* Die $2n-2$ Gleichungen, welche das Symbol $[(2)^{2n-2}]$ enthält, seien:

$$\left|\begin{array}{ll} \alpha_0^{(i)}x_0+\alpha_1^{(i)}x_1+\cdots+\alpha_n^{(i)}x_n & \beta_0^{(i)}x_0+\beta_1^{(i)}x_1+\cdots+\beta_n^{(i)}x_n \\ \alpha_0^{(i)}y_0+\alpha_1^{(i)}y_1+\cdots+\alpha_n^{(i)}y_n & \beta_0^{(i)}y_0+\beta_1^{(i)}y_1+\cdots+\beta_n^{(i)}y_n \end{array}\right| = 0.$$
$$i=1,2,\cdots,2n-2.$$

Auf diese Gleichungen kommt man, sowohl wenn man den Strahl

$$\xi_k = x_k+\lambda y_k \qquad (k=0,1,\cdots,n)$$

die $2n-2$ gegebenen Räume $[n-2]$

$$\left.\begin{array}{l} A^{(l)}\equiv \alpha_0\xi_0+\alpha_1\xi_1+\cdots+\alpha_n\xi_n=0 \\ B^{(l)}\equiv \beta_0\xi_0+\beta_1\xi_1+\cdots+\beta_n\xi_n=0 \end{array}\right\} \; l=1,2,\cdots,2n-2$$

schneiden läßt, als auch wenn man dem Raume $[n-2]$

$$x_0\xi_0+x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n=0,$$
$$y_0\xi_0+y_1\xi_1+\cdots+y_n\xi_n=0$$

die Bedingung auferlegt, die $2n-2$ gegebenen Strahlen

$$\xi_i=\alpha_i^{(k)}+\lambda\beta_i^{(k)} \quad (i=0,1,\cdots,n;\; k=1,2,\cdots,2n-2)$$

zu schneiden, so daß der Satz gilt: Die Zahl der Strahlen, welche $2n-2$ gegebene Räume $[n-2]$ je in einem Punkte treffen, ist gleich der Zahl von Räumen $[n-2]$, welche $2n-2$ gegebene Geraden je in einem Punkte schneiden. Beide Zahlen sind $\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}$. Es tritt hier das Prinzip der Dualität auf.

Die Anzahl (21) hat a. a. O. § 5 bereits Herr Schubert berechnet. Sie bedeutet bei ihm die Zahl der Strahlen, welche die zusammengesetzte Bedingung $(n-2,n)^{a+\alpha-1}(a,\alpha)$ erfüllen. Die von Herrn Schubert angegebene Zahl $\frac{\alpha-a}{\alpha+a}\binom{\alpha+a}{a}$ geht in die in Formel (21) angegebene über, wenn man $\lambda=n-\alpha$; $i=a+\alpha-1$ setzt.

Da die Formel (15) Glied für Glied der Hauptregel von Herrn Schubert entspricht, so lassen sich mit ihrer Hilfe alle Resultate herleiten, welche Herr Schubert mit seiner Hauptregel gewonnen hat, namentlich auch die explizite Formel, welche in der Abhandlung: „Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen" (Mitt. der Hamb. Math. Ges. Bd. III 1892) für die Anzahlen des Strahls im n-dimensionalen Raum berechnet wird.

Die für das Symbol $[(2)^{2n-2}]$ berechnete Zahl $\frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1}$ tritt auch bei einem *invariantentheoretischen Problem* auf.*) Sie gibt nämlich

*) Siehe D. Hilbert, „Über Büschel von binären Formen mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante". Math. Ann. Bd. 33, 1889, S. 229 ff.

die Zahl der Involutionen n^{ter} Ordnung mit $2n-2$ gegebenen Doppelelementen oder die Zahl der Büschel von binären Formen n^{ter} Ordnung mit vorgeschriebener Funktionaldeterminante an. Um die Übereinstimmung in dem algebraischen Charakter der beiden Probleme zu erkennen, betrachte man z. B. die Gleichungen, welche für $n=4$ in dem Symbol $[(2)^6]$ enthalten sind. Sieht man in denselben statt der x und y die Determinanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_0, x_1, \cdots, x_n \\ y_0, y_1, \cdots, y_n \end{Vmatrix}$$

als Unbekannte an, so erhält man ein Gleichungssystem von derselben Art, wie es in der Arbeit*) von Herrn Brill auftritt, wo eben jenes invariantentheoretische Problem für $n=4$ algebraisch behandelt wird.**)

Tübingen, März 1904.

*) „Über binäre Formen und die Gleichung 6. Grades". Math. Ann. Bd. 20, 1882, S. 330 ff.

**) Ebenso tritt bei der Anzahlbestimmung $[(2)^6]=5$ der algebraische Zusammenhang zwischen zwei Resultaten klar zu Tage, von denen in einer Notiz im 26. Bd. der Math. Ann. 1886 S. 154—156 Herr Fr. Meyer („Über die elliptische Kurve 5. Ord. des Raums von 4 Dimensionen") spricht; es handelt sich um eine Kurve, welche fünf Hyperflächen 2. Ord. im 4-dimensionalen Raum gemeinsam haben. Die Ordnung dieser Kurve ist gleich der Zahl der Involutionen 4. Ordnung mit gemeinsamen Doppelelementen, nämlich gleich 5.

Sur les fonctions cylindriques.

(Extrait d'un Lettre adressée à M. Niels Nielsen, à Copenhague.)

Par

N. Sonin, à St. Pétersbourg.

L'étude de Votre excellent ouvrage*) m'a inspiré quelques considérations sur les intégrales définies contenant les fonctions cylindriques que je vais soumettre dans ce qui suit à Votre approbation.

1. Dans mes *Recherches sur les fonctions cylindriques***) que Vous avez eu la bonté de citer plusieurs fois dans Votre Livre, j'ai déduit la formule

$$(1) \qquad J^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{n+1}}{2^n \Pi(n) a^{m+n+1}} \int_0^a J^m(qx)\, x^{m+1}(a^2-x^2)^n dx,^{***})$$

que Vous employez au § 102 pour la sommation de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n J^{\nu+n+1}(x).$$

J'ai trouvé cette formule en partant de l'expression de $J^m(x)$ par l'intégrale définie

$$(2) \qquad J^m(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^m \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(x+ri) - \frac{x^2}{2a(x+ri)}} \frac{dr}{(x+ri)^{m+1}}, \quad R(m) > -1.$$

Maintenant je pose la question: qu'est ce qu'on peut conclure par rapport à la fonction $F^m(x)$ de deux variables x, m, lorsqu'on sait qu'elle satisfait à l'équation analogue à (1), c'est-à-dire lorsqu'on a

*) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. 1904.

**) Math. Ann. XVI, 86.

***) Cette formule est déduite plusieurs fois dans Votre ouvrage, a savoir: formule (8) § 68; un cas particulier formule (2) § 68, où $n = -m-1$; formule (3) § 32, où par mégarde Vous avez écrit $(\cos\varphi)^{n-1}$ au lieu de $(\cos\varphi)^{-n-1}$.

$$(3) \qquad F^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{n+1}}{2^n \Pi(n) a^{m+n+1}} \int_0^a F^m(xq) x^{m+1} (a^2 - x^2)^n dx?$$

On voit tout d'abord que lorsqu'on connait une fonction qui satisfait à cette égalité, on peut en former une infinité d'autres qui ont la même propriété. Il suffit en effet de substituer qt au lieu de q dans l'égalité (3) et de la multiplier par

$$\frac{\sigma(t)}{t^{m+n+1}}$$

pour voir que les fonctions

$$\sum \frac{F^m(xt)}{t^m} \sigma(t), \qquad \int_\alpha^\beta \frac{F^m(xt)}{t^m} \sigma(t)\, dt$$

ont la même propriété (3), où $\sigma(t)$ désigne une fonction arbitraire de t et la sommation s'étend aux valeurs quelconques de t, pourvu que les expressions ci-dessus soient convergentes.

2. Je vais maintenant déterminer la plus simple solution de l'équation (3) qui se réduit à une puissance avec un coefficient. Posant donc

$$F^m(x) = A_m x^{\varphi(m)},$$

nous aurons de l'équation (3)

$$A_{m+n+1} (aq)^{\varphi(m+n+1)} = \frac{q^{n+1}}{2^n \Pi(n) a^{m+n+1}} A_m q^{\varphi(m)} \int_0^a x^{m+1+\varphi(m)} (a^2 - x^2)^n dx,$$

d'où il suit immédiatement

$$\varphi(m+n+1) = \varphi(m) + n + 1,$$

ou

$$\varphi(m+n+1) - (m+n+1) = \varphi(m) - m = const.,$$

de sorte que

$$\varphi(m) = m + 2k,$$

k étant une constante.

Pour cette expression de $\varphi(m)$ l'égalité précédente donne

$$A_{m+n+1} a^{m+n+1+2k} = \frac{A_m}{2^n \Pi(n) a^{m+n+1}} \int_0^a x^{2m+2k+1} (a^2 - x^2)^n dx.$$

Pour la convergence de l'integrale il faut et il suffit d'admettre

$$m + k + 1 > 0, \qquad n > -1$$

et alors l'égalité devient

$$A_{m+n+1} a^{m+n+1+2k} = \frac{A_m a^{m+n+1+2k}}{2^{n+1} \Pi(n)} \frac{\Pi(m+k)\Pi(n)}{\Pi(m+n+k+1)},$$

d'où l'on obtient

$$A_{m+n+1} \Pi(m+n+k+1) 2^{m+n+1} = A_m \Pi(m+k) 2^m = const.$$

En désignant la constante par $\sigma(k)$, on aura donc

$$F^m(x) = \frac{\sigma(k)}{\Pi(m+k)2^m}\, x^{m+2k}, \qquad m+k+1>0.$$

On conclut de là que la propriété (3) appartient aux fonctions

$$F^m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \int_\alpha^\beta \frac{\sigma(k)x^{2k}}{\Pi(m+k)}\, dk, \qquad F^m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum \frac{\sigma(k)x^{2k}}{\Pi(m+k)},$$

où la somme s'étend aux valeurs quelconques de $k > -m-1$.

Posant $k = l+s$, $\sigma(k) = \frac{(-1)^s}{2^{2l+2s}\Pi(p+s)}$, on aura en particulier

$$(4) \qquad F^m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Pi(p+s)\Pi(m+l+s)}, \qquad m+1+l>0.$$

Pour $l=0$, $p=0$ cette fonction devient $J^m(x)$; pour $p=\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2}$ on obtient la fonction que Vous avez cosidérée au § 18 (p. 54) et désignée $Z^m(x)$: Votre formule (6) au § 32 (p. 95) n'est donc qu'un cas particulier de la formule générale (3) applicable à cette fonction; enfin pour

$$p = l = \frac{\varrho-\nu}{2}, \qquad m=\nu$$

la fonction (4) ne différera que par un facteur $\cos\frac{\pi}{2}(\varrho-\nu)$ de la fonction que Vous avez désignée $\Pi^{\nu,\varrho}(x)$ et nommée fonction de Lommel.

3. En multipliant l'égalité (3) par $a^{m+n+2}\frac{(b^2-a^2)^p}{2^p\Pi(p)}\,da$ et l'intégrant par rapport à a de 0 jusqu'à b, on aura

$$\frac{1}{2^p\Pi(p)}\int_0^b F^{m+n+1}(aq)\, a^{m+n+2}(b^2-a^2)^p\, da$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2^{n+p}\Pi(p)\Pi(n)}\int_0^b a(b^2-a^2)^p\, da \int_0^a F^m(qx)x^{m+1}(a^2-x^2)^n\, dx$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2^{n+p}\Pi(p)\Pi(n)}\int_0^b F^m(qx)\, x^{m+1}dx \int_x^b (a^2-x^2)^n(b^2-a^2)^p a\, da.$$

L'intégrale

$$\int_x^b (a^2-x^2)^n(b^2-a^2)^p a\, da, \qquad n+1>0,\ p+1>0,$$

en y posant

$$a^2 = x^2 + y(b^2 - x^2),$$

se réduit à

$$\frac{1}{2}(b^2-x^2)^{n+p+1}\int_0^1 y^n(1-y)^p\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Pi(n)\,\Pi(p)}{\Pi(n+p+1)}\,(b^2-x^2)^{n+p+1}$$

et la formule précédente devient

$$\frac{1}{2^p\Pi(p)}\int_0^b F^{m+n+1}(aq)\,a^{m+n+2}(b^2-a^2)^p\,da$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2^{n+p+1}\Pi(n+p+1)}\int_0^b F^m(xq)\,x^{m+1}(b^2-x^2)^{n+p+1}\,dx.$$

Or, le second membre de cette égalité, en vertu de l'équation (3), est égal à

$$\frac{b^{m+n+p+2}}{q^{p+1}}\,F^{m+n+p+2}(bq);$$

par conséquent, cette égalité devient

$$F^{m+n+p+2}(bq) = \frac{q^{p+1}}{2^p\Pi(p)\,b^{m+n+p+1}}\int_0^b F^{m+n+1}(aq)\,a^{m+n+2}(b^2-a^2)^p\,da.$$

Le resultat de cette analyse peut etre formulé ainsi:

Lorsqu'on donne une valeur constante quelconque à m et qu'on choisit arbitrairement la fonction d'une variable x pour $F^m(x)$, la formule (3) *servira à former une fonction $F^{m+n+1}(x)$ de deux variables x et $m+n+1>m$ qui possedera la propriété exprimée par l'équation* (3), *où m est supposé variable.*

Posant, par exemple, $F^m(x) = A\,x^{m+2k}$, on aura

$$F^{m+n+1}(aq) = A\,\frac{\Pi(k+m)}{2^{n+1}\Pi(k+m+n+1)}\,(aq)^{m+n+1+2k},\quad k+m+1>0,\quad n+1>0,$$

d'où, en admettant $m+n+1=\nu>m$, on trouve

$$F^\nu(x) = \frac{A\,2^m\Pi(k+m)}{2^\nu\Pi(k+\nu)}\,x^{\nu+2k},\quad \nu>m,\quad k+\nu+1>0,$$

ce qui s'accord avec le résultat précédent obtenu d'une autre manière.

4. Pour $n+1>0$ on a cette formule de Cauchy

$$\frac{a^n}{\Pi(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{a(k+ri)}\,\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}},\quad a>0,\quad R(k)>0,$$

l'intégrale s'annulant lorsqu'on y met $-a$ au lieu de a. On aura donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a^2-x^2}{2a}(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}} = \begin{cases} \frac{(a^2-x^2)^n}{(2a)^n\,\Pi(n)} & \text{pour } x<a, \\ 0 & \text{pour } x>a, \end{cases}$$

En vertu de cette formule l'égalité (3) prendra la forme

$$(5)\quad F^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{n+1}}{2\pi a^{m+1}}\int_0^{\infty} F^m(qx)x^{m+1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a^2-x^2}{2a}(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}}$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2\pi a^{m+1}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)}\frac{dr}{(k+ri)^{n+1}}\int_0^{\infty} F^m(qx)x^{m+1}e^{-\frac{k+ri}{2a}x^2}\,dx.$$

Il suffit donc de connaitre la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} F^m(qx)x^{m+1}e^{-hx^2}dx, \qquad R(h)>0,$$

pour une certaine valeur de m et la formule (5) nous fournira l'expression de $F^\nu(x)$ pour $\nu > m$.

L'égalité (3), étant multipliée par $a^{m+n+2}e^{-ha^2}da$ et intégrée par rapport à a de 0 jusqu'à ∞, donne

$$\int_0^{\infty} F^{m+n+1}(aq)\,a^{m+n+2}e^{-ha^2}\,da$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2^n\,\Pi(n)}\int_0^{\infty} e^{-ha^2}a\,da\int_0^{a} F^m(xq)\,x^{m+1}(a^2-x^2)^n\,dx$$

$$= \frac{q^{n+1}}{2^n\,\Pi(n)}\int_0^{\infty} F^m(xq)\,x^{m+1}\,dx\int_x^{\infty} e^{-ha^2}(a^2-x^2)^n a\,da$$

$$= \left(\frac{q}{2h}\right)^{n+1}\int_0^{\infty} F^m(xq)\,x^{m+1}e^{-hx^2}\,dx.$$

Cette égalité peut être écrite sous la forme

$$\left(\frac{2h}{q}\right)^{n+m+1}\int_0^{\infty} F^{m+n+1}(xq)\,x^{m+n+2}e^{-hx^2}\,dx,$$

$$= \left(\frac{2h}{q}\right)^{m}\int_0^{\infty} F^m(xq)\,x^{m+1}e^{-hx^2}\,dx,$$

d'où l'on voit que l'expression

$$\left(\frac{2h}{q}\right)^m \int_0^\infty F^m(xq)\, x^{m+1} e^{-hx^2}\, dx$$

ne change pas de valeur lorsqu'on augmente m. En supposant q réel et positif et posant $xq = y$, on transforme cette expression en

$$\frac{1}{2h}\left(\frac{2h}{q^2}\right)^{m+1} \int_0^\infty F^m(y)\, y^{m+1} e^{-\frac{h}{q^2}y}\, dy,$$

d'où l'on voit qu'elle a la forme $\frac{1}{2h}\psi\left(\frac{q^2}{h}\right)$, la fonction $\psi(x)$ ne dépendant pas de m. On aura ainsi

$$\int_0^\infty F^m(qx)\, x^{m+1} e^{-hx^2}\, dx = \frac{q^m}{(2h)^{m+1}}\psi\left(\frac{q^2}{h}\right) \tag{6}$$

et la formule (5) donnera

$$F^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{m+n+1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{2}(k+ri)}\,\psi\left(\frac{2aq^2}{k+ri}\right)\frac{dr}{(k+ri)^{m+n+2}} \tag{7}$$

ou l'on peut remplacer a par $2a$, q par $\frac{q}{2}$.

Lorsque la forme de la fonction de deux variables $F^m(x)$ est établie, la formule (6) fournira la fonction $\psi(x)$ pour une valeur particulière de m.

Pour la forme (4) de la fonction $F^m(x)$ on aura

$$\psi(x^2) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+s)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\psi_1(x^2).$$

Posant

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\psi_1(x^2) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+s)},$$

on aura

$$\varphi'(x) = \frac{x^{2p-1}}{2^{p-1}\Pi(p-1)} - \frac{x}{2}\varphi(x),$$

d'ou l'on trouve pour $p > 0$

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2^{2p-1}\Pi(p-1)}\int_0^x e^{\frac{y^2}{4}}\, y^{2p-1}dy.$$

Cette formule fournira aussi la valeur de $\varphi(x)$ à la limite $p=0$, lors qu'on écrira

$$\varphi(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2^{2p}\Pi(p)}\int_0^x e^{\frac{y^2}{4}}dy^{2p}=\frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{2^{2p}\Pi(p)}\left[e^{\frac{x^2}{4}}x^{2p}-\int_0^x y^{2p}d\cdot e^{\frac{y^2}{4}}\right],$$

d'où l'on trouve, en passant à la limite $p=0$:

$$\varphi(x)=e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Posant dans l'intégrale qui represente $\varphi(x)$ $y=xt$, on obtient

$$\varphi(x)=\frac{2}{\Pi(p-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^1 e^{\frac{x^2t^2}{4}}t^{2p-1}dt,$$

d'où l'on conclut

$$\psi_1(x^2)=\frac{2}{\Pi(p-1)}\int_0^1 e^{-x^2\frac{1-t^2}{4}}t^{2p-1}dt$$

$$=\frac{1}{\Pi(p-1)}\int_0^1 e^{-\frac{x^2t}{4}}(1-t)^{p-1}dt, \qquad p>0.$$

Lorsque $p<0$, désignons par g un nombre entier tel que $p+g>0$ et nous pourrons écrire

$$\varphi(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\sum_{s=0}^{s=g-1}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+s)}+(-1)^g\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+2g}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+g+s)}$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\sum_{s=0}^{s=g-1}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+s)}\cdot$$

$$+\frac{2(-1)^g}{\Pi(p+g-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+2g}e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^1 e^{\frac{x^2t^2}{4}}t^{2p+2g-1}dt,$$

d'où l'on obtient

$$\psi_1(x^2)=\sum_{s=0}^{s=g-1}\frac{(-x^2)^s}{2^{2s}\Pi(p+s)}+\frac{2(-x^2)^g}{2^{2g}\Pi(p+g-1)}\int_0^1 e^{-x^2\frac{1-t^2}{4}}t^{2p+2g-1}dt$$

En nous bornant au cas $p > 0$, nous aurons pour la fonction (4), en appliquant la formule (7):

$$F^m(aq) = \left(\frac{q}{2}\right)^{m+2l} \frac{2a^l}{\Pi(p-1)} \int_0^1 t^{2p-1} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a(k+ri) - \frac{aq^2}{4} \frac{1-t^2}{k+ri}} \frac{dr}{(k+ri)^{m+l+1}}$$

$$= \left(\frac{aq}{2}\right)^l \frac{2}{\Pi(p-1)} \int_0^1 \frac{J^{m+l}(aq\sqrt{1-t^2})}{(\sqrt{1-t^2})^{m+l}} t^{2p-1} dt,$$

ce qui pour $t = \sin\varphi$ reproduira Votre formule (1) § 32.

5. La formule (1) s'est presentée dans mes *Recherches* ··· comme un cas particulier, pour $z = 0$, de la formule*)

$$(8) \qquad a^{m+n+1} q^m z^n \frac{J^{m+n+1}(a\sqrt{q^2+z^2})}{(\sqrt{q^2+z^2})^{m+n+1}}$$

$$= \int_0^a J^m(qx) x^{m+1} J^n\left(z\sqrt{a^2-x^2}\right) \sqrt{a^2-x^2}^n dx, \qquad m > -1,\ n > -1.$$

Cette formule definit presque complètement la fonction analytique $J^m(x)$. En effet, q et z étant quelconques, nous devons admettre que dans un certain domaine la fonction

$$\frac{J^{m+n+1}(a\sqrt{q^2+z^2})}{(\sqrt{q^2+z^2})^{m+n+1}}$$

sera développable en série procédant suivant les puissance de q^2, ce qui conduit a cette forme de la fonction $J^m(q)$:

$$J^m(q) = \left(\frac{q}{2}\right)^m \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s^m (-q^2)^s}{2^{2s}\Pi(m+s)}.$$

En divisant l'égalité (8) par $q^m z^n$ et posant $q = 0$, $z = 0$, on aura

$$A_0^{m+n+1} = A_0^m \cdot A_0^n.$$

En substituant ici successivement

$$m+n+1,\ m+2(n+1), \cdots, m+(p-1)(n+1)$$

au lieu de m, on trouvera aisément

$$A_0^{m+p(n+1)} = A_0^m (A_0^n)^p,$$

*) Votre Livre, p. 181, form. (7).

d'où il résulte pour $n = 0$

$$A_0^{m+p} = A_0^m (A_0^0)^p$$

et pour $n + 1 = \frac{s}{p}$, où s est un nombre entier positif,

$$A_0^{m+s} = A_0^m (A_0^0)^s = A_0^m \left(A_0^{\frac{s}{p}-1}\right)^p.$$

Cela nous donne

$$A_0^{\frac{s}{p}-1} = (A_0^0)^{\frac{s}{p}},$$

d'où il suit définitivement, en posant $A_0^0 = \alpha$,

$$A_0^m = (A_0^0)^{m+1} = \alpha^{m+1}.$$

Pour $z = 0$ la formule (8) deviendra

$$a^{m+n+1} J^{m+n+1}(aq) = \frac{q^{n+1}\alpha^{n+1}}{2^n \Pi(n)} \int_0^a J^m(qx) x^{m+1} (a^2 - x^2)^n dx,$$

et la comparaison des termes en $q^{m+n+1+2s}$ aux deux membres de cette égalité donnera

$$A_s^{m+n+1} = \alpha^{n+1} A_s^m,$$

d'où il suit

$$\frac{A_s^{m+n+1}}{\alpha^{m+n+2}} = \frac{A_s^m}{\alpha^{m+1}} = A_s,$$

où A_s ne dépend pas de m et $A_0 = 1$.

On aura donc

$$J^m(q) = \left(\frac{q}{2}\right)^m \alpha^{m+1} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s (-q^2)^s}{2^{2s} \Pi(m+s)}.$$

Lorsqu'on introduit cette expression dans l'équation (8), on sera conduit à l'égalité

$$A_s (q^2 + z^2)^s = \sum A_p A_g q^{2p} z^{2g}, \qquad p + g = s,$$

qui donne

$$A_{p+g} \binom{p+g}{p} = A_{p+g} \frac{(p+g)!}{p!\, g!} = A_p \cdot A_g,$$

d'où il suit

$$A_s \cdot s! = (A_1)^s = \beta^{2s}.$$

Si l'on pose maintenant $\alpha = \mathsf{A}\beta$, on conclut que *la fonction analytique la plus générale qui a la propriété exprimée par l'égalité* (8) *est*

$$\mathsf{A}^{m+1} \beta J^m(\beta x),$$

où β, A *sont deux constantes arbitraires.*

6. En multipliant l'égalité (8) par $e^{-hq^2} q^{m+1} dq$ et intégrant les deux membres entre les limites 0 et ∞, on aura (§ 53 de mes *Recherches*):

$$a^{m+n+1}z^n\int_0^x \frac{J^{m+n+1}(a\sqrt{q^2+z^2})}{(\sqrt{q^2+z^2})^{m+n+1}}\,e^{-hq^2}q^{2m+1}\,dq$$

$$=\int_0^a J^n\left(z\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n x^{m+1}\,dx\int_0^\infty J^m(qx)\,e^{-hq^2}q^{m+1}\,dq$$

$$=\int_0^a J^n\left(z\sqrt{a^2-x^2}\right)\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^n e^{-\frac{x^2}{4h}}\,\frac{x^{2m+1}}{(2h)^{m+1}}\,dx$$

$$=2^m\int_0^{\frac{a^2}{4h}} J^n\left(z\sqrt{a^2-4hy}\right)\left(\sqrt{a^2-4hy}\right)^n e^{-y}y^m\,dy,$$

où l'on a posé $x^2=4hy$, en supposant h réel.

Nous supposons maintenant h très petit et décomposons la dernière intégrale en deux autres, à savoir

$$\int_0^{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}+\int_{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}^{\frac{a^2}{4h}}.$$

Soit $z=u+vi$, $z'=u-vi$. En appliquant toujours le premier théorème de la moyenne, nous aurons

$$\frac{1}{z^n}\int_0^{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}=\frac{1}{2}\left[\frac{J^n\left(az\sqrt{1-\Theta\sqrt{h}}\right)}{z^n}+\frac{J^n\left(az'\sqrt{1-\Theta\sqrt{h}}\right)}{z'^n}\right]\left(a\sqrt{1-\Theta\sqrt{h}}\right)^n\int_0^{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}e^{-y}y^m dy$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{J^n\left(az\sqrt{1-\Theta'\sqrt{h}}\right)}{z^n}-\frac{J^n\left(az'\sqrt{1-\Theta'\sqrt{h}}\right)}{z'^n}\right]\left(a\sqrt{1-\Theta'\sqrt{h}}\right)^n\int_0^{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}e^{-y}y^m dy,$$

$$\frac{1}{z^n}\int_{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}^{\frac{a^2}{4h}}=\frac{1}{2}\left[\frac{J^n\{az\eta(1-\sqrt{h})\}}{\{az\eta(1-\sqrt{h})\}^n}+\frac{J^n\{az'\eta(1-\sqrt{h})\}}{\{az'\eta(1-\sqrt{h})\}^n}\right]\int_{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}^{\frac{a^2}{4h}}e^{-y}y^m(a^2-4hy)^n dy$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{J^n\{az\eta'(1-\sqrt{h})\}}{\{az\eta'(1-\sqrt{h})\}^n}-\frac{J^n\{az'\eta'(1-\sqrt{h})\}}{\{az'\eta'(1-\sqrt{h})\}^n}\right]\int_{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}^{\frac{a^2}{4h}}e^{-y}y^m(a^2-4hy)^n dy,$$

où Θ, Θ', η, η' sont contenus entre 0 et 1. Remarquant maintenant que la fonction $e^{-y}y^m$ diminue toujours entre $\frac{a^2}{4\sqrt{h}}$ et $\frac{a^2}{4h}$, lorsque h est assez petit, nous aurons

$$0 < \int_{\frac{a^2}{4\sqrt{h}}}^{\frac{a^2}{4h}} e^{-y} y^m (a^2 - 4hy)^n dy < e^{-\frac{a^2}{4\sqrt{h}}} \left(\frac{a^2}{4\sqrt{h}}\right)^m \frac{[a^2(1-\sqrt{h})]^{n+1}}{4h(n+1)}, \quad n+1>0.$$

Nous avons effectué ce calcul pour pouvoir passer à la limite $h=0$, ce qui nous fournira, en vertu d'un théorème connu de Dirichlet,

$$(9) \qquad J^n(az) = \frac{a^{m+1} z^n}{2^m \Pi(m)} \int_0^\infty \frac{J^{m+n+1}(a\sqrt{q^2+z^2})}{(\sqrt{q^2+z^2})^{m+n+1}} q^{2m+1} dq,$$

lorsque l'intégrale est convergente.

7. Posons en premier lieu $n+m+1=\frac{1}{2}$ et remarquons que $J^{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$. La formule (9) devient, lorsqu'on y change m en $-m$,

$$(10) \qquad J^{m-\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{m-\frac{1}{2}}}{2^{-m}\Pi(-m)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{q^2+z^2})}{\sqrt{q^2+z^2}} q^{1-2m} dq,$$

où il faut admettre pour la convergence de l'intégrale $0<m<1$. Nous choisirons celle de deux valeurs du radical dont la partie réelle est positive et nous poserons

$$\sqrt{q^2+z^2} \mp z = y,$$

où le signe devant z doit être contraire à celui de la partie réelle de z, de sorte qu'on ait $y=0$ pour $q=0$. Lorsque $z=u+vi$ et qu'on admet $y=U+Vi$, on aura

$$q^2 = y(y \pm 2z) = U^2 - V(V \pm 2v) + 2i(UV \pm Vu \pm Uv),$$

d'où il suit

$$UV \pm Vu \pm Uv = 0,$$

ou

$$(U \pm u)(V \pm v) = uv.$$

On voit donc que le point y décrit une branche de l'hyperbole équilatérale qui passe par l'origine des coordonnées et a pour asymptotes deux droites menées par le point $-z$ parallèlement aux axes.

La formule (10) devient par l'introduction de la variable y:

$$(11) \qquad J^{m-\frac{1}{2}}(z) = \frac{z^{m-\frac{1}{2}}}{2^{-m}\Pi(-m)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m (y \pm 2z)^m}, \quad 0<m<1.$$

Cette intégrale est prise le long de la branche de l'hyperbole; mais on peut remplacer ce chemin par un autre composé de l'axe réel et d'une droite menée à l'infini parallèlement à l'axe imaginaire entre l'axe réel et l'asymptote de l'hyperbole. L'intégrale prise le long de cette dernière droite (où $y=\infty+Vi$ et V prend les valeurs de 0 jusqu'à $\mp v$) étant évidemment égale à zéro, nous pouvons admettre que la variable y dans l'intégrale (11) reste réelle.

En divisant la formule (11) par $z^{m-\frac{1}{2}}$ et posant $z=0$, on trouve,

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\,dy}{y^{2m}} = \frac{\Pi(-m)}{2^{2m}\Pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\pi}, \qquad 0<m<1,$$

où, en remplaçant m par $\frac{m}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\,dy}{y^m} = \frac{\Pi\left(-\frac{m}{2}\right)}{2^m\Pi\left(\frac{m-1}{2}\right)}\sqrt{\pi}, \qquad 0<m<2,$$

L'intégration par parties donnera

$$\int_0^\infty \frac{\cos y\,dy}{y^m} = m\int_0^\infty \frac{\sin y\,dy}{y^{m+1}} = m\,\frac{\Pi\left(-\frac{m+1}{2}\right)}{2^{m+1}\Pi\left(\frac{m}{2}\right)}\sqrt{\pi}, \qquad 0<m<1.$$

On réduit aisement ces valeurs des intégrales d'Euler que nous avons obtenues en passant aux formes ordinaires

$$\int_0^\infty \frac{\sin y\,dy}{y^m} = \Pi(-m)\cos\frac{m\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos y\,dy}{y^m} = \Pi(-m)\sin\frac{m\pi}{2}, \quad 0<m<1,$$

à l'aide des égalités

$$\Pi(x-1)\,\Pi(-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}, \qquad \Pi(x-1)\,\Pi\left(x-\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2x}\Pi(2x-1)\sqrt{\pi}.$$

8. La formule (11) fournit la fonction asymptotique de $J^{m-\frac{1}{2}}(s)$ au moyen de l'integration par parties.

Nous allons considérer l'intégrale plus générale

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\sin(y\pm z)\,dy}{y^m(y+u)^n}, \qquad 0<m<1,\ n>0,\ R(u)>0.$$

En l'écrivant sous la forme

$$\varpi = -\int_0^\infty \frac{1}{(y+u)^n}\, d\int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m},$$

nous aurons, en intégrant par parties:

$$\varpi = \frac{1}{u^n}\int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m} - n\int_0^\infty \frac{dy}{(y+u)^{n+1}}\int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m}.$$

L'intégration par parties du second terme donnera de nouveau

$$\varpi = \frac{1}{u^n}\int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m} - \frac{n}{u^{n+1}}\int_0^\infty dy \int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m}$$

$$+ n(n+1)\int_0^\infty \frac{dy}{(y+u)^{n+2}}\int_y^\infty dy \int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m}$$

etc. et l'on aura en général

$$\varpi = \frac{1}{u^n}\int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m} + \sum_{s=1}^{s=k-1} \frac{d^s u^{-n}}{du^s}\int_0^\infty dy \int_y^{\infty(s)} \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m}$$

$$+ \frac{d^k}{du^k}\int_0^\infty \frac{dy}{(y+u)^n}\int_y^{\infty(k)} \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m}.$$

Pour calculer les coefficients rémarquons que l'intégrale multiple

$$\int_0^\infty dy \int_y^{\infty(s)} \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^{s+m}},$$

qui peut être représentée sous la forme

$$\int_0^\infty dy \int_y^\infty dy_1 \int_{y_1}^\infty dy_2 \cdots \int_{y_{s-2}}^\infty dy_{s-1} \int_{y_{s-1}}^\infty \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}},$$

s'évalue aisément au moyen de la formule de transformation

$$\int_a^b dx \int_x^b f(x,y)\, dy = \int_a^b dy \int_a^y f(x,y)\, dx$$

que l'on appliquera successivement. On aura

$$\int_{y_{s-2}}^{\infty} dy_{s-1} \int_{y_{s-1}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} = \int_{y_{s-2}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} \int_{y_{s-2}}^{y_s} dy_{s-1}$$

$$= \int_{y_{s-2}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} (y_s - y_{s-2}),$$

$$\int_{y_{s-3}}^{\infty} dy_{s-2} \int_{y_{s-2}}^{\infty} dy_{s-1} \int_{y_{s-1}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} = \int_{y_{s-3}}^{\infty} dy_{s-2} \int_{y_{s-2}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} (y_s - y_{s-2})$$

$$= \int_{y_{s-3}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} \frac{(y_s - y_{s-3})^2}{2}, \cdots$$

$$\int_{y}^{\infty} dy_1 \int_{y_1}^{\infty} dy_2 \cdots \int_{y_{s-1}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} = \int_{y}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} \frac{(y_s - y)^{s-1}}{(s-1)!},$$

enfin

$$\int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} dy_1 \cdots \int_{y_{s-1}}^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^{s+m}} = \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} \frac{\sin(y_s \pm z)\, dy_s}{y_s^m}.$$

On obtient ce résultat autrement, en réduisant les limites des intégrales à 1 et ∞, ce qu'on fait en posant successivement

$$y_s = y_{s-1} \lambda_s,\ y_{s-1} = y_{s-2} \lambda_{s-1},\ \cdots,\ y_2 = y_1 \lambda_2,\ y_1 = y \lambda_1.$$

On réduit ainsi l'intégrale dont il s'agit à celle-ci:

$$\int_0^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1^2} \int_1^{\infty} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2^3} \cdots \int_1^{\infty} \frac{d\lambda_{s-1}}{\lambda_{s-1}^s} \int_1^{\infty} \frac{\sin(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s y \pm z)}{(\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s y)^m} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s \frac{d\lambda_s}{\lambda_s^{s+1}}$$

qui est égale à

$$\int_1^{\infty} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1^2} \int_1^{\infty} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2^3} \cdots \int_1^{\infty} \frac{d\lambda_s}{\lambda_s^{s+1}} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda \pm z)\, d\lambda}{\lambda^m} = \frac{1}{s!} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda \pm z)\, d\lambda}{\lambda^m},$$

où l'on a posé $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_s y = \lambda$.

Posant

$$\int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} \frac{\sin(y \pm z)\, dy}{y^m} = \varphi(\pm z, s, m),$$

nous aurons donc

$$\varphi(\pm z, s, m+s) = \frac{1}{s!}\int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m}.$$

D'après cela on détermine aisément la valeur de

$$\varphi(\pm z, s, m+s-1) = \int_0^\infty dy \int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^{m+s-1}},$$

en remarquant que l'intégration par parties donne

$$\int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^{m+s-1}} = -\frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)}{y^{m+s-1}} + (m+s-1)\int_y^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)dy}{y^{m+s}},$$

d'où l'on trouvera

$$\varphi(\pm z, s, m+s-1)$$
$$= -\varphi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, s-1, m+s-1\right) + (m+s-1)\,\varphi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, s, m+s\right)$$
$$= \left[-\frac{1}{(s-1)!} + \frac{m+s-1}{s!}\right]\int_0^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)dy}{y^m},$$

et finalement

$$\varphi(\pm z, s, m+s-1) = \frac{m-1}{s!}\int_0^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)dy}{y^m}.$$

Remarquant que

$$\int_y^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^{m+s-2}} = -\frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)}{y^{m+s-2}} + (m+s-2)\int_y^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - \frac{\pi}{2}\right)dy}{y^{m+s-1}},$$

on trouvera:

$$\varphi(\pm z, s, m+s-2)$$
$$= -\varphi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, s-1, m+s-2\right) + (m+s-2)\,\varphi\left(\pm 2 - \frac{\pi}{2}, s, m+s-1\right)$$
$$= \left[-\frac{m-1}{(s-1)!} + (m+s-2)\frac{m-1}{s!}\right]\int_0^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy}{y^m},$$

d'où

$$\varphi(\pm z, s, m+s-2) = \frac{(m-1)(m-2)}{s!}\int_0^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy}{y^m}.$$

En continuant ainsi, on trouve à la fin:

$$\varphi(\pm z, s, m) = \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-s)}{s!}\int_0^\infty \frac{\sin\left(y \pm z - s\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy}{y^m}.$$

Les coefficients du développement de l'intégrale

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m(y+u)^n}$$

seront donc connus, parce que

$$\int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m} = \Pi(-m)\cos\left(\pm z - \frac{m\pi}{2}\right).$$

9. Pour transformer l'intégrale

$$R_k = \frac{d^k}{du^k}\int_0^\infty \frac{dy}{(y+u)^n}\int_y^{\infty(k)} \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m},$$

qui représente le terme complementaire dans le développement de l'intégrale ω, posons

$$\int_y^{\infty(k)} \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m} = \psi(\pm z, k, m),$$

et nous trouverons, en intégrant par parties:

$$\psi(\pm z, k, m) = \psi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, k-1, m\right) + m\psi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, k, m+1\right),$$

où l'on aura, en vertu de cette même formule:

$$\psi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, k-1, m\right)$$
$$= -\psi\left(\pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}, k-2, m\right) + m\psi\left(\pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}, k-1, m+1\right),$$
$$\psi\left(\pm z - \frac{\pi}{2}, k, m+1\right)$$
$$= -\psi\left(\pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}, k-1, m+1\right) + (m+1)\psi\left(\pm z - 2\cdot\frac{\pi}{2}, k, m+2\right).$$

En substituant ces expressions, on obtient

$$\psi(\pm z,k,m)=\psi\left(\pm z-2\cdot\frac{\pi}{2},k-2,m\right)-2m\psi\left(\pm z-2\cdot\frac{\pi}{2},k-1,m+1\right)$$
$$+m(m+1)\,\psi\left(\pm z-2\cdot\frac{\pi}{2},k,m+2\right).$$

En répétant le même procédé, on parvient à la formule

$$\psi(\pm z,k,m)=(-1)^s\left\{\psi\left(\pm z-s\cdot\frac{\pi}{2},k-s,m\right)-\binom{s}{1}m\psi\left(\pm z-s\cdot\frac{\pi}{2},k-s+1,m+1\right)\right.$$
$$+\binom{s}{2}m(m+1)\,\psi\left(\pm z-s\cdot\frac{\pi}{2},k-s+2,m+2\right)+\cdots$$
$$\left.+\binom{s}{s}m(m+1)\cdots(m+s-1)\,\psi\left(\pm z-s\cdot\frac{\pi}{2},k,m+s\right)\right\}$$

que l'on démontre par l'induction complète. Pour $s=k$ le résultat peut s'écrire ainsi:

$$\psi(\pm z,k,m)=(-1)^k\frac{\sin\left(y\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{y^m}$$
$$+(-1)^k\sum_{s=1}^{s=k}(-1)^s\binom{k}{s}m(m+1)\cdots(m+s-1)\,\psi\left(\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2},s,m+s\right).$$

Mais nous avons déjà trouvé une formule que l'on peut écrire sous la forme:

$$\psi(\pm z,s,m+s)=\int_y^\infty\frac{\sin^{(s)}(y\pm z)\,dy}{y^{m+s}}=\int_y^\infty\frac{\sin(t\pm z)}{t^{m+s}}\,\frac{(t-y)^{s-1}}{(s-1)!}\,dt;$$

on aura donc:

$$\psi(\pm z,k,m)=(-1)^k\frac{\sin\left(y\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{y^m}$$
$$+(-1)^k\int_y^\infty\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=1}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}s\,(t-y)^{s-1}t^{k-s}\,dt,$$

ce qui se réduit à

$$\psi(\pm z,k,m)=(-1)^{k+1}\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s\,t^{k-s}\,dt.$$

Par conséquent l'expression de R_k devient

$$R_k=(-1)^{k+1}\frac{d^k}{du^k}\int_0^u\frac{dy}{y+u}\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{\sin\left(t=z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}dt$$

$$=-n(n+1)\cdots(n+k-1)\int_0^u\frac{dy}{y+u)^{n+k}}\frac{d}{dy}\int_y^\infty\frac{\sin\left(t=z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}dt$$

Le polynôme homogène du $k^{\text{ième}}$ degré

$$\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}$$

peut être considéré comme l'ensemble des termes du même degré dans le développement du produit

$$(1+t)^k\cdot(1+t-y)^{-m}=(1+t)^{k-m}\cdot\left(1-\frac{y}{1+t}\right)^{-m}$$

$$=(1+t)^{k-m}-\binom{-m}{1}(1+t)^{k-1-m}y+\binom{-m}{2}(1+t)^{k-2-m}y^2-\cdots$$

$$+\binom{-m}{k}(1+t)^{-m}(-y)^k+\cdots;$$

d'où l'on voit que le polynôme dont il s'agit sera égal à

$$\binom{k-m}{k}t^k-\binom{-m}{1}\binom{k-1-m}{k-1}t^{k-1}y+\binom{-m}{2}\binom{k-2-m}{k-2}t^{k-2}y^2-\cdots$$

$$+\binom{-m}{k}(-y)^k.$$

Il est facile de voir qu'en vertu de la condition $0<m<1$ tous les coefficients de $t^{k-s}y^s$ dans ce polynôme seront positifs, $s=0,1,2,\cdots,k$.

Par conséquent, l'expression

$$\frac{1}{t^k}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}$$

représente une fonction décroissante de t, dont les valeurs seront: 1 pour $t=y$ et $\binom{k-m}{k}=(-1)^k\binom{m-1}{k}$ pour $t=\infty$.

Nous allons maintenant appliquer le second théorème de la moyenne qui consiste dans l'égalité

$$\int_a^b \psi(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(a)\int_a^{\xi}\psi(t)\,dt + \varphi(b)\int_{\xi}^{b}\psi(t)\,dt, \quad a<\xi<b,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction monotone.

Nous aurons

$$\int_y^{\infty} \frac{\sin\left(t \pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^m}\cdot\frac{1}{t^k}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s\,t^{k-s}\,dt$$

$$= \cos\left(\pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\left[\int_y^{y'}\frac{\sin t\,dt}{t^m} + \binom{k-m}{k}\int_{y'}^{\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^m}\right]$$

$$+ \sin\left(\pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\left[\int_y^{y''}\frac{\cos t\,dt}{t^m} + \binom{k-m}{k}\int_{y''}^{\infty}\frac{\cos t\,dt}{t^m}\right], \quad y'>y, y''>y,$$

d'où l'on voit que l'intégrale s'annule pour $y = \infty$.

En faisant l'intégration par parties dans la dernière expression de R_k, on obtient

$$R_k = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{u^{n+k}}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^m}dt\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}$$

$$-n(n+1)\cdots(n+k)\int_0^{\infty}\frac{dy}{(y+u)^{n+k+1}}\int_y^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s\,t^{k-s}\,dt,$$

où le premier terme est égal à

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-k)}{k!}\,\frac{d^k u^{-n}}{du^k}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^m}dt,$$

c'est-à-dire au terme du développement de ω qui suit celui auquel nous avons arrêté ce développement; par conséquent le second terme de l'expression de R_k est égal à R_{k+1}.

En supposant u et z réels et appliquant le second théorème de la moyenne, nous pouvons affirmer que le second terme de R_k est égal à

$$R_{k+1}=-\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{u^{n+k+1}}\int_0^{y'}dy\int_y^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}\,dt,$$

où y' désigne un nombre positif inconnu.

Si l'on applique le second théorème de la moyenne immédiatement à l'expression

$$R_k=-n(n+1)\cdot\cdot$$

$$\cdot\cdot(n+k-1)\int_0^{\infty}\frac{dy}{(y+u)^{n+k}}\frac{d}{dy}\int_y^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-y)^s t^{k-s}\,dt,$$

on aura

$$R_k=-\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{u^{n+k}}\left\{\int_{\xi}^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-\xi)^s t^{k-s}\,dt\right.$$

$$\left.-\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}\,dt\right\}$$

où, en vertu du même théorème,

$$\int_{\xi}^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m+k}}\sum_{s=0}^{s=k}\binom{k}{s}\binom{-m}{s}(t-\xi)^s t^{k-s}\,dt$$

$$=\int_{\xi}^{\xi'}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m}}dt+\binom{k-m}{k}\int_{\xi'}^{\infty}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m}}dt,\quad \xi'>\xi>0,$$

de sorte qu'on trouve finalement:

$$R_k=-\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{u^{n+k}}\left\{\int_{\xi}^{\xi'}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m}}dt\right.$$

$$\left.-\binom{k-m}{k}\int_0^{\xi'}\frac{\sin\left(t\pm z-k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^{m}}dt\right\}.$$

L'expression de R_{k+1} s'obtient de là en remplaçant k par $k+1$.

Nous pouvons donc écrire aussi

$$R_k = \frac{(m-1)(m-2)\cdots m-k)}{k!}\frac{d^k u^{-n}}{du^k}\int_0^\infty \frac{\sin\left(t \pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{t^m}\,dt$$

$$-\frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{u^{n+k+1}}\left\{\int_\xi^{\xi'} \frac{\sin\left[t \pm z - (k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{t^m}\,dt\right.$$

$$\left. -\binom{k+1-m}{k+1}\int_0^{\xi'} \frac{\sin\left[t \pm z - (k+1)\frac{\pi}{2}\right]}{t^m}\,dt\right\}.$$

Lorsque u et z sont complexes, on trouvera d'une manière analogue que

$$R_k = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{u^{n+k}}\left\{A\cos\left(\pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + B\sin\left(\pm z - k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

où les coefficients A et B restent finis pour $u=\infty$; la fonction décroissante, dont on fera usage en ce cas, sera $\frac{1}{|y+u|}n+k$.

En récapitulant les résultats, nous aurons

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\sin(y \pm z)\,dy}{y^m(y+u)^n} = \Pi(-m)\sum_{s=0}^{s=k-1}\binom{m-1}{s}\frac{d^s u^{-n}}{du^s}\cos\left(\pm z - \frac{m+s}{2}\pi\right) + R_k,$$

$$0<m<1,\ n>0,\ R(u)>0.$$

10. On peut obtenir ce développement d'une autre manière, en transformant l'intégrale par la méthode de Cauchy, savoir en y substituant

$$\frac{1}{\Pi(n-1)u^n}\int_0^\infty e^{-t-\frac{y}{u}t}t^{n-1}\,dt$$

au lieu de $\frac{1}{(y+u)^n}$. On trouve alors

$$\omega = \frac{1}{\Pi(n-1)u^n}\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}\,dt\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}y}\sin(y \pm z)y^{-m}\,dy,$$

où l'on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}y}\sin(y\pm s)\,y^{-m}\,dy$$

$$=\frac{1}{2i}\left\{e^{\pm si}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{u}-i\right)y}y^{-m}\,dy-e^{\mp si}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{u}+i\right)y}y^{-m}\,dy\right\}$$

$$=\frac{\Pi(-m)}{2i}\left\{e^{\pm si}\left(\frac{t}{u}-i\right)^{m-1}-e^{\mp si}\left(\frac{t}{u}+i\right)^{m-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Pi(-m)\left\{e^{\left(\pm s-\frac{m\pi}{2}\right)i}\left(1+\frac{ti}{u}\right)^{m-1}+e^{-\left(\pm s-\frac{m\pi}{2}\right)i}\left(1-\frac{ti}{u}\right)^{m-1}\right\}.$$

Donc

$$\omega=\frac{\Pi(-m)}{2\Pi(n-1)u^n}\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt\left\{e^{\left(\pm s-\frac{m\pi}{2}\right)i}\left(1+\frac{ti}{u}\right)^{m-1}\right.$$
$$\left.+e^{-\left(\pm s-\frac{m\pi}{2}\right)i}\left(1-\frac{ti}{u}\right)^{m-1}\right\}dt.$$

Cette intégrale existe pour $R(u)>0$, $n>0$, quel que soit le nombre m. En y portant les développements

$$\left(1\pm\frac{ti}{u}\right)^{m-1}$$

$$=\sum_{s=0}^{s=k-1}\binom{m-1}{s}\left(\pm\frac{ti}{u}\right)^s+\binom{m-1}{k}\left(\pm\frac{ti}{u}\right)^k\int_0^1 k(1-\mu)^{k-1}\left(1\pm\frac{\mu ti}{u}\right)^{m-1-k}d\mu,$$

où $(\pm i)^s=(-1)^s e^{\mp\frac{s\pi}{2}i}$, on retrouve le développement de ω avec cette expression du terme complementaire, à savoir

$$R_k=\frac{\Pi(-m)}{2\Pi(n-1)u^{n+k}}\binom{m-1}{k}\int_0^\infty e^{-t}t^{n+k-1}dt\int_0^1 k(1-\mu)^{k-1}\left\{e^{\left(\pm s-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1+\frac{\mu ti}{u}\right)^{m-k-1}\right.$$
$$\left.+e^{-\left(\pm s-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1-\frac{\mu ti}{u}\right)^{m-k-1}\right\}d\mu$$

En supposant u et z réels et appliquant le premier théorème de la moyenne, nous aurons

$$R_k = \frac{\Pi(-m)}{2\Pi(n-1)u^{n+k}}\binom{m-1}{k}\int_0^\infty e^{-t}t^{n+k-1}\left\{e^{\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1+\frac{\mu' ti}{u}\right)^{m-k-1}\right.$$
$$\left. + e^{-\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1-\frac{\mu' ti}{u}\right)^{m-k-1}\right\}dt,$$

$0<\mu'<1$, où l'on peut appliquer le même théorème de la moyenne, surtout lorsque $m<k+1$, et nous obtiendrons

$$R_k = \frac{\Pi(-m)\Pi(n+k-1)}{2\Pi(n-1)u^{n+k}}\binom{m-1}{k}\left\{e^{\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1+\frac{\mu'' t' i}{u}\right)^{m-k-1}\right.$$
$$\left. + e^{-\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)i}\left(1-\frac{\mu'' t' i}{u}\right)^{m-k-1}\right\},$$

$0<\mu''<1$, $0<t'<\infty$. Nous concluons de là que

$$R_k = \frac{\Pi(-m)\Pi(n+k-1)}{\Pi(n-1)u^{n+k}}\binom{m-1}{k}\left\{A_k\cos\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)+B_k\sin\left(\pm z-\frac{m-k}{2}\pi\right)\right\},$$

où A_k et B_k sont moindres en valeur absolue que $\left|1+\frac{\mu'' t' i}{u}\right|^{m-k-1}$, ou simplement 1 lorsque $m<k+1$.

Cette seconde méthode de touver le développement de ω est beaucoup plus succincte que celle que nous avons exposée précédement; mais elle a un grave défaut: c'est qu'elle exige nécéssairement l'emploi des imaginaires lors même que n et z sont réels.

11. Revenant à la formule (11), nous trouverons aisément la fonction asymptotique de $J^m(z)$ pour $-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$. Remarquant maintenant que

$$J^{m+1}(z) = -z^m\frac{d}{dz}\frac{J^m(z)}{z^m},$$

nous trouverons l'expression de $J^{m+1}(z)$ par deux intégrales du type ω et par suite la fonction asymptotique pour $J^{m+1}(z)$. Enfin les formules qui servent à exprimer $J^{m\pm p}(z)$ au moyen de $J^m(z)$, $J^{m+1}(z)$, p étant un entier positif, (votre Livre, § 11, formules (4) et (5)) permettront de trouver la fonction asymptotique pour $J^{m\pm p}(z)$ et de conclure comment se comporte cette fonction, lorsque la partie réelle de z augmente indéfiniment.

On conclura alors que la formule (9) aura lieu pour $n > m - \frac{1}{2}$, $n > -1$, $m > -1$.

J'ai développé en détail un exemple de l'emploi de la propriété caractéristique de la fonction $J^m(z)$ exprimée par l'égalité (8). Si on multiplie cette égalité par $J^m(qb)\,qdq$, qu'on l'intègre entre 0 et η et qu'on passe à la limite $\eta = \infty$ on retrouve ma formule générale ω_3 etc. etc.

St. Pétersbourg, le 6 Mai 1904.

Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der unter obigem Titel in Band 57 dieser Annalen erschienenen Abhandlung habe ich mit Herrn W. Stekloff die Entdeckung des Theoremes, welches ich dort als Fundamentalsatz der Fourierschen Konstanten bezeichnete, Herrn Liapounoff, den ersten in vollständiger Form veröffentlichten Beweis aber mir selbst zugeschrieben. Neuerdings erhielt ich nun durch die Güte des Herrn de la Vallée Poussin eine von diesem im Jahre 1893 veröffentlichte Note „Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson"*), in welcher man nicht nur den Fundamentalsatz aufgestellt und bewiesen, sondern auch seine Anwendung auf die „Integration der Äquivalenzen" findet. (§ 7 meiner Arbeit.) Ich möchte hiermit die Priorität des Herrn de la Vallée Poussin ausdrücklich anerkennen. Bei dieser Gelegenheit sei es mir gestattet, auch die neueren Beweise zu zitieren, die Herr E. Fischer in Band 15 der Monatshefte für Mathematik und Physik für den Fundamentalsatz gibt, sowie die weitgehenden Verallgemeinerungen, welche Herr W. Stekloff in den Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg, t. XV, série VIII veröffentlicht hat.

Zürich, Anfang Juni 1904.

*) Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XVI.

Das Ostwaldsche Prinzip vom Energieumsatz in der Mechanik.

Von

MORITZ RÉTHY in Budapest*).

1. Herr Ostwald hat das folgende Prinzip „des größten Energieumsatzes" aufgestellt**):

Unter allen möglichen Energieumwandlungen wird diejenige erfolgen, welche in gegebener Zeit den größten Umsatz erlaubt.

Unter möglicher Energieumwandlung wird diejenige verstanden, welche mit der Erhaltung der Energie und mit den Bedingungen des materiellen Systems verträglich ist.

Dieses Prinzip wurde von Herrn C. Neumann einer näheren Untersuchung unterworfen, unter der beschränkenden Voraussetzung jedoch, daß das gegebene materielle System zu Anfang sich in *Ruhe* befindet, und daß die von dieser Ruhelage aus beginnende Bewegung nur während ihres *ersten Zeitelementes* in Betracht gezogen wird. Er gelangt zu folgendem Satze***):

„Ein beliebigen Bedingungen unterworfenes materielles System bewege sich unter dem Einfluß gegebener Kräfte, die ein Potential besitzen."

„Befindet sich dieses System zu Anfang eines unendlich kleinen Zeitelementes τ in Ruhe, so wird unter allen mit jenen Bedingungen und mit der Formel des Prinzips der lebendigen Kraft verträglichen virtuellen Bewegungen *eine* vorhanden sein, deren lebendige Kraft zu Ende der gegebenen Zeit τ *am größten* ist. Diese letztere wird alsdann diejenige sein, welche unter dem Einfluß der gegebenen Kräfte während der Zeit τ *in Wirklichkeit* eintritt."

*) Die Originalarbeit ist in „Mathematikai és Természettudományi Értesitö, Budapest 1903" erschienen. Dieser Aufsatz unterscheidet sich von ihr durch ausführlichere Beschreibung in mehreren Punkten, ferner durch den Ausbau der Formulierung des § 2 mittels Einführung des in Nr. 8 (pag. 566) definierten Fundamentalsystems.

**) Allgemeine Chemie, 1892, Bd. II, Teil I, S. 36, 37.

***) Berichte der k. sächs. Gesell. d. Wiss. 1892, Bd. 44, S. 187.

Die Herren A. Voß,*) Victor Zemplén**) und E. Förster***) unterwerfen das Prinzip einer weiteren Untersuchung ohne die beschränkende Voraussetzung des Herrn Neumann. Indem sie das Prinzip ähnlich formulieren, wie dieser, finden sie, daß es zur Beschreibung der mechanischen Erscheinungen sich nicht eignet, was die Herren Voß und Förster zu einer sehr veränderten Fassung des Ostwaldschen Prinzips veranlaßt: bei der üblichen Bezeichnungsweise soll nämlich der Ausdruck

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{1}{2}\sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

einen extremen Wert annehmen, wenn Systemlage und Systemgeschwindigkeit gegeben sind und wenn für die zu vergleichenden Systeme der Satz von der lebendigen Kraft gültig ist.

Bei all diesen Fassungen des Ostwaldschen Prinzips werden die Geschwindigkeiten resp. Beschleunigungen der Systempunkte variiert, während bei Ostwald davon keine Rede ist. Wohl setzt letzterer nur in einem sehr speziellen Fall auseinander, wie er sich die Anwendung seines Prinzips vorstellt; eine nähere Analyse der Behandlung dieses speziellen Falls zeigt aber, wie wir sehen werden, daß die Lagen auf spezielle Weise zu variieren sind und die Variation der Geschwindigkeiten nur in zweiter Reihe als Folge der Variation der Lagen in Betracht kommen. Die Fußnote auf S. 37 besagt, daß das Prinzip eigentlich nicht neu, sondern nur ein veränderter Ausspruch des Prinzips der kleinsten Aktion sei, was auch ein Beweis dafür ist, daß die Lagen zu variieren seien. Gerade diese Fußnote veranlaßte mich zu jener Formulierung des Ostwaldschen Prinzips, die auf S. 186, 187 meiner im Bd. 58 dieser Annalen erschienenen Arbeit „Ueber das Princip der Action" zu lesen ist. Da aber die Variation der Zeit, die bei dieser Formulierung eine Rolle spielt, die Sache kompliziert, daher besser zu vermeiden ist, da ferner andere Formulierungen, in welcher keine Zeitintegrale zum Vorschein kommen, zur ursprünglichen Fassung des Prinzips näher stehen, so scheint eine selbständige Behandlung desselben wohl nicht überflüssig zu sein. Wir werden sehen, daß jenachdem man wie beim Prinzip der Aktion die mittleren Werte der Energien, oder in näherer Übereinstimmung mit H. Ostwald die Energien selbst, aber immer im oben bezeichneten Sinne, einer Variation unterwirft: zwei verschiedene Formen des Ostwaldschen Prinzips in Erscheinung treten, von denen keine mit den Erfahrungstatsachen in Widerspruch steht.

*) Sitzungsberichte der k. b. Akad. d. Wiss. 1901, S. 59, 167.

**) Über den Energieumsatz in der Mechanik, Ann. d. Phys. 10, 2, S. 419, 1903.

***) Zeitschrift für Math u. Phys. Bd. 49, S. 84.

§ 1.

2. Die lebendige Kraft und das Potential des Systems seien mit T, U bezeichnet; f_1 und f_2 seien zwei additive Teile von $T+U$, also

$$f_1 + f_2 \equiv T + U; \tag{1}$$

man bezeichne mit $\bar{f}_j$ die Mittelwerte von $f_j\,(j=1,2)$ während eines Zeitintervalls $t_1 - t_0$, und man setze voraus, daß die Bewegung nur Bedingungsgleichungen unterworfen ist; (der Fall, wenn auch Bedingungsungleichungen gegeben sind, erfordert nämlich in der Behandlung ähnliche Betrachtungen, und ist nur weitläufiger zu besprechen).

Man denke sich T und U, wie auch f_1 und f_2, dargestellt durch die freien Koordinaten q_i, die Geschwindigkeiten q_i' und die Zeit t, womit die Bedingungsgleichungen eliminiert sind. Ich setze voraus, daß für das materielle System der Satz von der lebendigen Kraft Gültigkeit hat; man hat demnach die Gleichung

$$\sum_i \left(\frac{\partial (f_1+f_2)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial (f_1+f_2)}{\partial q_i'}\right) q_i' = 0. \tag{2}$$

Es sei endlich der Zerlegung in f_1 und f_2 die Beschränkung

$$\sum_i \left(\frac{\partial (f_1-f_2)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\,\frac{\partial (f_1-f_2)}{\partial q_i}\right) q_i' + 0 \tag{2*}$$

auferlegt.

Es besteht der folgende Satz:

Wird ein materielles System (wie beim Hamiltonschen Prinzip) aus der Lage zur Zeit t_0 in die Lage zur Zeit t_1 übergeführt, und vergleicht man die Zwischenlagen zur Zeit t in der wirklichen Bewegung und der variierten Bewegung, so verschwinden $\delta\bar{f}_1$ und $\delta\bar{f}_2$ entweder beide zugleich oder es verschwindet keine von beiden. Umgekehrt ist die Bewegung, für welche das Verschwinden von $\delta\bar{f}_1$ und $\delta\bar{f}_2$ sich gegenseitig bedingen, und für welche der Satz von der lebendigen Kraft besteht, notwendigerweise die natürliche Bewegung des Systems.

Der erste Teil dieses Satzes ist eine Folge des Hamiltonschen Prinzips, demzufolge

$$\delta\bar{f}_1 + \delta\bar{f}_2 = 0$$

ist. Der zweite Teil entspringt den folgenden Überlegungen: Wegen

$$\bar{f}_j = \frac{1}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} f_j\,dt;\quad \delta t_1 = \delta t_2 = 0$$

verlangt er, daß von den Gleichungen

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta f_j\,dt = 0, \qquad (j=1,2) \tag{3}$$

die eine eine Konsequenz der andern sein soll. Diese Gleichungen (3) nehmen infolge der Variationsvorschriften, bei Anwendung der Hamiltonschen Transformation die Form an:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial q_i'}\right) \delta q_i \, dt = 0, \qquad (j = 1, 2). \tag{4}$$

Ist der Freiheitsgrad $= 1$, und bezeichnet man die einzige freie Koordinate mit q, so folgt aus (2) und (2*) das Bestehen der Ungleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial q'} \neq 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial q'} \neq 0.$$

Daher ergibt sich aus (4) die Gleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial q'} = -\lambda\left(\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial q'}\right), \tag{5}$$

wo zufolge der Gleichung (2) die Konstante $\lambda = 1$ ist.

Ist der Freiheitsgrad > 1, so folgt aus den Gleichungen (4) ebenfalls nach bekannten Schlüssen des isoperimetrischen Problems das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial q_i'} = -\lambda\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\right); \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{6}$$

wo λ in allen Gleichungen dieselbe Größe bedeutet. Aus diesem System (6) folgt unmittelbar die Gleichung

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_1}{\partial q_i'}\right) q_i' = -\lambda \sum_i \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\right) q_i'. \tag{6*}$$

Da die beiden Seiten dieser Gleichung infolge der Beziehungen (2), (2*) von 0 verschieden sind, so zeigt ein Blick auf die Gleichung (2), daß $\lambda = 1$ ist. Daher nimmt das System (6) die Form an:

$$\frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial q_i'} = 0; \qquad (i = 1, \cdots, r) \tag{7}$$

dieses System ist daher infolge der Identität (1) das bekannte System der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.

3. Bezüglich der Ungleichung (2*) erlaube ich mir die folgende Bemerkung:

Ist das materielle System in zwei Teile zerlegbar, zwischen denen keine gegenseitigen Verbindungen und Einwirkungen bestehen, und wählt man für f_1 und f_2 gerade die kinetischen Potenziale $T_1 + U_1$ und $T_2 + U_2$ dieser zwei Teile, so verwandelt sich die Ungleichung (2*) in eine Gleichung; im zweiten Teile des Satzes in 2 tritt dann die Änderung ein, daß $\delta \bar{f}_1$ und $\delta \bar{f}_2$ unabhängig voneinander verschwinden.

Ist hingegen für das materielle System außer dem Satze (2) auch eine zweite Gleichung

$$(2^{**}) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial A}{\partial q_i'}\right) q_i' = 0$$

vorgeschrieben, so bedeutet dieses soviel, daß die Koordinaten nicht nur holonomen Bedingungsgleichungen, sondern auch noch dieser Bedingungsgleichung (2**) zu genügen haben; daher sind die q_i *keine freien* Koordinaten, sondern unterliegen noch der Gleichung (2**). Wählt man nun f_1 und f_2 der Gleichung

$$f_1 - f_2 = A$$

gemäß, so folgt aus (2) und (2**), daß außer dem Satze (2) auch noch

$$(8) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_2}{\partial q_i'}\right) q_i' = 0$$

zu erfüllen ist. Da die q_i keine freien Koordinaten sind, so ist in dem Gleichungssystem (6), welches auch hier Bestand hat, die Größe λ keine Konstante mehr, sondern eine Zeitfunktion. Infolge von (8) verschwinden ferner beide Seiten von (6*), und die Zeitfunktion λ bestimmt sich erst aus (8). Ist z. B. U bloß von den Koordinaten und der Zeit abhängig und hat $U = f_2$ die Gleichung (8) zu erfüllen, so ist die vorgeschriebene nicht holonome Bedingungsgleichung der Bewegung:

$$(8') \qquad \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i' = 0,$$

und die Widerstandskräfte bestimmen sich aus der Größe λ, die mittels der Gleichungen (6) und der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i' = 0$$

zu berechnen ist, die eine Folge von (8') ist.*)

4. Die Werte von f_1 und f_2 zur Zeit t_0 seien f_{10}, f_{20}, und als Grenzbedingung des Hamiltonschen Verfahrens sei die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{1}{t_1 - t_0}\left[\sum_i \frac{\partial (f_1 + f_2)}{\partial q_i}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} = \delta (f_{10} + f_{20})$$

vorgeschrieben. Dann nimmt das Hamiltonsche Prinzip die Form an:

---

*) Man kommt zu demselben Resultat, wenn man im Falle (8') an Stelle von q_i (dem Voßschen Verfahren gemäß) δq_i setzt, und die so entspringende Gleichung $\sum \frac{\partial U}{\partial q_i}\delta q_i = 0$ in unserem isoperimetrischen Satz als Bedingungsgleichung für die δq_i, die Gleichung (8') selbst als vorgeschriebenes partikuläres Integral betrachtet. Die Verallgemeinerung auf die Gleichung (8) liegt auf der Hand.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (f_1 + f_2 - f_{10} - f_{20})\, dt = 0,$$

d. i.

$$\delta(\overline{f_1 - f_{10}}) + \delta(\overline{f_2 - f_{20}}) = 0. \tag{10}$$

Die Bewegung des materiellen Systems geht demnach so vor sich, daß bei Einhaltung der Vorschrift (9) *die ersten Variationen der mittleren Energieumsätze* $\overline{f_1 - f_{10}}$ *und* $\overline{f_2 - f_{20}}$ *entweder beide zugleich verschwinden oder es verschwindet weder die eine noch die andere.*

Der Satz läßt außer der direkten Umkehrung, bei welcher (9) unverändert beibehalten wird, und die meiner oben zitierten Formulierung nahe liegt, auch noch eine andere Art von Umkehrung zu; man hat nämlich den

I. Lehrsatz. *Spaltet man die Beziehung* (9) *in zwei Teile*

$$\frac{1}{t_1 - t_0}\left[\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial q_i'}\delta q_i\right]_{t_0}^{t_1} = \delta f_{j0}; \qquad (j = 1, 2) \tag{9*}$$

und stellt die Forderung auf, daß bei Einhaltung der Variationsvorschriften (9*) *und ohne Lockerung der Verbindungen des materiellen Systems, das Verschwinden der ersten Variationen der mittleren Energieumsätze* $\overline{f_1 - f_{10}}$ *und* $\overline{f_2 - f_{20}}$ *sich gegenseitig bedingen, so ist die Bewegung des materiellen Systems, falls sie dem Satze von der lebendigen Kraft gemäß verläuft, notwendigerweise die natürliche.*

Man kommt nämlich bei Anwendung der partiellen Integration auf $\delta(\overline{f_j - f_{j0}})$ mit Rücksichtnahme auf die Variationsvorschrift (9*) zu den Gleichungen (4).

Substituiert man in I an Stelle von f_1 und f_2

$$f_1 = 2U; \quad f_2 = T - U,$$

und ist U von Geschwindigkeiten unabhängig, so erhält man einen Satz, der dem Ostwaldschen nahe steht. Indem ich mich auf konservative Systeme von dieser Art beschränke, spreche ich den Satz spezieller so aus:

II. Lehrsatz. *Überführt man das materielle System aus der Anfangslage in die Endlage auf allen möglichen Wegen, und läßt dabei auch den Anfangswert der lebendigen Kraft unvariiert, so führt die Forderung, daß, falls die Gesamtenergie in der wirklichen Bewegung, und der Mittelwert der Gesamtenergie in der variierten Bewegung konstant bleibt, der Mittelwert des Umsatzes an potentieller Energie einen extremen Wert annehme, notwendigerweise zu den Differentialgleichungen der natürlichen Bewegung.*

Substituiert man in Lehrsatz I an Stelle von f_1 und f_2

$$f_1 = 2T; \quad f_2 = U - T,$$

so erhält man einen Satz, der dem Ostwaldschen Prinzip ebenso nahe

steht, als der Lehrsatz II: an Stelle von „potentieller Energie“ erscheint eben „Bewegungsenergie“.

Man erhält eine dritte, und zwar die einfachste Form, wenn man in Lehrsatz I

$$f_1 = T; \quad f_2 = U,$$

oder

$$f_1 = U; \quad f_2 = T$$

substituiert.

§ 2.

5. Ich gehe zu einer Formulierung des Ostwaldschen Prinzips über, wo die Energieumsätze selbst, nicht aber ihre Mittelwerte, eine Rolle spielen. Es sei mir gestattet, vorerst das folgende Beispiel samt dazu gehörigem Beweisverfahren des Herrn Ostwald*) zu besprechen.

Ein materieller Punkt, auf den nur die Schwerkraft wirkt, besitzt in O die Geschwindigkeit 0. Aus dem Prinzip der Erhaltung der Energie folgt, daß sich der Punkt über das Niveau von O nicht erheben wird. Denkt man sich aber von O aus schiefe gerade Bahnen unter dem Niveau und auch die Vertikale durch O, auf welchen sich der materielle Punkt in Übereinstimmung mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie gleichzeitig bewegen soll, so ist der geometrische Ort der Lagen A zu einer und derselben Zeit t eine Kugelfläche, deren vertikaler Durchmesser mit OA_0 zusammenfällt, wo A_0 die Lage des materiellen Punktes auf der Vertikalen bezeichnet. Demnach ist die Änderung der potentiellen Energie auf der wirklichen Bahn zur Zeit t größer, als auf allen anderen Bahnen, auf denen sich der materielle Punkt in Übereinstimmung mit dem Erhaltungsprinzip bewegen könnte.

Dies ist mit veränderten Worten der Ideengang des Herrn Ostwald.

Demnach denkt er sich die Gleichung, welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausspricht, integriert, und mittels Elimination der Zeit t alles auf zu gleichen Zeiten t gehörigen Lagendifferenzen reduziert: das Prinzip vom extremen Wert des Zuwachses an potentieller Energie soll erst nach dieser Reduktion angewendet werden.

Da die Integration im Falle des allgemeinen Problems gar nicht denkbar, daher die Elimination von t auf diese Weise unmöglich ist, so wird man sie mit Umgehung der Integration zu bewerkstelligen, und so die zwischen den genannten Lagendifferenzen stattfindende Gleichung herzustellen haben. Dabei werden Beziehungen, die sich aus dem betrachteten Beispiel zwischen den Lagendifferenzen ergeben, gute Dienste leisten. Da nämlich der Satz, daß bei vertikaler Fallbewegung in gegebener Zeit

*) L. c. S. 37.

eine tiefere Lage erreicht wird, wie auf allen andern von demselben Anfangspunkt ausgehenden Bahnen, als Spezialfall eines bekannten Satzes gültig ist, so bleibt es für die Umgebung der Vertikalen gleichgültig, ob man die variierte Bahn als Kurve oder Gerade betrachtet: die zu gleichen Zeiten gehörige Lagendifferenz $A_0 A$ hat die Horizontale zur Grenze. Man hat also, die rechtwinkligen Koordinaten von A_0 mit q_1, q_2, q_3, die Verhältnisse der Projektionen von $A_0 A$ im Grenzfall mit δq_1, δq_2, δq_3 bezeichnet, die gleichwertigen homogenen Gleichungen

$$q_1' \delta q_1 + q_2' \delta q_2 + q_3' \delta q_3 = 0, \tag{11'}$$

$$q_1'' \delta q_1 + q_2'' \delta q_2 + q_3'' \delta q_3 = 0. \tag{11''}$$

Zu Schluß dieser Vorbesprechung sei mir noch, um etwaigen Mißverständnissen vorzubeugen, gestattet besonders zu betonen, daß ich auf das wirkliche Vorhandensein eines extremen Wertes der potentiellen Energie gar kein Gewicht lege; daß vielmehr die Frage einzig und allein die sein wird, ob bei der Ostwaldschen Beschränkung der virtuellen Verschiebungen die Forderung $\delta U = 0$ zu Bewegungsgleichungen führt, die mit der Erfahrung im Einklang sind, oder zu solchen, die ihr widersprechen.

6. Es sei vorerst ein freies Punktsystem gegeben; man führe bezüglich der Masse, die sich am Orte befindet, dessen rechtwinklige, geradlinige Koordinaten q_{3j-2}, q_{3j-1}, q_{3j} sind, zur Abkürzung die Bezeichnung ein

$$m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j};$$

demgemäß ist die lebendige Kraft des Systems

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i'^2.$$

Ferner bezeichne man die potentielle Energie des Systems mit $-U$, und die Gesamtenergie mit E, also

$$E = T - U. \tag{12}$$

Ich setze voraus, daß die Gesamtenergie konstant ist, sowohl in der wirklichen, als auch in der variierten Bewegung. Es besteht also in der wirklichen Systembahn, mit H die konstante Energie bezeichnet, die Gleichung:

$$T - U = H, \tag{12'}$$

und man hat in der variierten Systembahn, die von derselben Lage ausgehen soll, wie die wirkliche, die Variationsgleichung

$$\delta(T - U) = 0 \tag{12''}$$

einzuhalten. Bei der Variation sind der Vorbesprechung gemäß Lagen zu vergleichen, die zu einer und derselben Zeit t stattfinden: demgemäß ist $\delta t = 0$. Man hat demnach, wenn δq_i die Differenz der Koordinate q_i

im Vergleich zum Wert derselben auf der variierten Systembahn zur Zeit t bezeichnet,

$$\delta q_i' = \frac{d\delta q_i}{dt}.$$

Demzufolge lautet die Variationsgleichung (12″), vorausgesetzt, daß die Bewegungen und Variationen im betrachteten Intervall regulär sind,

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i q_i' \delta q_i\right) - \sum m_i q_i'' \delta q_i - \delta U = 0,$$

die mit dem System von Gleichungen

$$\sum m_i q_i' \delta q_i = \Phi(t), \tag{13'}$$

$$\delta U + \sum m_i q_i'' \delta q_i = \Phi'(t) \tag{13''}$$

äquivalent ist; hier bezeichnen $\Phi(t)$ und ihre Derivierte $\Phi'(t)$ kontinuierliche Zeitfunktionen, deren Anfangswerte (infolge der getroffenen Festsetzung bezüglich der Anfangswerte aller q_i) verschwinden. Da die Gleichungen (13′), (13″) mittels identischer Transformationen abgeleitet wurden, so sind die Schlüsse bei sonst beliebigen $\Phi(t)$ umkehrbar: es ergibt sich, daß, falls (12′) einerseits und (13′), (13″) andererseits gültig sind, die Gesamtenergie auch auf der variierten Systembahn $= H$ ist.

Ich frage nun, was für Bewegungsgleichungen ergeben sich für das materielle System, wenn man die Forderung aufstellt, daß die Gleichung

$$\delta U = 0 \tag{14}$$

eine Folge der Gleichungen (13′), (13″) sei?

Da dann die Gleichungen

$$\delta U \equiv (1+\lambda) \sum m_i q_i'' \delta q_i + \mu \sum m_i q_i' \delta q_i, \tag{14'}$$

$$0 = (1+\lambda) \quad \Phi'(t) \quad + \mu \Phi(t) \tag{14''}$$

stattfinden müssen, wo λ und μ Zeitfunktionen bedeuten, die in die Bewegungsgleichungen einrücken, und daher in jedem vorliegenden Fall eindeutig bestimmte endliche Größen sein müssen, da ferner $1+\lambda$ naturgemäß nicht verschwindet, so folgt aus (14″) mit Rücksicht darauf, daß die Anfangswerte von $\Phi(t)$ und ihrer Derivierten $\Phi'(t)$ verschwinden, der Schluß, daß $\Phi(t) \equiv 0$ sein muß. Dies steht mit den Gleichungen (11′), (11″) der Nr. 5 in Übereinstimmung: die Gleichungen (13′), (13″) gehen tatsächlich in diese über, wenn in ihnen $\Phi(t) = 0$, und zufolge (14) auch $\delta U = 0$ gesetzt wird, und wenn nur von einem materiellen Punkt die Rede ist.

7. Das Ostwaldsche Problem ist demnach, wie folgt, zu formulieren:

Es ist ein materielles System gegeben, auf welches Kräfte mit einem von der Zeit unabhängigen Potential U wirken, und welches von der Zeit unabhängigen Verbindungen unterliegt. Die Gesamtenergie $T - U$ ist daher in der wirklichen Bewegung konstant.

Man beschränke die virtuellen Verschiebungen des materiellen Systems mittels jenen homogenen Gleichungen zwischen den Verschiebungen, die zum Verschwinden des $\delta(T-U)$ bei $dt = 0$ notwendig und hinreichend sind, und nenne die Gesamtheit, die den Beschränkungen genügen, zulässige virtuelle Verschiebungen.

Was für Bewegungsgleichungen ergeben sich für das materielle System, wenn die Forderung $\delta U = 0$ für alle zulässigen virtuellen Verschiebungen erfüllt sein soll?

Sind die Verbindungen des materiellen Systems durch die Gleichungen

$$F_j = \text{const.} \qquad (j = 1, 2, \cdots, \nu) \tag{15}$$

gegeben, wo die F_j nur von den Koordinaten q_i abhängen, und bezeichnet man mit λ_j Zeitfunktionen, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen formal aus der Identität

$$\delta U \equiv (1+\lambda)\sum m_i q_i'' \delta q_i + \mu \sum m_i q_i' \delta q_i + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \delta F_j, \tag{16}$$

die aus (14′) mittels Addition der Glieder $\lambda_j \delta F_j$ entsteht. Die Bewegungsgleichungen sind von der Form

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = m_i q_i'' + \lambda m_i q_i'' + \mu m_i q_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i}, \tag{17}$$

$$\left(\begin{matrix} i = 1, 2, 3; \ \cdots; 3n-2, 3n-1, 3n \\ m_1 = m_2 = m_3; \ \cdots; \ m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n} \end{matrix} \right).$$

Nach dem bei Ableitung des Satzes von der lebendigen Kraft üblichen Verfahren erhält man aus dem System (17) die Gleichung

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt} + \lambda \frac{dT}{dt} + 2\mu T,$$

daher hat man mit Rücksichtnahme auf die durch (12′) ausgedrückte Erhaltung der Gesamtenergie zwischen λ und μ die Beziehung

$$0 = \lambda \frac{dT}{dt} + 2\mu T. \tag{18}$$

Zur Bestimmung der Zeitfunktionen $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ hat man außer dieser Gleichung (18) nur noch die Gleichungen (15); also hat man $\nu + 1$ Gleichungen, während die Anzahl der Unbekannten $\nu + 2$ ist. Nimmt man an, μ sei $= 0$, so folgt aus (18), daß auch λ verschwindet;

dann geht das System (17) in die Lagrangeschen Gleichungen der Dynamik über.

Ich untersuche noch für den Fall $\lambda + 0$ die Zusatzkräfte

$$Q_i = m_i(\lambda q_i'' + \mu q_i'), \qquad (i = 1, \cdots, 3n)$$

die mittels (18) übergehen in

$$Q_i = m_i \lambda \left(q_i'' - \frac{dT}{dt}\frac{q_i'}{2T}\right), \qquad (i = 1, \cdots, 3n). \tag{19}$$

Ist die Geschwindigkeit aller Punkte des Systems zur Zeit t_0 gleich Null, so ist der Anfangswert aller Kräfte $Q_i = 0$. Man hat nämlich

$$\frac{dT}{dt}\frac{q_i'}{2T} = \frac{q_i' \sum m_i q_i' q_i''}{\sum m_i q_i' q_i'}$$

also

$$\lim_{t - t_0 = 0} \cdot \frac{dT}{dt}\frac{q_i'}{2T} = q_i''.$$

Daher gehen die Gleichungen (17) zu Beginn der Bewegung jedenfalls in die Bewegungsgleichungen der Dynamik über. Dies stimmt mit dem Resultat des Herrn C. Neumann überein.

Besteht das materielle System aus einem einzigen Punkt, dessen Koordinaten mit x, y, z bezeichnet werden mögen, so sind die Komponenten der Zusatzkraft

$$\begin{aligned} X &= m\lambda\left(x'' - \frac{dv}{dt}\frac{x'}{v}\right), \\ Y &= m\lambda\left(y'' - \frac{dv}{dt}\frac{y'}{v}\right), \\ Z &= m\lambda\left(z'' - \frac{dv}{dt}\frac{z'}{v}\right). \end{aligned} \tag{19'}$$

Die Richtung der Kraft fällt mit dem des ersten Krümmungsradius der Bahn zusammen, und ist im Falle eines positiven λ vom Krümmungsmittelpunkt gegen die Bahn gerichtet. Die Größe der Kraft ist, mit r den Krümmungsradius bezeichnet,

$$= \lambda m \frac{v^2}{r}.$$

Die Zusatzkraft verschwindet daher sowohl, wenn $v = 0$ ist, als auch bei beliebigem v, wenn die erste Krümmung der Bahn $= 0$ ist. Ein freier materieller Punkt, der sich in einem Raumteile bewegen würde, wo diese Zusatzkraft wirksam ist, und auf den keine andere Kraft wirkt, beschriebe daher eine gerade Linie mit konstanter Geschwindigkeit. Wirkt die freie Kraft, deren Potential U ist, in Richtung dieser Geraden, so ist die Bewegung durch das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft ($T - U = \text{const.}$) bestimmt, also die natürliche Bewegung. In jedem

andern Fall ist die Komponente der Beschleunigung des Punktes in Richtung der Tangente der Bahn gleich $\frac{1}{m}$ mal der Tangentialkomponente der gegebenen freien Kraft, die Komponente der Beschleunigung in der Normalebene hingegen nicht gleich $\frac{1}{m}$ mal der Komponente der gegebenen freien Kraft auf die Normalebene. Um daher mit dem Newtonschen Satze von der Bewegung des Schwerpunktes in Übereinstimmung zu bleiben, mußte man annehmen, daß im vorliegenden Raumteil außer den gegebenen auch von der Bewegung abhängige, vom Mittel herrührende Kräfte auftreten. Mit dieser Annahme wäre aber auch die Sache vom prinzipiellen Standpunkt aus betrachtet abgetan.

8. Wir haben beim Übergang von der Identität (16) auf das System der Gleichungen (17) stillschweigend vorausgesetzt, daß der Freiheitsgrad des materiellen Systems > 2 ist; da nämlich die Anzahl der *zulässigen* freien Koordinaten um 2 weniger ist als die der *wahren* freien Koordidinaten, so ist der Übergang sonst gar nicht erlaubt. Man kann diesen Mangel jedenfalls beseitigen, wenn man zu dem gegebenen System ein von ihm unabhängiges zweites konservatives System vom Freiheitsgrad $\gtreqless 2$ adjungiert, und die Ostwaldsche Beschränkung bezüglich der virtuellen Verschiebungen auf das aus diesen beiden zusammengesetzte System ausdehnt. Man erhält auf diese Weise zugleich ein Mittel zur Ausscheidung der sogenannten natürlichen Bewegung aus der Mannigfaltigkeit der in der vorigen Nummer charakterisierten Bewegungen.

Es besteht nämlich der folgende Lehrsatz:

Ist ein System aus mehreren an und für sich konservativen Systemen zusammengesetzt, deren lebendige Kräfte und Potentiale mit

$$T_h,\ U_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, k)$$

bezeichnet werden mögen, und legt man den virtuellen Verschiebungen des ganzen Systems (wie im Problem der Nr. 7) die Beschränkung auf, daß bei $\delta t = 0$ für die Variation der Gesamtenergie die Gleichung

$$\delta(T - U) \equiv \delta \sum_{h=1}^{k} (T_h - U_h) = 0$$

mittels zweier homogener Gleichungen stattfinde, so entsprechen der Forderung, daß für alle zulässigen virtuellen Verschiebungen

$$\delta U \equiv \delta \sum_{h=1}^{k} U_h = 0$$

sei, nur zwei Klassen von Bewegungen: die eine Klasse ist die durch die

Lagrangeschen Differentialgleichungen definierte natürliche Bewegung; die andere Klasse ist von der ganz speziellen Beschaffenheit, daß die einzelnen Verhältnisse $T_h : T$ im Verlauf der ganzen Bewegung alle konstant bleiben.

Das System der Gleichungen (17), das man für die Bewegung des materiellen Systems erhält, zerfällt eben, den konservativen Teilsystemen entsprechend, in k Gruppen, deren jede je eine Gleichung von der Form (18) d. i.

$$0 = \lambda \frac{dT_h}{dt} + 2\mu T_h \qquad (h = 1, \cdots, k) \tag{18'}$$

ergibt. Daher hat man entweder

$$\text{a)} \qquad \lambda = \mu = 0,$$

oder es sind die Verhältnisse

$$\frac{1}{T_h}\frac{dT_h}{dt} \qquad (h = 1, \cdots, k)$$

vom Index h unabhängig, also mit c_h Konstanten bezeichnet

$$\text{b)} \qquad T_h = c_h T \qquad (h = 1, \cdots, k)$$

q. e. d.

Man führe demnach ein *Fundamentalsystem* ein, bestehend etwa aus zwei Punkten, deren jeder sich auf gegebener Linie mit konstanter Gesamtenergie und mit lebendigen Kräften bewegt, deren Verhältnis in keinem endlichen Intervall konstant ist;*) ergänze ein beliebig gegebenes Punktsystem, dessen Bewegung zu beschreiben ist, durch dieses Fundamentalsystem, und wende das Ostwaldsche Prinzip auf das ergänzte System an. Das Prinzip liefert so dem soeben bewiesenen Satze gemäß sowohl für das Fundamentalsystem als auch für das gegebene Punktsystem die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in der ersten Form, ergibt also immer auch die von den Verbindungen herrührenden Kräfte.

9. Bei der Ostwaldschen Beschränkung der zulässigen virtuellen Verschiebungen spielt die Gesamtenergie des Systems eine Rolle, und das Prinzip findet infolge seiner Formulierung nur auf konservative Systeme Anwendung.

Man kann aber die Formulierung auf folgende Weise verallgemeinern:

Man denke sich das materielle Punktsystem und die Anfangslage, Anfangsgeschwindigkeiten, wie auch die Kräfte als explizite Funktionen der Koordinaten und der Zeit in einem gewissen Zeitintervall gegeben,

*) Ein solches Fundamentalsystem können z. B. zwei mathematische Pendel von gleicher Länge bilden, falls sie die tiefste Lage mit verschiedenen Geschwindigkeiten passieren; oder zwei schwere materielle Punkte, die sich in Kreisen, gelegen in Ebenen von verschiedener Neigung, bewegen.

dann ist die Bewegung des Systems durch diese Daten eine prinzipiell ganz bestimmte, also sind auch die lebendige Kraft T, das Potential U der Kräfte, denen ein Potential zukommen soll, wie auch (mit α eine beliebig wählbare feste Zahl bezeichnet) die Energie $T - \alpha U$ durch die Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeiten prinzipiell ganz bestimmte Funktionen von t. Ich bezeichne die durch diese Daten des Problems prinzipiell eindeutig bestimmte, wenn auch im Vorhinein unbekannte Funktion von t, die $= T - \alpha U$ ist, mit $Z(t)$.

Die Beschränkung, die ich den virtuellen Verschiebungen des materiellen Systems vorerst auferlegen will, ist nun die, daß $\delta Z(t) = 0$ also bei $\delta t = 0$ die Variationsgleichung

$$\delta(T - \alpha U) = 0 \tag{20}$$

mittels homogener Gleichungen zwischen den Verschiebungen erfüllt sei.

Dabei kann, wie schon erwähnt, U von der Zeit auch explizit abhängen.

Die Forderung, die ich an die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktsystems stelle, ist dann die, daß für alle der Beschränkung genügenden virtuellen Verschiebungen δU verschwinde.

Dieser Forderung genügt wieder das Gleichungssystem (17), wo die F_j auch von der Zeit explizit abhängen dürfen, und nur dieses. In diesem Gleichungssystem sind aber sowohl λ als μ Zeitfunktionen, zu deren Bestimmung in den Daten des Problems nichts vorliegt. Das System (17) ist daher ein Schema, das auszufüllen Erfahrungstatsachen vorbehalten bleibt.

Man erhält aber wieder die sogenannte natürliche Bewegung, wenn man das gegebene materielle Punktsystem durch das in Nr. 8 festgesetzte Fundamentalsystem ergänzt; die virtuellen Verschiebungen des materiellen Systems an Stelle von (20) mittels der Variationsgleichung beschränkt

$$\delta(T + T_0 - \alpha(U + U_0)) = 0, \tag{20'}$$

wo T_0 und U_0 sich auf das Fundamentalsystem beziehen, und fordert, daß für alle der Beschränkung genügenden virtuellen Verschiebungen $\delta(U + U_0)$ verschwinde.

10. Da die Zahl α hier beliebig wählbar ist, so wird es das einfachste sein, $\alpha = 0$ zu wählen. Indem man noch die Beschränkungen fallen läßt, daß die Kräfte des gegebenen materiellen Systems ein Potential haben sollen und daß die Verbindungen des Systems durch Gleichungen zwischen den Koordinaten und der Zeit ausdrückbar seien, kann man das folgende Prinzip aussprechen:

Man bezeichne die auf das materielle System wirkenden freien Kräfte mit

$$Q_i \quad (i = 1, 2, 3; \cdots; 3n-2, 3n-1, 3n),$$

und die zwischen den Koordinaten $q_1, \cdots, q_{3n}$ gegebenen Ungleichungen mit

$$F_j \gtrless 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, \nu). \tag{21}$$

Man nehme dasselbe Fundamentalsystem an wie in 8 und 9, ergänze das gegebene materielle System durch dieses Fundamentalsystem, beschränke die virtuellen Verschiebungen des Systems mittels der während des Zeitintervalls der Bewegung durch notwendige und hinreichende homogene Gleichungen zu erfüllenden Variationsgleichung

$$\delta(T + T_0) = 0, \tag{20*}$$

und fordere, daß für alle der Beschränkung genügenden virtuellen Verschiebungen

$$\sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0 \lesseqgtr 0 \tag{22*}$$

stattfinde.

Die Forderung wird dann und nur dann erfüllt, wenn die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems die Lagrangeschen sind, wo die zu den Beziehungen $F_j \gtrless 0$ zugehörigen Multiplikatoren λ_j nicht negativ sind.

Von den Beziehungen (21) kommen zur Zeit t nur jene in Betracht, für welche in diesem Zeitpunkt nicht nur $F_j = 0$ sondern außerdem noch $\frac{dF_j}{dt} = 0$ ist*); daher ist die Anzahl der im Zeitpunkt t in Betracht kommenden Beziehungen $\lesseqgtr 3n - 1$.

Die Koordinaten der beiden Punkte des Fundamentalsystems seien

$$q_{0k} \qquad (k = 1, \cdots, 6);$$

die Bedingungsgleichungen, denen die Punkte genügen,

$$F_{0l} = 0 \qquad (l = 1, \cdots, 4); \tag{21'}$$

die Punkte des Fundamentalsystems bewegen sich nämlich auf festen Linien.

Die einzuhaltende Variationsgleichung (20*) zerfällt in die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i' \delta q_i + \sum_{k=1}^{6} m_{0k} q_{0k}' \delta q_{0k} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i'' \delta q_i + \sum_{k=1}^{6} m_{0k} q_{0k}'' \delta q_{0k} &= 0. \end{aligned} \tag{20**}$$

Die Anzahl der ganz willkürlichen Koordinaten-Variationen ist daher $\gtreqless 1$. Dies hat zur Folge, daß die Identität, zu der man geführt wird, wenn man

*) A. Mayer, Berichte der k. sächs. Gesell. d. Wiss. 1899 Bd. 51, S. 225.

in (22*) das Gleichheitszeichen anwendet und bei den in Betracht kommenden Beziehungen (21) $\delta F_j = 0$ fordert, in das System von Bewegungsgleichungen zerfällt:

$$(23') \qquad \frac{\partial U_0}{\partial q_{0k}} = m_{0k} q_{0k}'' + \lambda m_{0k} q_{0k}'' + \mu m_{0k} q_{0k}' + \sum_{l=1}^{4} \lambda_{0l} \frac{\partial F_{0l}}{\partial q_{0k}}$$

$$(k = 1, \cdots, 6)$$

$$(23'') \qquad Q_i = m_i q_i'' + \lambda m_i q_i'' + \mu m_i q_i' + \sum \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i},$$

$$(i = 1, \cdots, 3n)$$

wo von den λ_j höchstens $3n - 1$ von Null verschieden sind.

Aus den Gleichungen (23') und (21') folgt vor allem auf dem in Nr. 8 dargestellten Wege, daß

$$\lambda = \mu = 0$$

ist. Demzufolge reduzieren sich die Bewegungsgleichungen (23', 23'') auf

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_0}{\partial q_{0k}} = m_{0k} q_{0k} = \displaystyle\sum_{l=1}^{4} \lambda_{0l} \frac{\partial F_{0l}}{\partial q_{0k}}, \\ Q_i = m_i q_i'' + \displaystyle\sum \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i}. \end{cases}$$

Es ist nur noch zu beweisen, daß keines der λ_j negativ sein kann.

Da für sämtliche l die Gleichung $\delta F_{0l} = 0$ stattfindet, so folgt aus (24)

$$(25^*) \qquad \sum Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \sum m_i q_i'' \delta q_i + \sum m_{0k} q_{0k}'' \delta q_{0k} + \sum \lambda_j \delta F_j,$$

also infolge von (20**)

$$(25') \qquad \sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \sum \lambda_j \delta F_j.$$

Setzt man alle hier vorkommenden δF_j eines ausgenommen $= 0$, also dieses eine $\delta F_{j_1} < 0$, was den bezüglich der Freiheitsgrade getroffenen Festsetzungen nicht widerspricht, so muß die linke Seite von (25') $\lesseqgtr 0$ sein. Aus der Gleichung

$$\sum_{0=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \lambda_{j_1} \delta F_{j_1},$$

auf die sich (25') reduziert, folgt daher

$$\lambda_{j_1} \lesseqgtr 0.$$

Bemerkung. Das bewiesene Ungleichheitsprinzip kann auch auf den Fall $\alpha + 0$ umgeformt werden, wenn nur $1 + \alpha + 0$ ist. Es tritt nämlich an Stelle der einschränkenden Variationsgleichung (20*) die mit (20') bezeichnete resp., falls die Kräfte kein Potential haben, diese:

$$\delta(T + T_0) - \alpha\left(\sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0\right) = 0. \tag{20''}$$

An Stelle der Forderung (22) tritt dann diese:

$$(1 + \alpha)\left(\sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0\right) \gtrless 0. \tag{22''}$$

Der Beweis unterscheidet sich von dem soeben dargestellten blos darin, daß an Stelle der zweiten Gleichung unter (20**) diese tritt:

$$\sum m_i q_i'' \delta q_i + \sum m_{0k} q_{0k}'' \delta q_{0k} - \alpha\left(\sum Q_i \delta q_i + \delta U_0\right) = 0.$$

Daher folgt aus (25*), die auch jetzt gültig ist, an Stelle von (25') diese:

$$(1 + \alpha)\left(\sum_{i=1}^{3n} Q_i \delta q_i + \delta U_0\right) = \sum \lambda_j \delta F_j,$$

woraus hervorgeht, daß $\lambda_j \gtrless 0$ $(j = 1, \cdots, \nu)$ auch jetzt Folgen der Forderung (22'') sind.

11. Es sei mir gestattet die Bemerkung zu machen, daß die Methode der Einführung eines Fundamentalsystems, die ich in den Nummern 8—10 angewandt habe, einer Verallgemeinerung fähig, daß sie insbesondere auch andere Variationsprinzipien der Mechanik allgemeiner, manchmal zugleich einfacher gestaltet, namentlich solche Variationsprinzipien, bei welchen der extreme Wert eines auf den Zeitpunkt bezug habenden Ausdrucks bei vorgeschriebenen Nebenbedingungen gefordert wird. Ich will dies an dem Beispiel eines von Herrn Julius König herrührenden Variationsprinzips der Dynamik*) erörtern.

Dieses Königsche Prinzip besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil spricht das Gesetz aus, nach welchem die Summe

$$\sum_{i=1}^{3n} Q_i q_i'', \tag{26}$$

das Beschleunigungsvirial der freien Kräfte, aus den gegebenen Verbindungen, Kräften und Maßen zu berechnen ist. Dieses Gesetz ist im all-

*) Math. Annalen Bd. 31 S. 1, 1888.

gemeinsten Fall kompliziert, hingegen im Falle eines freien Punktsystems sehr einfach; man hat nämlich für einen Massenpunkt m_0 mit Beibehaltung der Bezeichnungen von Nr. 10

$$\sum_{i=1}^{3} Q_{0i} q_{0i}'' = \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{3} Q_{0k}^2. \tag{26'}$$

Der zweite Teil des Königschen Prinzips sagt aus, daß bei gegebener Systemlage, Systemgeschwindigkeit und bei gegebenen freien Kräften unter allen möglichen Systembeschleunigungen, bei welcher der Ausdruck (26) den durch das erte Gesetz bestimmten Wert annimmt, jene zu stande kommt, die die Beschleunigungsenergie

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i''^2$$

zum Minimum macht.

Führen wir am einfachsten einen freien Punkt als Fundamentalpunkt ein, auf den die Schwerkraft wirkt, und setzen für diesen demgemäß den Bestand der Gleichung (26') voraus, so nimmt das Prinzip die folgende vereinfachte Form an:

Unter allen möglichen Systembeschleunigungen, bei welchen das Beschleunigungsvirial des durch den Fundamentalpunkt ergänzten materiellen Systems bei gegebenen freien Kräften einen vorgeschriebenen (im Vorherein unbekannten) Wert annimmt, kommt diejenige zu stande, die die Beschleunigungsenergie des ergänzten Systems zu ihrem kleinsten Wert führt.

Während das Königsche Prinzip, wie schon der Verfasser selbst a. a. O. bemerkte, den Dienst versagt, sobald der Freiheitsgrad des materiellen Systems $= 1$ ist, bestimmt diese abgeänderte Form die Bewegung und die von den Verbindungen herrührenden Kräfte auch in diesem Fall. Während ferner aus demselben Grunde das Königsche Prinzip im Falle von durch Ungleichheiten ausdrückbaren Verbindungen den Dienst versagt, sobald die Anzahl dieser $\geqq 3n - 1$ ist, daher mit dem Gaußschen Prinzip nicht äquivalent ist, kann dies von der abgeänderten Form nicht behauptet werden.

Um etwaigen Mißverständnissen zu begegnen, füge ich noch bei, daß das Königsche Prinzip auch in der ursprünglichen Fassung allgemein gültig wird, sobald man in das Variationsgebiet auch jene Bewegungen aufnimmt, bei denen das Beschleunigungsvirial der freien Kräfte $\sum_{1}^{3n} Q_i q_i''$ größer ist, als in der wahren Bewegung.

Ich habe demnach in § 1 eine Formulierung des Ostwaldschen Prinzips gegeben, in der an Stelle der Energien ihre Mittelwerte treten. Das Prinzip ist in dieser Form gleichwertig mit dem Hamiltonschen.

Im ersten Teil von § 2 (und in Nr. 9) hingegen ist eine Formulierung des Prinzips gegeben, die wie ich glaube nur eine präzisere (resp. verallgemeinerte) Fassung des Ausspruchs des Herrn Ostwald ist. In dieser Fassung führt das Prinzip in der Dynamik neben den d'Alembertschen Kräften mx'', my'' mz'' gleichberechtigte additive Kräfte dynamischer Art ein. Da aber diese additiven Kräfte auch verschwinden können, so ist das Prinzip in dieser Fassung allgemeiner als das Hamiltonsche Prinzip; und weil die Kräfte eben additiv sind, so ist mit den Newtonschen Gesetzen der Dynamik kein Widerspruch vorhanden.

Im zweiten Teil von § 2 habe ich endlich gezeigt, daß diese zweite Formulierung des Ostwaldschen Prinzips mittels Anwendung eines Verfahrens allgemeiner Art eine Gestalt annimmt, bei welcher es mit dem Lagrange-Fourierschen Prinzip völlig äquivalent ist.

Ragusa, Februar 1904.

Berichtigung

zu dem Aufsatz von M. Réthy im 58. Band dieser Annalen:

Seite 176, Z. 2 v. o., vor dem zweiten Glied ist an Stelle von — zu setzen +;

Z. 6 v. o., ist an Stelle von $\delta' T dt$ zu setzen

$$\delta' T dt + d(T \delta t), \text{ d. i. } \delta(T dt);$$

Z. 3 v. u., ist an Stelle von $[2 T' \delta t]_{t_0}^{t_1}$ zu schreiben

$$\left[2 T' \delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} +$$

Müller, Conrad H., Göttingen, Studien zur Geschichte der Mathematik insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert. Mit einer Einleitung: Über Charakter und Umfang historischer Forschung in der Mathematik (Sonderabdruck aus dem XVIII. Heft der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik). [93 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 3.—

Netto, Dr. **Eugen**, o. ö. Professor an der Universität Gießen, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. Mit 10 Figuren im Text. [VIII u. 200 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 4.40.

Nielsen, Dr. **Niels**, Privatdozent an der Universität Kopenhagen, Inspektor des Mathematischen Unterrichts an den Gymnasien Dänemarks, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. [XIV u. 408 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 14.—

Perry, Professor **John**, Drehkreisel. Volkstümlicher Vortrag, gehalten in einer Versammlung der „British Association“ in Leeds. Übersetzt von Professor Ascher Witz in Brünn. Mit 58 Abbildungen im Text und einem Titelbild. [VIII u. 125 S.] gr. 8. 1904. geb. n. ℳ 2.80.

Poincaré, **Henri**, Membre de l'Institut. Wissenschaft und Hypothese. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. [XVI u. 343 S.] 8. 1904. geh. n. ℳ 4.80.

Reinhold, Dr. **Otto**, Professor an der Königl. Landw. Hochschule zu Berlin, Vorstufen der höheren Analysis und analytischen Geometrie. Mit 50 Figuren im Text. [X u. 141 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 2.40.

Rensch, J., Oberlehrer, Planimetrische Konstruktionen in geometrischer Ausführung. Mit 104 Figuren im Text. [XIII u. 84 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 1.—

Rübenk, Dr. Ing. **Julius**, Festigkeitsberechnung größerer Drehstrommaschinen. Mit 48 Figuren im Text und auf einer Doppeltafel. [IV u. 59 S.] gr. 8. 1906. geh. n. ℳ 1.60.

Schreiber, Dr. K., die Kraftmaschinen. Für Zuhörer an der Universität Greifswald gehaltene Vorlesungen über die wichtigsten der zur Zeit gebräuchlichen Kraftmaschinen. Mit 1 Tafel und 55 Abbildungen im Text. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 6.—, geb. n. ℳ 6.60.

———— die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen. Untersuchung der Frage: „Ist Wasser die vorteilhafteste Flüssigkeit zum Betriebe von Dampfmaschinen?“ und Bearbeitung der auf diese Frage sich ergebenden Antworten. Mit 12 Zeichnungen im Text. [IV u. 126 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 3.60.

Selivanoff, **Demetrius**, Priv. Docent an der Universität St. Petersburg, Lehrbuch der Differenzenrechnung. [IV u. 92 S.] gr. 8. 1904. geh. ℳ 4.—

Serret-Harnack, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Herausgegeben von O. Stolz in Innsbruck und E. Zermelo. Dritter Band. Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 44 in den Text gedr. Fig. [XII u. 768 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.—

Auch in zwei Lieferungen:

1. Lieferung: Differentialgleichungen. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1905. geh. n. ℳ 5.—
2. Lieferung: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 35 in den Text gedruckten Fig. [XII u. 464 S.] gr. 8. 1904. geh. n. ℳ 5.—

Stephan, **P.**, Regierungsbaumeister, Lehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen, Die technische Mechanik. Elementares Lehrbuch für mittlere maschinentechnische Fachschulen und Hilfsbuch für Studierende höherer technischer Lehranstalten. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 265 Figuren im Text. [VIII u. 344 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 7.—

Study, **E.**, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 609 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

Weber, **H.**, Professor in Straßburg, und **J. Wellstein**, Professor in Gießen, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer u. Studierende. In 3 Bänden. [I. Elementare Algebra und Analysis. II. Elementare Geometrie. III. Anwendung der Elementarmathematik.] I. Band. [XIV u. 446 S.] gr. 8. 1903. In Leinw. geb. n. ℳ 9.— [Bd. II u. III. 1904. Unter d. Presse.]

Wölffing, Dr. **Ernst**, Professor an der Königl. Techn. Hochschule zu Stuttgart, **Mathematischer Bücherschatz**. Systematisches Verzeichnis d. wichtigsten deutschen und ausländischen Lehrbücher u. Monographien d. 19. Jahrhunderts a. d. Gebiete d. mathematischen Wissenschaften. In zwei Teilen. I. Teil: **Reine Mathematik**. Mit einer Einleitung: Kritische Übersicht über die bibliographischen Hilfsmittel der Mathematik. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Heft XVI, 1. [XXXVI u. 416 S.] gr. 8. 1908. geh. n. ℳ 14.—, geb. n. ℳ 16.—

Zeuthen, G. H., Professor an der Universität Kopenhagen, **Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert**. Deutsch von Raphael Meyer. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XVII. Heft. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 16.—

INHALT.

	Seite
Beiträge zum Kontinuitätsbeweise der Existenz linear-polymorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen. Von Robert Fricke in Braunschweig. (Mit 58 Figuren im Text)	449
Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe.) Von E. Zermelo in Göttingen	514
Abzählungen bezüglich des Strahls im n-dimensionalen Raum. Von Max Dasper in Tübingen	517
Sur les fonctions cylindriques. (Extrait d'un Lettre adressée à M. Niels Nielsen, à Copenhague.) Par W. Sonin, à St. Pétersbourg	529
Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen. Von A. Hurwitz in Zürich	535
Das Ostwaldsche Prinzip vom Energieumsatz in der Mechanik. Von Moritz Réthy in Budapest	554
Berichtigung zum Aufsatz von Réthy im 58. Bande dieser Annalen	572

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exakten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Größe und in tunlichst präziser Zeichnung den Manuskripte beilegen zu wollen. Außerdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaktion.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfaßt ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaktion: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Hierzu Beilagen von **Mayer & Müller** in **Berlin**, **Schubert & Salzer** in **Chemnitz** und **B. G. Teubner** in **Leipzig**, welche wir der Beachtung unserer Leser bestens empfehlen.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

[redacted]

MATHEMATICS STATISTICS
LIBRARY

STORAGE AREA

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

PHYSICS & MATH - STAT.

20M-2-60-93574

DEC 2 9 1978

DEC 1 8 1978

STORAGE AREA
510.5
M426
v.59
1904
DATE DUE
DATE (Stamp)
STORAGE AREA
alen.
d University Libraries
001 021 669